Das

technische Zeichnen.

Für

Architekten, Techniker,

Mechaniker und Bauhandwerker, insbesondere für Bau- und Gewerbschulen.

Von

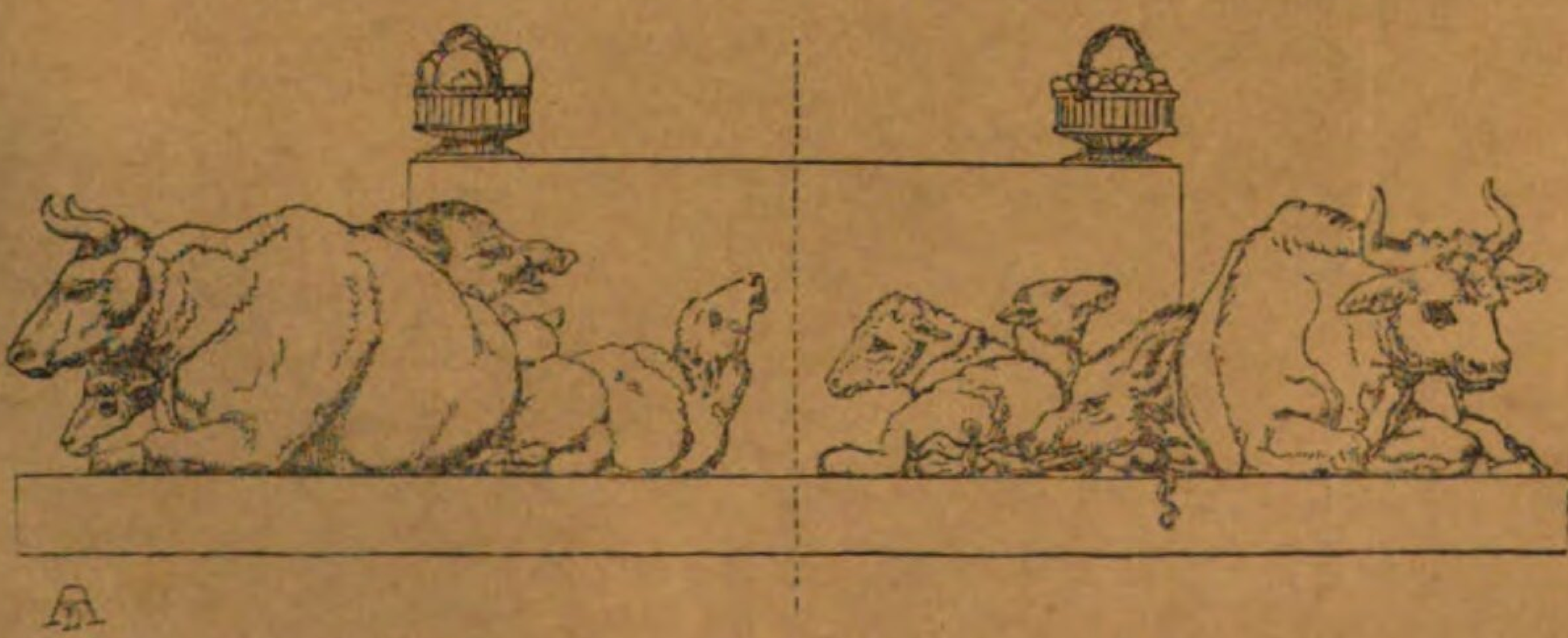
Guido Schreiber.

Mit 1000 in den Text gedruckten Abbildungen
nach Zeichnungen des Verfassers.

Zweiter Theil. abth. 2.

Das projektive Zeichnen.

Erste Hälfte. Darstellender und konstruktiver Theil.
(Projektionslehre. Spezielle darstellende Geometrie.) Bogen 11 — 20.



Vorschule zur Schule der Baukunst.

Leipzig,
Verlag von Otto Spamer.

1863.

Guido Schreiber.

Das technische Zeichnen.

Spezielle darstellende Geometrie.

Die diesem Bande vorhergehende Projektionslehre ist gleichfalls zu dem Preise von 15 Sgr. = 54 Xr. rh. besonders zu beziehen.

An die Abnehmer des vollständigen Werkes. Die umstehenden Haupt- und Nebentitel nebst Inhaltsverzeichniß sind vor Seite 101 einzuschalten.

Das technische Zeichnen.

Praktische Anleitung

für

Architekten, Techniker, Mechaniker und Bauhandwerker,

insbesondere

für Bau- und Gewerbschulen.

Bearbeitet

von

Guido Schreiber,

vormaligem öffentlichen Lehrer der Mathematik an der Polytechnischen Schule zu Karlsruhe und Vorstand der Kommission für das Gewerbschulwesen im Großherzogthum Baden.

Zweiter Theil

oder

Zweite Klasse: Projektives Zeichnen.

Zweite Abtheilung:

Konstruktiver Theil (Spezielle darstellende Geometrie).

Mit zahlreichen Holzschnitt-Illustrationen, Titelbildern u. s. w.

Leipzig.

Verlag von Otto Spamer.

1865.

Spezielle darstellende Geometrie.

Für

Architekten, Techniker, Mechaniker und Bauhandwerker,

insbesondere

für Bau-, polytechnische und höhere Gewerbschulen.

Bearbeitet

von

Guido Schreiber,

vormaligem öffentlichen Lehrer der Mathematik an der Polytechnischen Schule zu Karlsruhe und Vorstand der Kommission für das Gewerbschulwesen im Großherzogthum Baden.

Mit 300 Illustrationen, nebst einem Titelbilde, in Holz geschnitten nach Zeichnungen des Verfassers.

Leipzig.

Verlag von Otto Spamer.

1865.

Vorwort.

Den verschiedenartigen Bedürfnissen im technischen Zeichnen schon in der äußeren Gestalt und mit Rücksicht auf die gegenwärtige Abtheilung unsers allgemeinen Lehrganges zu genügen, hat man die beiden ersten Theile unserer zweiten Klasse, nämlich „die Projektionslehre" und „die spezielle darstellende Geometrie", sowol im Ganzen als auch in getrennten Bänden erscheinen lassen, wie solches bezüglich des dritten Theiles, „Perspektive, Schattenlehre, Kolorit", gleich Anfangs in Aussicht genommen war. Mit Seite 100 schließt die Projektionslehre ab und auf Seite 101 nimmt die zweite Abtheilung, die spezielle darstellende Geometrie, ihren Anfang.

Ueber unsern Zweck, unsere Anschauung und Methode spricht sich schon die Einleitung zur Projektionslehre aus und man wird das dort Gesagte noch am Schluß dieses Bandes ergänzt finden.

Es sind jetzt nahezu vierzig Jahre, seit wir mit einem umfassenden Werke über darstellende Geometrie, dem ersten in Deutschland, vor die Oeffentlichkeit getreten. Zur gegenwärtigen Arbeit vermochten wir uns nur in Folge äußerer Anregung zu entschließen. Möge sie jedenfalls Zeugniß geben, daß wir dies Feld der Wissenschaft und das geistige Erbe der Vorgänger nicht brach liegen gelassen.

Karlsruhe, im Oktober 1864.

Der Verfasser.

Inhalts-Uebersicht.

Spezielle darstellende Geometrie.

Erstes Buch. Gerade oder ebene Flächen.

Zweites Buch. Krumme Flächen.

Berichtigungen:

Seite 334 Zeile 7 v. u. lies: „so muß man auch Fig. 173 und die Nachbarfläche als Conoide ansprechen."
Seite 482 ist in Fig. 271, oberhalb V, *o* statt *v* zu setzen.
S. 513 Z. 18 lies: $\beta\alpha\gamma\delta$, $\beta'\alpha'\gamma'\delta'$.
S. 515 Z. 3 v. u. lies: *3'd'l'*.
S. 516 Z. 2 v. u. lies: *a1*, *a'1'*.
S. 519 ist das Ende der Verlängerung der Linie *Ss'* in Fig. 294 mit *q* zu bezeichnen.
S. 525 Z. 9 lies: *wew* Fig. 298.
S. 528 Z. 7 lies: 423.
S. 528 Z. 10 lies: Fig. 303.

Projektives Zeichnen.

Zweiter oder constructiver Theil.

(Spezielle darstellende Geometrie.)

Erstes Buch.

Gerade oder ebene Flächen.

1. In der ersten Abtheilung dieser Klasse wurden die Begriffe von „Projektionen“ entwickelt, und an einer großen Reihe von Beispielen gezeigt, in welcher Weise verschiedene Projektionsarten benutzt und angewendet werden können zur Darstellung manchfacher körperlicher Formen. Weil es aber unser nächster Zweck gewesen, die Vorstellungskraft der Schüler in den genannten Beziehungen zu bilden und zu schärfen, so haben wir uns bemüht, die Dinge möglichst anschaulich hinzustellen, und sind strengen Beweisführungen vorerst aus dem Wege gegangen. Nun aber ist es Zeit geworden, gerade diese Bahn zu betreten, das Vorgetragene seinem inneren Zusammenhang nach zu erfassen und die geometrische Begründung unseres Vorgehens nachzuweisen. Auf diese Art vervollständigen sich unsere Kenntnisse, indem wir Mehreres in unsern Bereich ziehen können, was bis daher zur Seite liegen bleiben mußte und mit der also gewonnenen Ueberzeugung von der Richtigkeit unserer Grundsätze und Verfahrungsarten werden wir zu geistigen Eigenthümern des Erlernten.

2. Ein einfaches Beispiel wird schon geeignet sein, unsere Ansicht deutlich zu machen. Angenommen wir hätten eine fünfeckige, an der Spitze schräg abgestumpfte Pyramide vor uns. An diesem Körper werden wir durch unmittelbare Messung belehrt, daß die fünf Kanten der Grundfläche unter sich gleiche Größe hätten, so wie auch ihrerseits die ähnlich liegenden Diagonalen, woraus folgt, daß diese Grundfläche ein reguläres Fünfeck sei. Messungen, mit einem Schrägmaße angestellt, zeigen ferner, daß die Seitenflächen der

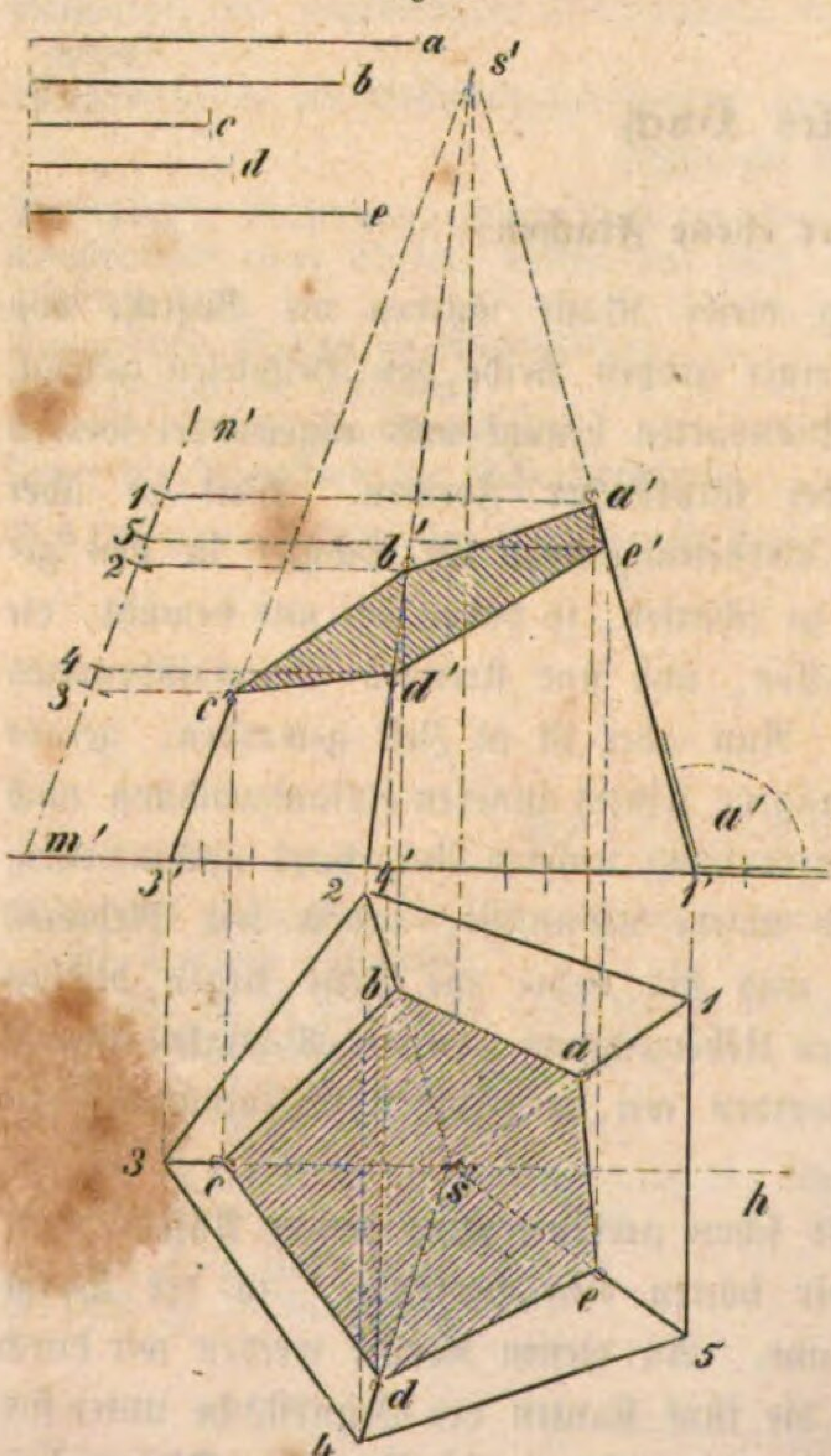
Pyramide mit der Grundfläche überall gleiche Winkel bilden, daß also der vorliegende Körper, wenn man ihn bis zur Spitze verlängert denkt, eine reguläre fünfeckige Pyramide sei.

Man hat ferner noch die Längen der fünf Seitenkanten zwischen der Grund- und der Abstufungsfläche gemessen, und nach all diesen Erhebungen soll nun die Zeichnung der abgestumpften fünfeckigen Pyramide entworfen werden

Dies wird, an sich genommen, geringe Schwierigkeit bereiten.

3. Man zeichnet, in wahrer Größe, oder, wie in Fig. *1*, in verjüngtem Maße, das reguläre Fünfeck, welches die Basis der Pyramide bildet, so daß der Mittelpunkt s desselben nebst einem Eck, 3 etwa, auf einer geraden Linie 3 s h liegen, welche parallel ist zur Grundlinie der Vertikalprojektion. Dadurch muß die, dem Punkte 3 gegenüberliegende Seite 1 s rechtwinklig gegen die Grundlinie zu stehen kommen. Man ziehe ferner die fünf Strahlen s 1, s 2, s 3 ꝛc. und es ist damit die Horizontalprojektion der als ganz gedachten Pyramide vollendet. Man projicirt die Ecken der Basis nach 1′, 4′, 3′, und errichtet in dem Centrum s eine senkrechte Linie s s′ von vorerst noch unbestimmter Länge. In dem Punkte 1′ wird ein Winkel a′ angetragen, demjenigen gleich, welchen die Seitenflächen der Pyramide mit der Basis bilden. Durch diesen Winkel bestimmt sich der Punkt s′, welcher die Vertikalprojektion der Spitze des Körpers darstellt. Wird noch s′ 4 und s′ 3 gezogen, so hat man die Vertikalprojektion der bis zur Spitze ergänzten Pyramide.

Fig. *1.*



Es bleibt nun noch die Abstufungsfläche zu entwerfen. Zu diesem Ende

möge beachtet werden, daß die Seitenkante der Pyramide, welche durch das Eck 3 der Basis geht, sich bei s′ 3′ in ihrer wahren Größe darstellt, weil diese Kante zur vertikalen Bildfläche parallel steht, wie dies aus der Lage ihrer Horizontalprojektion s 3 erhellt. Eine Folge dieser Stellung ist, daß alle Maße, welche auf der fraglichen Kante genommen werden, sich auf der Linie s′ 3′ in ihren wahren Verhältnissen darstellen.

Nun sind oben linker Hand bei a, b, c, d, e die gemessenen Längen der fünf Seitenkanten angegeben, wie sie der Reihe nach den fünf Ecken 1, 2, 3 ꝛc. der Basis entsprechen. Man trug darum die Länge c von 3′ aus nach c′, projicirte den Punkt c′ herunter auf die Linie s 3 nach c, und hatte damit die Projektionen c′, c des einen Eckes der Abstumpfungsfläche. Bei den vier übrigen Seitenkanten ließ sich aber nicht mehr so unmittelbar arbeiten, weil diese in der Vertikalprojektion mehr oder minder verkürzt erscheinen. Da aber jede derselben mit der Grundfläche einen Winkel bildet, welcher dem Winkel s′ 3′ 1′ gleich ist, so hat man bei m′ n′ eine Hülfslinie parallel mit s′ 3′ gezogen, auf diese die Längen a, b, c, d von m′ aus nach 1, 2, 4 5 getragen. Dadurch haben diese letztgenannten Punkte nothwendig dieselbe Höhe erhalten, wie die gleichnamigen Ecken der Abstumpfungsfläche. Man zog deshalb die wagerechten Hülfslinien 1 a′, 2 b′, 4 c′, 5 d′; projicirte die Punkte a′ b′ d′ e′ wieder herab nach a, b, d, e und hatte dadurch in beiden Projektionen die vier übrigen Ecken der fraglichen Fläche bestimmt.

4. Diese ganze Konstruktion konnte uns, wie vorhin gesagt, auf der jetzigen Stufe unseres Lehrganges keine Schwierigkeiten von Belang darbieten. Nehmen wir jetzt aber an, man wollte der Abstumpfungsfläche eine veränderte Lage gegen die Basis der Pyramide geben, so könnten drei Punkte von den fünfen a′, b′, c′, ꝛc. beliebig angenommen werden, die Lage der beiden übrigen aber wäre eine nothwendige Folge jener ersten Annahme und die Projektionen dieser Punkte müßten aus der Bedingung abgeleitet werden, daß sie mit den drei ersten in einer und derselben Ebene lägen. Zur Ausführung dieser Aufgabe ließe sich wohl ein Weg finden, allein wir hätten damit nichts gewonnen, als ein Auskunftsmittel für den einzelnen Fall, ohne daß uns damit klar würde, auf welchen allgemeinen Regeln die Konstruktion beruhe, und wie diese Regeln in ähnlichen oder verwandten Fällen anzuwenden seien.

Um solche allgemein giltige Regeln, solche Uebersichtlichkeit zu gewinnen, ist es nothwendig, daß wir auf einige Augenblicke zu unserm Ausgangspunkt zurückkehren, um die Gegenstände, welche wir behandelten, jetzt, alles Aeußerlichen und Zufälligen entkleidet, also in abstrakter Weise zu betrachten.

Projektionen des Punktes.

5. Von der physischen Beschaffenheit eines Punktes ist hier überall keine Rede; ob derselbe von Haus aus als Eck eines Körpers aufgetreten, oder in welch anderer Eigenschaft, hat hier keine Bedeutung. Für uns ist der Punkt ein Ort im Raume und zwar ein Ort ohne irgend welche Ausdehnung.

I. Jede räumliche Figur kann betrachtet werden, als sei sie aus Punkten zusammengesetzt.

II. Wir bedienen uns der Projektionen, die gegenseitige Lage von Punkten des Raumes zu bestimmen.

III. Gerade Projektion oder auch schlechtweg Projektion eines Punktes auf einer ebenen Fläche nennt man den Fußpunkt des Perpendikels, welcher aus dem Punkte auf die Fläche gefällt worden. Die Fläche heißt „Projektionsebene“, der Perpendikel „projicirende Linie des Punktes.“

Lehrsatz 1. Durch seine Projektionen auf zwei verschiedenen Ebenen ist die Lage eines jeden Punktes im Raume bestimmbar; denn hat man zwei solcher Projektionen gegeben, so sind dadurch mittelbar auch die zwei projicirenden Linien des Punktes bestimmt, welche, nachdem sie errichtet worden, sich wieder in dem Punkte kreuzen müssen, von welchem sie ursprünglich ausgingen.

IV. Die beiden Projektionsebenen können, theoretisch genommen, jedwede gegenseitige Lage haben, in so ferne sie nur nicht unter sich parallel sind; allein für die Praxis bot es Vortheile, der einen Projektionsebene stets eine horizontale, der andern eine vertikale Lage zu geben.

Erläuterung. Aus einem Punkte läßt sich der Lage nach nur ein Perpendikel auf zwei parallele Ebenen fällen. Hätte man darum auch die Projektionen eines Punktes auf zwei unter sich parallelen Ebenen, so wäre damit doch nur eine projicirende Linie bestimmt, also der Punkt selbst noch nicht.

6. **Veranschaulichung.** X Y V Fig. 2 (S. 105) sei die horizontale, Y X Z die vertikale Projektionsebene und A ein Punkt des Raumes, welcher auf die beiden Ebenen nach a und a′ projicirt worden.

Wäre der Punkt A verschwunden und man errichtete in a eine Winkelrechte auf die Horizontalebene, in a′ eine solche auf die Vertikalebene, so müßten beide sich wiederum in A durchkreuzen und die Lage dieses Punktes wäre vermittelst seiner Projektionen wiederum bestimmt.

Aus a fälle man eine Linie a m winkelrecht gegen X Y; sie wird mit A a′ parallel sein; aus a′ fälle man eine zweite Linie a′ m winkelrecht auf

XY, welche mit A a parallel werden, und die erste Linie in m durchkreuzen muß. Dadurch entsteht ein Rechteck A a m a′, in welchem der Abstand a′ m gleich ist der Höhe A a und der Abstand a m gleich A a.

Zum Zweck der graphischen Ausführung hält man nun die Vorstellung fest, daß die vertikale Projektionsebene um die Grundlinie X Y gleichwie um ein Scharnier gedreht und in die Horizontalebene niedergelegt worden sei, so daß beide Flächen jetzt in eins zusammen gefallen sind. Dabei wird die Vertikalprojektion a′ des Punktes A nach a″ zu liegen kommen, so daß a m a″ eine gerade Linie bildet und m a″ = m a′ = A a ist.

Fig. 2.

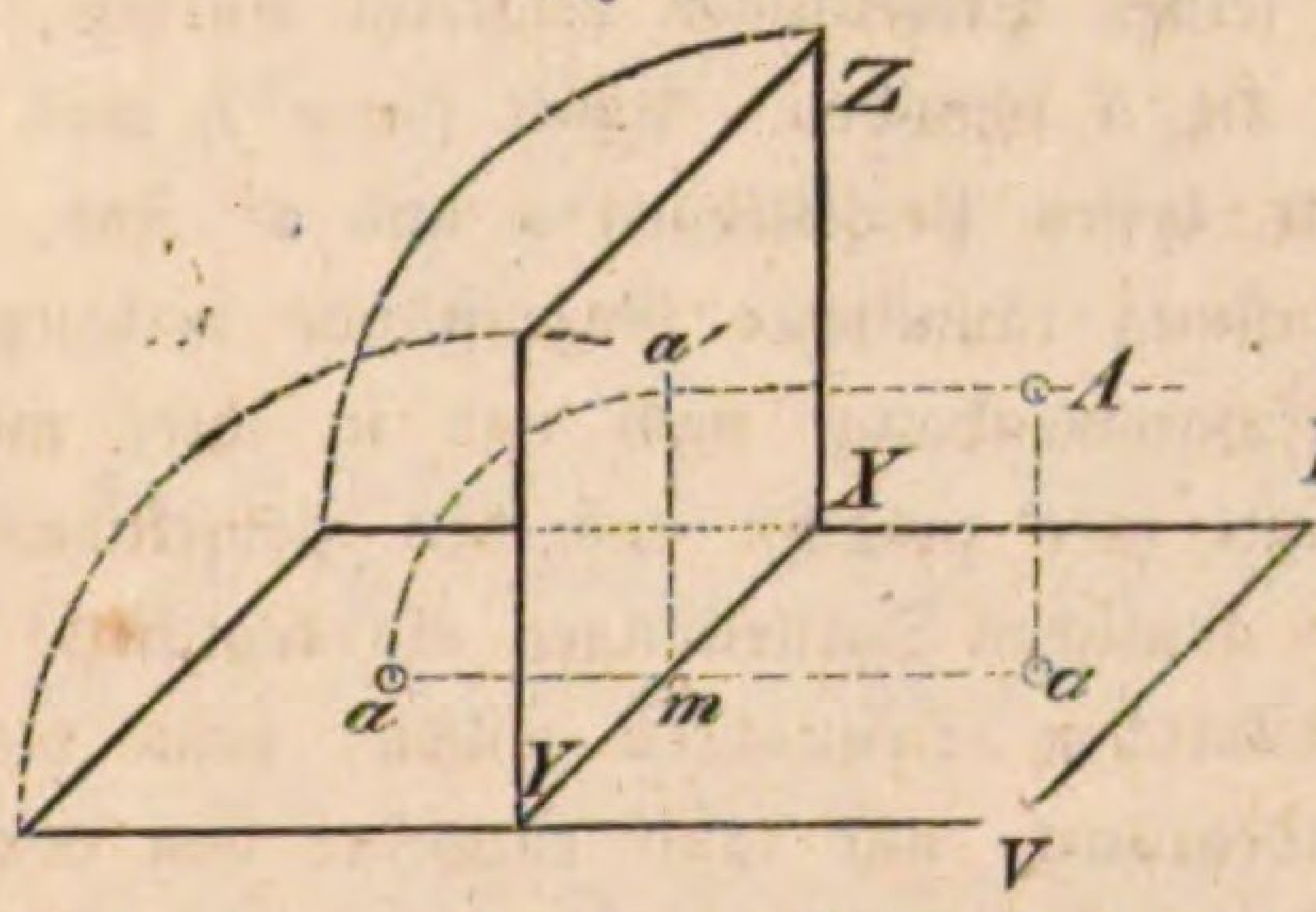
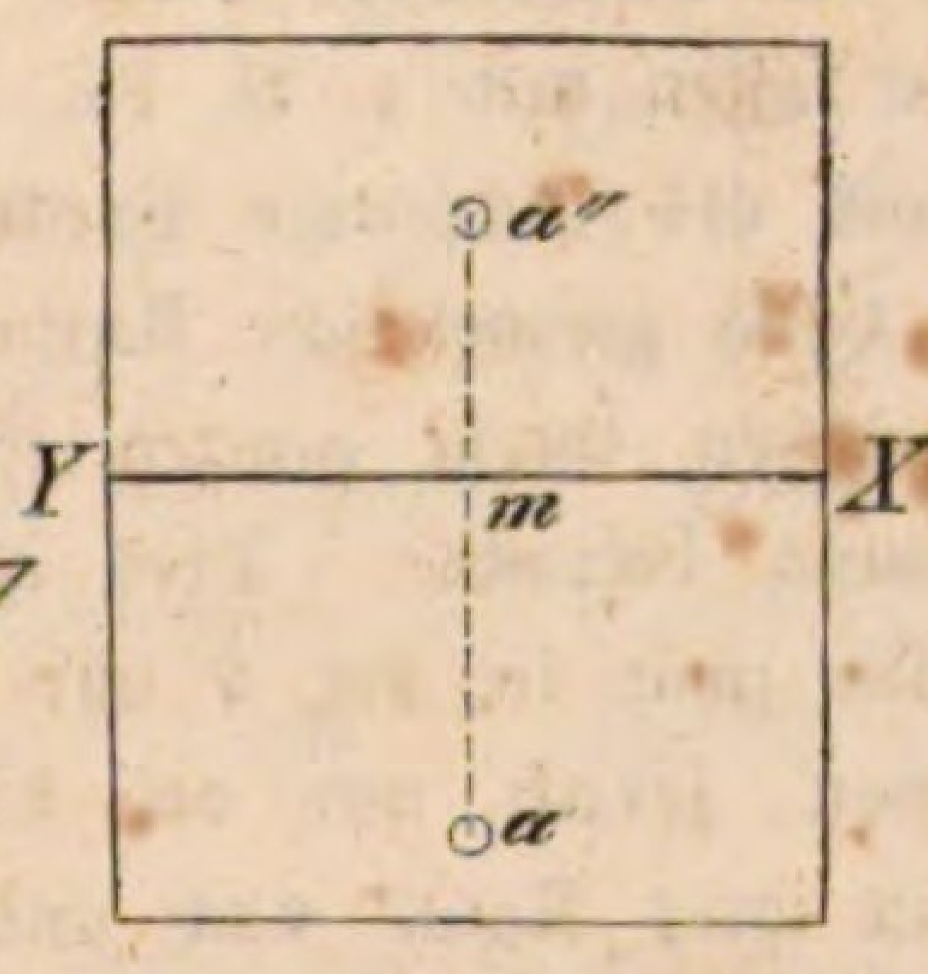


Fig. 3.



Lehrsatz 2. Bei umgelegten Projektionsebenen befinden sich die Projektionen eines und desselben Punktes auf einer geraden Linie, welche rechtwinklig gegen die Grundlinie steht.

Die Fig. 3 erläutert dies. Soll aus ihr auf die Lage von A im Raume geschlossen werden, so hat man sich zu denken, dies A sei der Endpunkt einer in a errichteten Senkrechten, deren Länge gleich ist dem Abstande a″ m.

Es könnte aber auch die Vorstellung festgehalten werden, daß die vertikale Projektionsebene sich in ihrer richtigen Lage befinde, während die Horizontalebene umgeklappt worden. In diesem Falle muß A am Ende der Senkrechten liegen, welche in a″ errichtet wird und deren Länge gleich m a.

7. Der Lernende hat unter den zwei Projektionen eines Punktes wie a und a″ Fig. 3 zwei unzertrennlich verbundene Sinnbilder zu erblicken, welche zusammen einen Punkt A bezüglich seiner Stellung gegen beide Projektionsebenen festsetzen.

Projektionen lassen sich am füglichsten mit Schlagschatten vergleichen. Hat man einen derartigen Schatten, welchen ein Punkt auf eine ebene Fläche wirft, so ergiebt sich hieraus der Schluß, daß der Punkt in der Richtung des

Strahles sich befinden müsse, welcher den Schlagschatten verursacht. Wird der Schatten als Projektion betrachtet, dann ist jener Strahl die projicirende Linie.

Hätte man aber gleichzeitig noch den Schlagschatten, welchen derselbe Punkt auf eine zweite Fläche wirft, und welcher verursacht wird durch einen zweiten leuchtenden Gegenstand, so wäre damit eine zweite projicirende Linie des Punktes angezeigt. Beide Linien oder beide Strahlen müßten sich da im Raume kreuzen, wo der schattenwerfende Punkt liegt.

8. **Bezeichnung.** In so ferne wir es mit den Projektionen der Punkte zu thun haben und nicht mit ihnen selber, werden wir zur Bezeichnung eines Punktes die Buchstaben, welche seinen Projektionen beigesetzt wurden, in eine Klammer fassen und z. B. bei Fig. *3* schreiben: Punkt (a, a''), was so viel heißen will als: derjenige Punkt, dessen Projektionen a und a″ sind.

9. Eine geometrische Auffassung räumlicher Gegenstände verlangt, daß man dieselben ihrem ganzen Zusammenhange nach und in ihrer möglichen Ausdehnung betrachte. Dies gilt hier zunächst von den Projektionsebenen, welche wir zwar in Fig. *3* und ähnlichen Darstellungen als begränzte Flächen behandelten, jedoch nur der bildlichen Deutlichkeit willen; denn die ebene Fläche ist ihrer Natur nach unbegränzt, und kann entweder von vornherein so aufgefaßt, oder doch jeden Augenblick beliebig nach allen ihren Richtungen verlängert gedacht werden.

Die beiden Projektionsebenen in ihrer breitesten Ausdehnung theilen den ganzen Raum in vier große Regionen, nämlich in Regionen ober- und unterhalb der Horizontalebene, und wiederum den Raum vor oder hinter der Vertikalebene. In einer jeden dieser Regionen können die Punkte liegen, deren Projektionen gegeben oder gesucht sind.

Nachdem aber die vertikale Projektionsebene niedergelegt worden, fällt ihr oberer Theil auf den hinteren Theil der Horizontalebene und ihr unterer Theil auf den vorderen dieser letzten. Dadurch wird es nun kommen, daß die Horizontalprojektionen der Punkte des Raumes wie in Fig. *5* (S. 107) in der Regel zwar unter der Grundlinie sich finden, oft aber auch über derselben; gleicherweise wird sich's mit den Vertikalprojektionen verhalten.

Zur schnelleren Orientirung werden wir deshalb

I. alle Horizontalprojektionen mit kleinen Buchstaben bezeichnen,

II. alle Vertikalprojektionen mit den nämlichen Buchstaben und Accenten.

Wenn wir also schreiben: Punkt (a, a') oder (m, m'), so ist mit

a oder m stets die horizontale, mit a′ oder m′ stets die vertikale Projektion angezeigt.

Fig. 4.

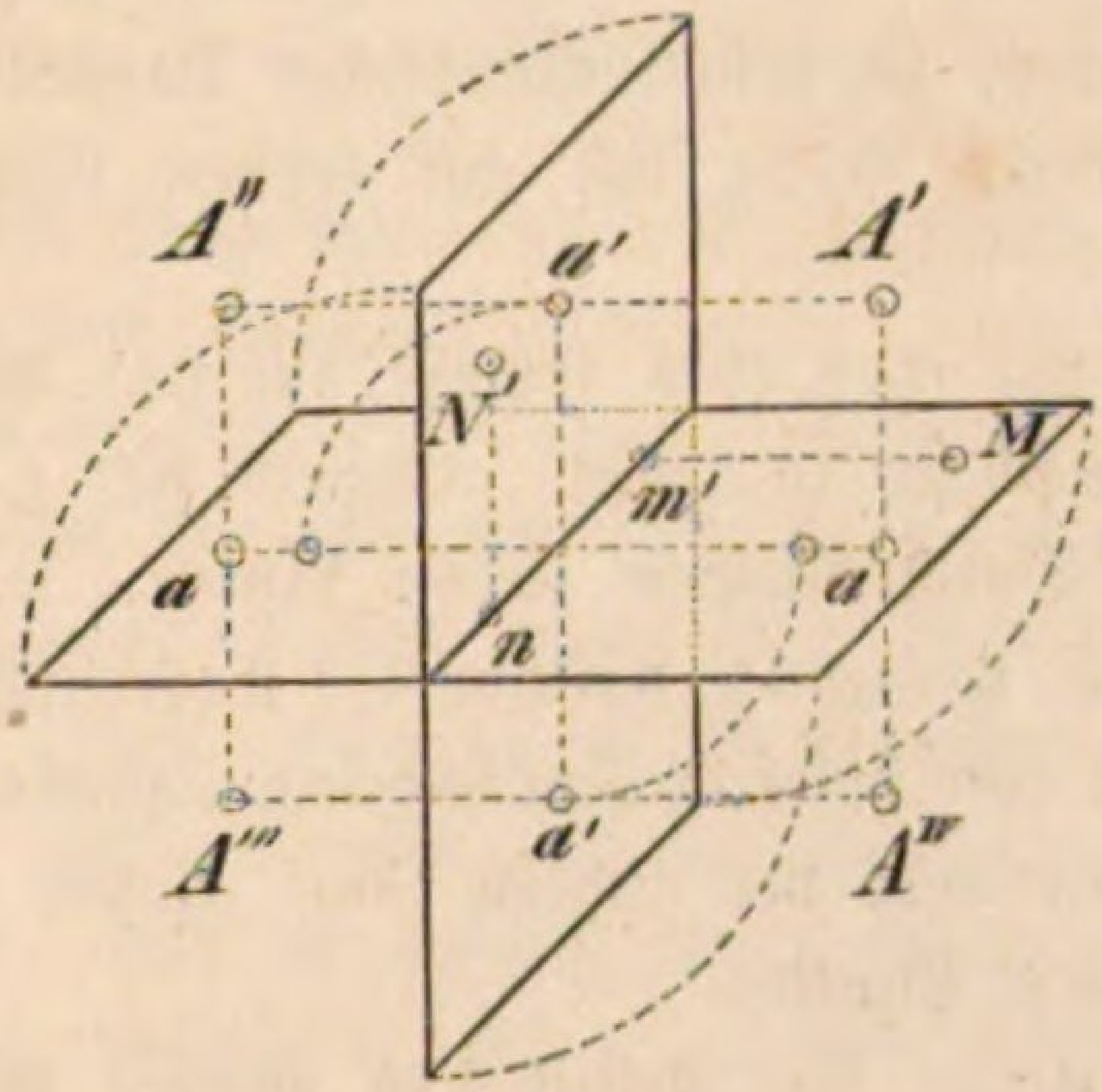
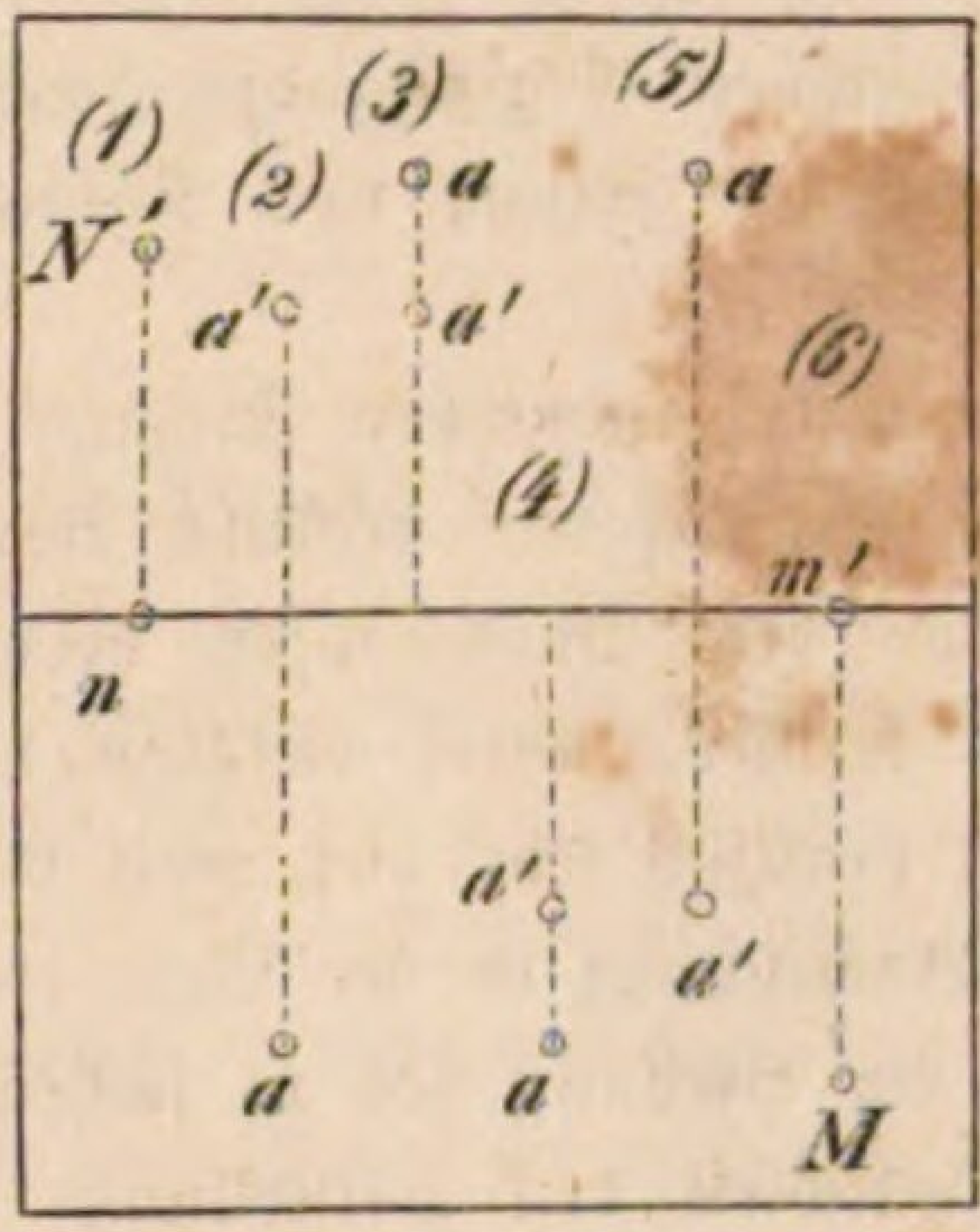


Fig. 5.



In Fig. 4 bedeutet A′ einen Punkt in der vorderen oberen Region, a und a′ seine Projektionen. Nach dem Niederlegen der Vertikalebene erhalten diese ihre gegenseitige Stellung wie bei *(2)* Fig. 5, nämlich: a′ oberhalb, a unterhalb der Grundlinie.

A″ ist ein Punkt in der oberen Region hinter der Vertikalebene, deshalb liegt a auch hinter der letzteren und nach dem Niederlegen werden die Projektionen wie bei *(3)* beide oberhalb der Grundlinie zu finden sein.

A‴ ist ein Punkt in der unteren Region hinter der Vertikalebene, seine Projektionen finden sich nach dem Niederlegen bei *(4)* unterhalb der Grundlinien.

A^{IV} ist ein Punkt in der vorderen unteren Region und seine Projektionen erhalten die Lage wie in *(5)* Fig. 5.

III. Originale Punkte, welche in einer Projektionsebene selbst liegen, und hier also ihre eigene Projektion vorstellen, bezeichnen wir mit großen Buchstaben.

M Fig. 4 und 5 ist ein Punkt in der Horizontalebene, seine Vertikalprojektion m′ liegt deshalb auf der Grundlinie.

N′ ist ein Punkt in der Vertikalebene, und seine Horizontalprojektion n findet sich gleichfalls auf der Grundlinie.

10. Weil somit alle Punkte in der Horizontalebene ihre Vertikalprojektionen auf der Grundlinie haben, so kann diese überhaupt betrachtet werden als die Vertikalprojektion der ganzen Horizontalebene.

Weil zweitens alle Punkte in der Vertikalebene ihre Horizontalprojektionen wieder auf der Grundlinie finden, so erscheint diese andererseits auch als die Horizontalprojektion der ganzen Vertikalebene.

Weitere Projektionen, abgeleitet aus den beiden ersten.

11. Indem durch zwei Projektionen eines Punktes seine Stellung gegen die Projektionsebenen völlig bestimmt ist, müssen überhaupt zwei Projektionen eines räumlichen Gegenstandes genügen, zu dessen graphischer Darstellung sowohl, als zur Lösung von Aufgaben, welche sich auf solchen Gegenstand beziehen.

Allein bei technischen Arbeiten hat man eben sowohl auf das theoretisch Mögliche, als auf das praktisch Brauchbare zu sehen. Ergiebt sich z. B. ein Punkt aus dem Durchkreuzen oder Durchschneiden zweier Linien, so kommt auf den Winkel, unter welchem die Kreuzung stattfindet, theoretisch nichts an, aber praktisch sehr viel, weil bei sehr schiefem Durchschneidungswinkel eine geringe Abweichung in der Lage einer oder der andern Linie großen Einfluß übt auf die Stellung des zu suchenden Punktes.

Deutlichkeit der Darstellung, Kürze der Arbeit sind weitere Momente, welche Berücksichtigung fordern.

Aus derartigen Gründen findet man sich oft veranlaßt, den zwei ersten Projektionen noch eine dritte und vierte beizufügen, beziehungsweise diese aus den ersten abzuleiten.

Fig. 6.

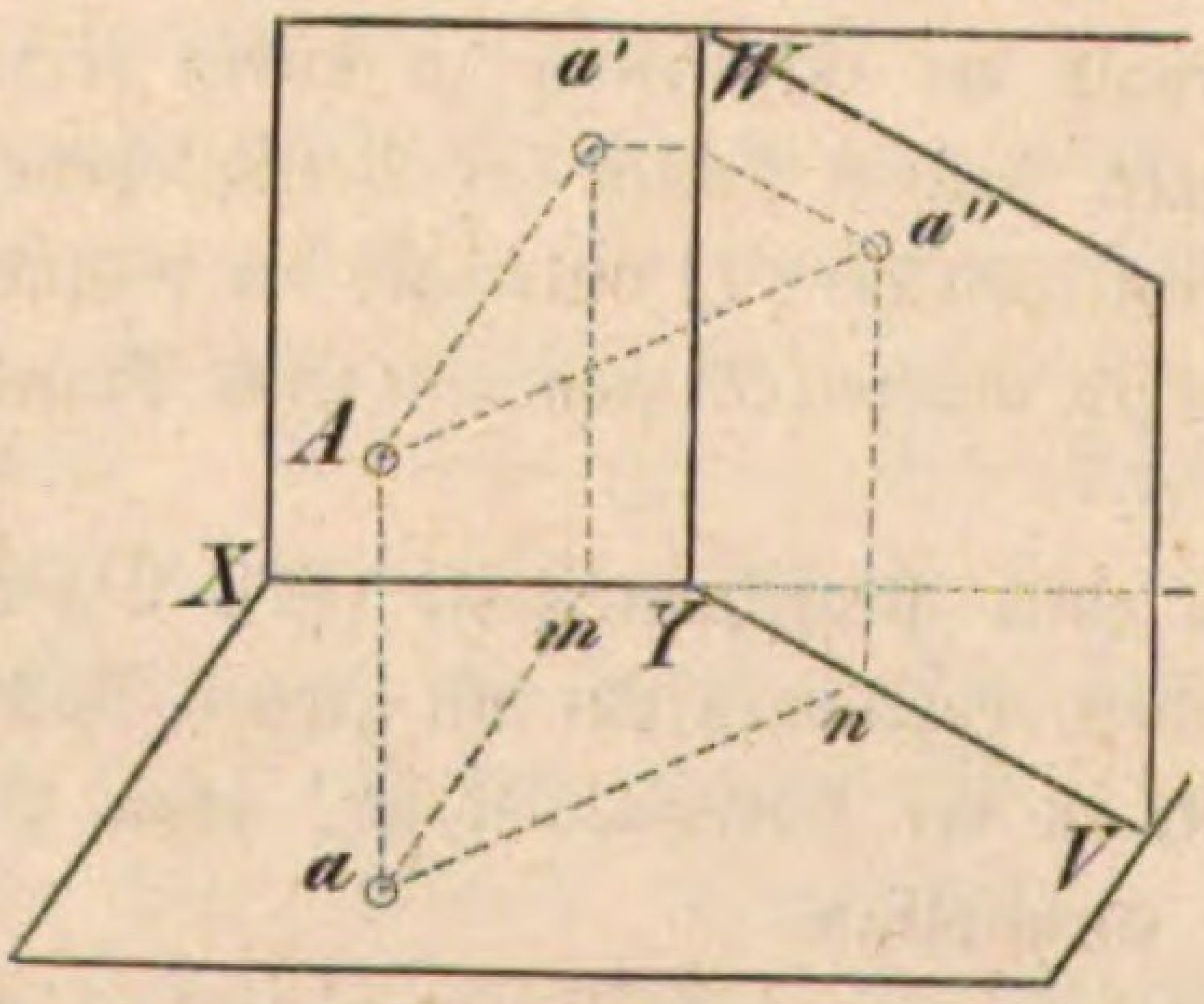
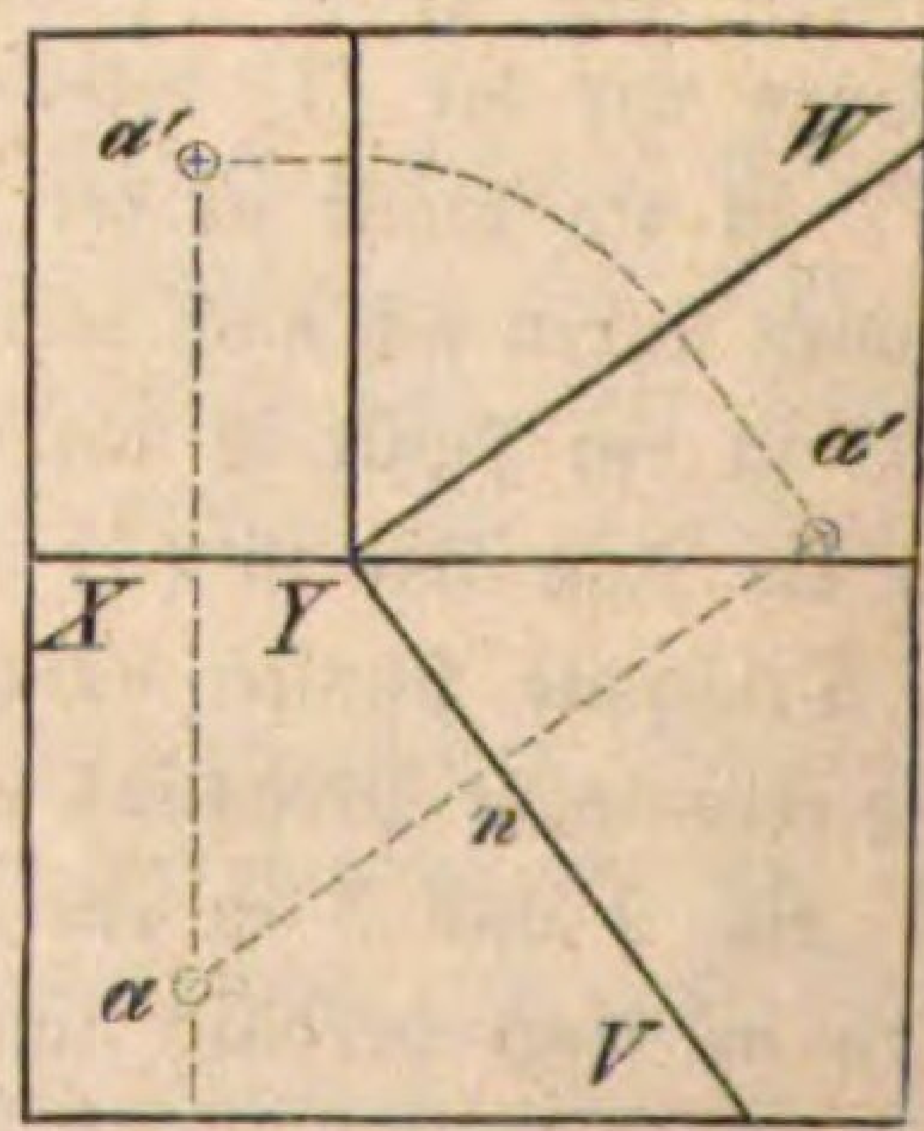


Fig. 7.



A Fig. 6 sei ein Punkt im Raume und a, a' seine zwei Projektionen, bei V Y W stehe eine zweite Vertikalebene schräg gegen die erste und auch auf sie soll A projicirt werden. Ein Perpendikel aus A auf die Ebene gedacht würde dieselbe in der gesuchten Projektion a'' treffen. Um jedoch in den Projektionsebenen selber zu arbeiten, fälle man aus a einen Perpendikel a n auf die Grundlinie V Y, errichte in n eine Senkrechte und mache ihre Länge n a'' gleich der Höhe A a bez. gleich a' m.

Fig. *7* zeigt die wirkliche Ausführung dieser Arbeit, wobei zur Bezeichnung der gleichnamigen Punkte dieselben Buchstaben gebraucht sind wie in *6*.

Projektionen der geraden Linie.

12. Lehrsatz. Die Projektionen einer geraden Linie sind wiederum gerade Linien.

A B Fig. *8* sei eine solche Linie. Ihre Horizontalprojektion wird gebildet von den Projektionen aller Punkte A, O, B ꝛc. der Linie. Aber die projicirenden Linien A a, O o, B b ꝛc. müssen sämmtlich in einer ebenen Fläche liegen, welche durch A B geht, und auf der Horizontalebene senkrecht steht. Daraus folgt, daß die Punkte a, o, b ꝛc. in dem Durchschnitte zweier Ebenen, also in gerader Linie liegen müssen. Aehnlich beweist man, daß auch die Punkte a′, o′, b′ ꝛc. der Vertikalprojektion eine gerade Linie bilden.

Die Flächen A a b B und A a′ b′ B sind die projicirenden Ebenen der geraden Linie A B.

Fig. *8*.

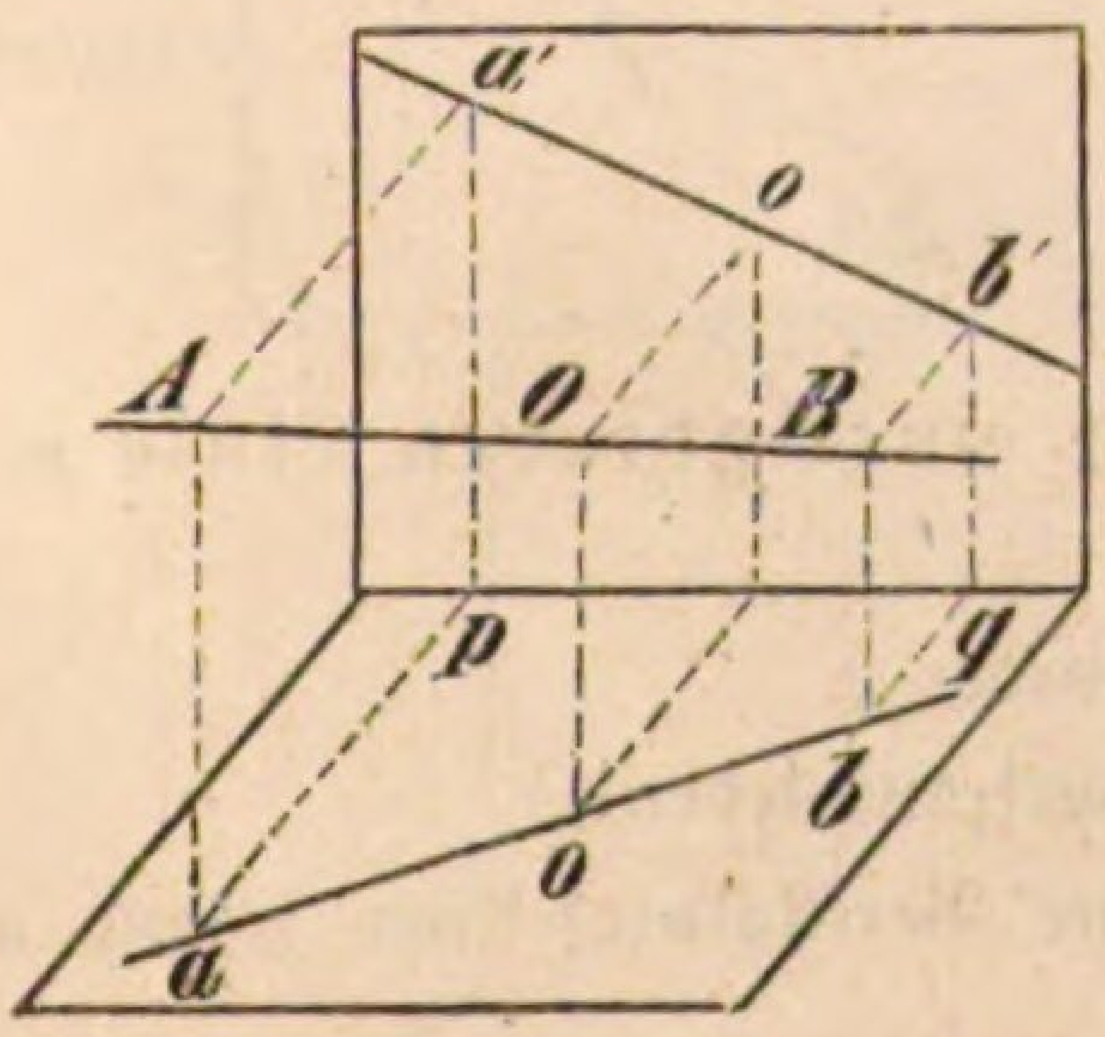
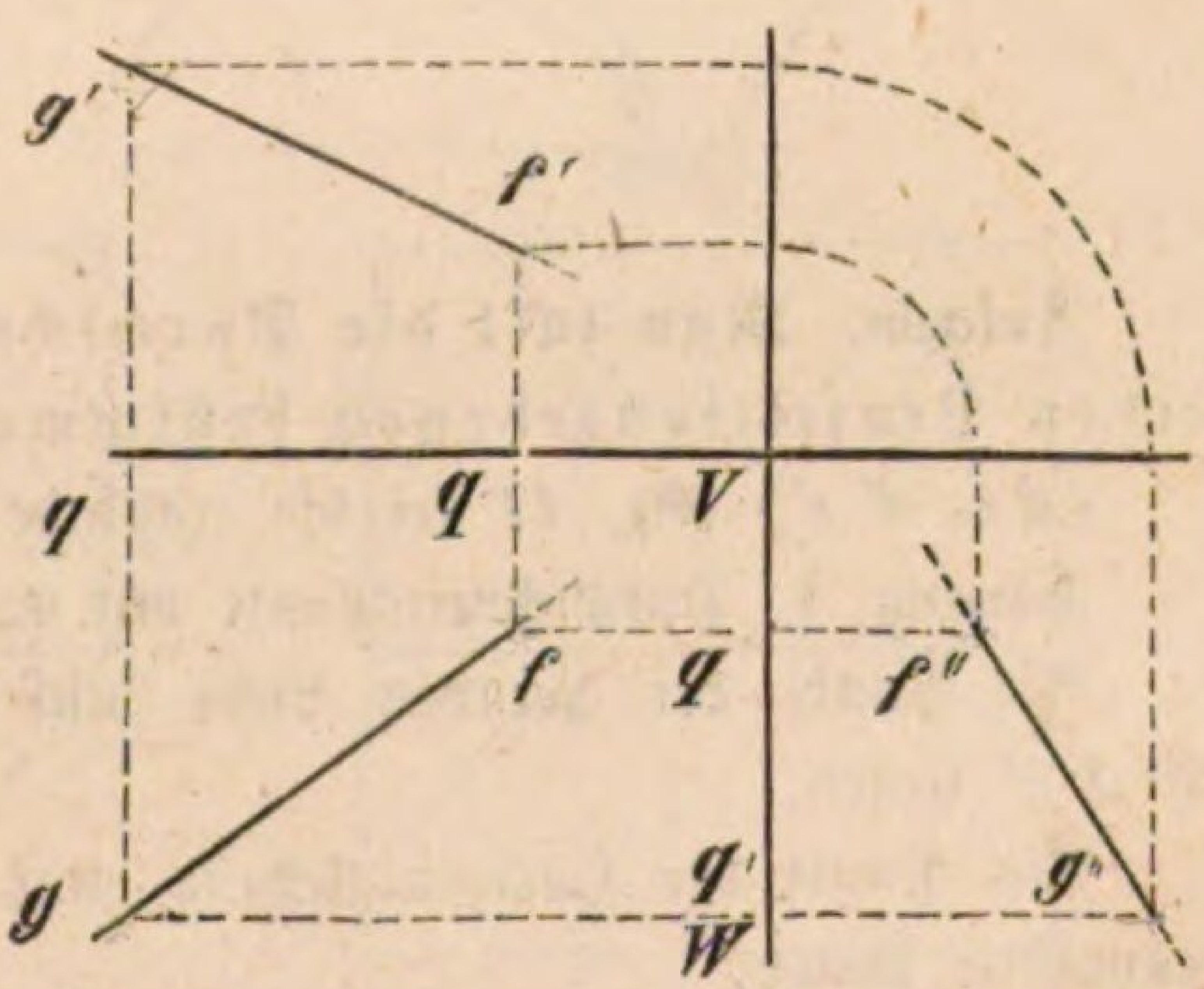


Fig. *9*.



Erläuterung. In Fig. *9* sei f g die Horizontalprojektion einer geraden Linie, f′ g′ ihre Vertikalprojektion, damit f und f′, so wie g und g′ die Projektionen je eines Punktes der Linie seien, müssen sie paarweise senkrecht über einander liegen.

Bei f″ g″ hat man noch eine Vertikalprojektion derselben Linie auf der Ebene V W gezeichnet. Dazu war der Punkt (*f*, *f*′) nach f″ zu projiciren, der Punkt (*g*, *g*′) nach *g*″ (§. 11) und f″ mit g″ durch eine gerade Linie zu verbinden.

Bezeichnung. Eine gerade Linie werden wir nach zwei ihrer Punkte benennen und wir schreiben z. B. in Bezug auf Fig. 9 „Linie $(fg, f'g')$“, was so viel bedeutet, als „Linie, deren Projektionen fg und $f'g'$ sind.“

Durchschnitte einer geraden Linie mit den beiden Projektionsebenen.

13. Eine gerade Linie wird, nach Bedarf verlängert, jede Projektionsebene in einem Punkte durchschneiden, sie müßte denn mit einer oder der andern dieser Ebenen parallel sein.

Aus den Projektionen der Linie diese Durchschnittspunkte ableiten ist eine häufig auftretende Forderung, welche wir in strenger Form behandeln wollen.

Fig. 10.

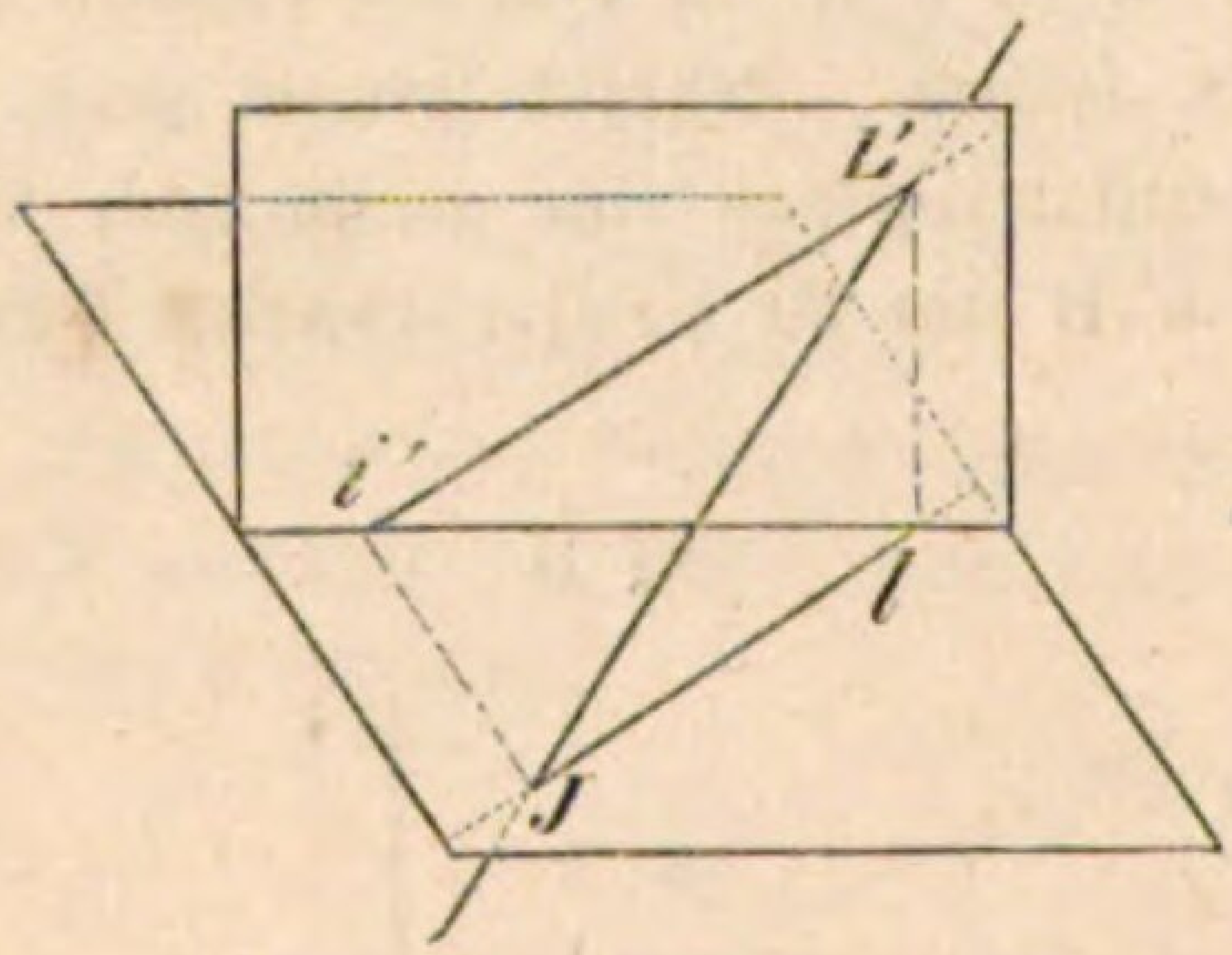
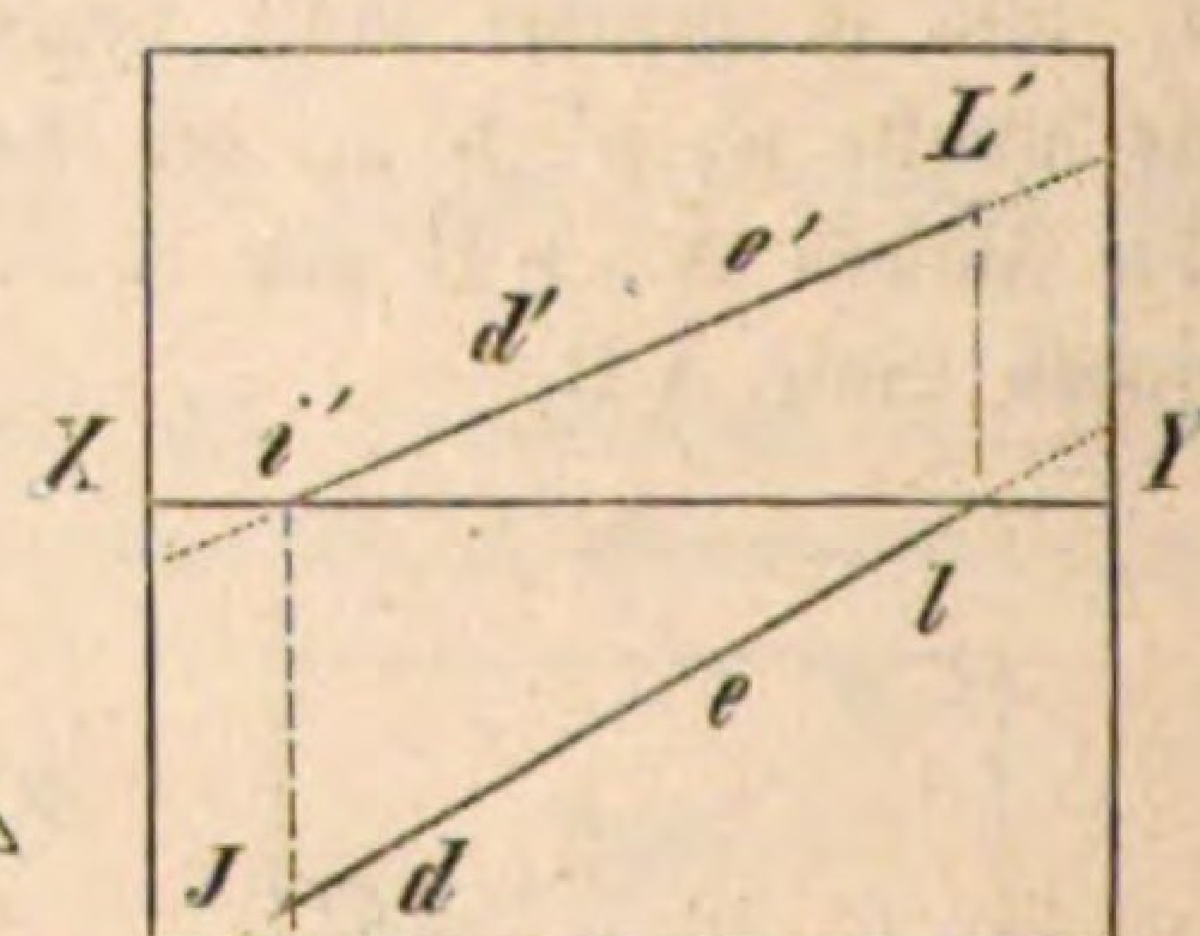


Fig. 11.



Aufgabe. Man soll die Durchschnitte einer geraden Linie mit beiden Projektionsebenen bestimmen.

$(de, d'e')$ Fig. 11 sei die fragliche Gerade.

Lösung. I. Durchschnittspunkt mit der Horizontalebene.

Als Punkt der geraden Linie muß seine Vertikalprojektion irgend wo auf $d'e'$ liegen.

Als Punkt der Horizontalebene muß dieselbe Vertikalprojektion auf der Grundlinie liegen.

Aus beiden Bedingungen folgt, daß die fragliche Vertikalprojektion keine andere sein könne, als der Punkt i', wo $d'e'$ und XY sich schneiden. Aber der gesuchte Punkt muß nothwendig irgend wo in der Projektion de liegen, und da zwei Projektionen eines und desselben Punktes stets auf einer Senkrechten zur Grundlinie zu finden sein müssen, so kann er kein anderer sein als J, wo die Senkrechte $i'J$ und die Projektion de sich schneiden.

II. Durchschnittspunkt mit der Vertikalebene.

Als Punkt der geraden Linie muß seine Horizontalprojektion irgend wo

auf d e liegen, als Punkt in der Vertikalebene muß dieselbe Projektion sich auf der Grundlinie befinden. Sie ist also nothwendig in l, wo d e und X Y sich schneiden. Der Punkt selbst liegt nun senkrecht über oder unter l, er liegt auch in der Projektion d′ e′ und folglich in dem Durchschnitt L′ dieser zwei Linien.

Zur Bezeichnung. Die punktirten Stücke von d e und d′ e′ entsprechen als Projektion solchen Theilen der dargestellten Linie, welche entweder hinter der Vertikalebene liegen oder unterhalb der Horizontalebene. Wären die Gegenstände in Wirklichkeit vorhanden, so könnten jene Linienstücke nicht gesehen werden, die Projektionsebenen müßten denn durchsichtig sein. Eine derartige Unterscheidung der sichtbaren und verdeckten Theile von Linien macht die Darstellung anschaulicher, weshalb sie in künftigen ähnlichen Fällen stets beibehalten werden soll.

Erläuterung. Die in schräger Projektion gezeichnete Fig. *10* ist bestimmt, den Vorgang des Durchschnittes einer geraden Linie mit den Projektionsebenen zu verdeutlichen. Ein Modell nach Anleitung dieser Figur wird beim Unterricht nützliche Dienste thun. Die Projektionsebenen können aus Pappe gefertigt werden und eine Stricknadel mag die Stelle der geraden Linie J L′ vertreten.

Fig. *12*.

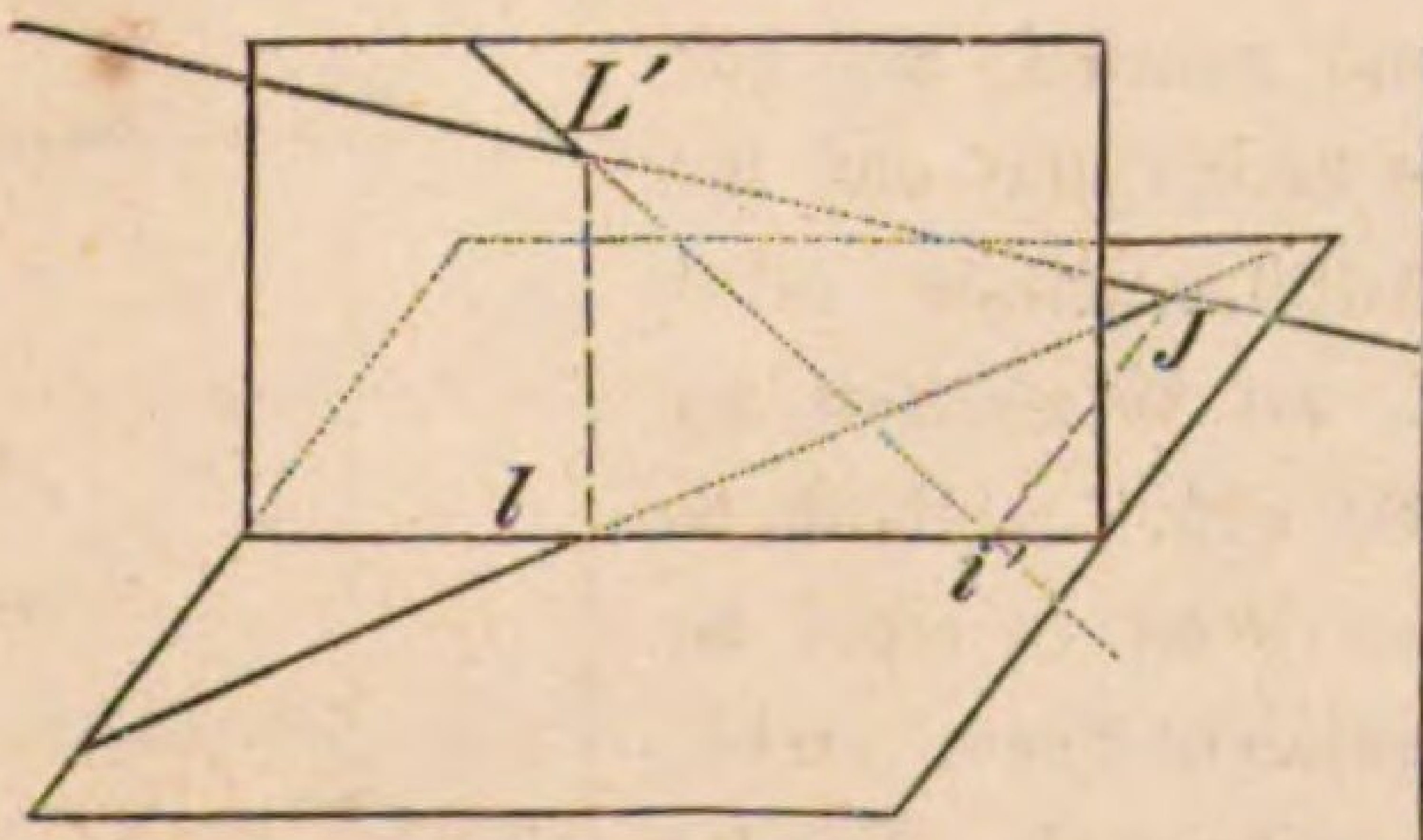
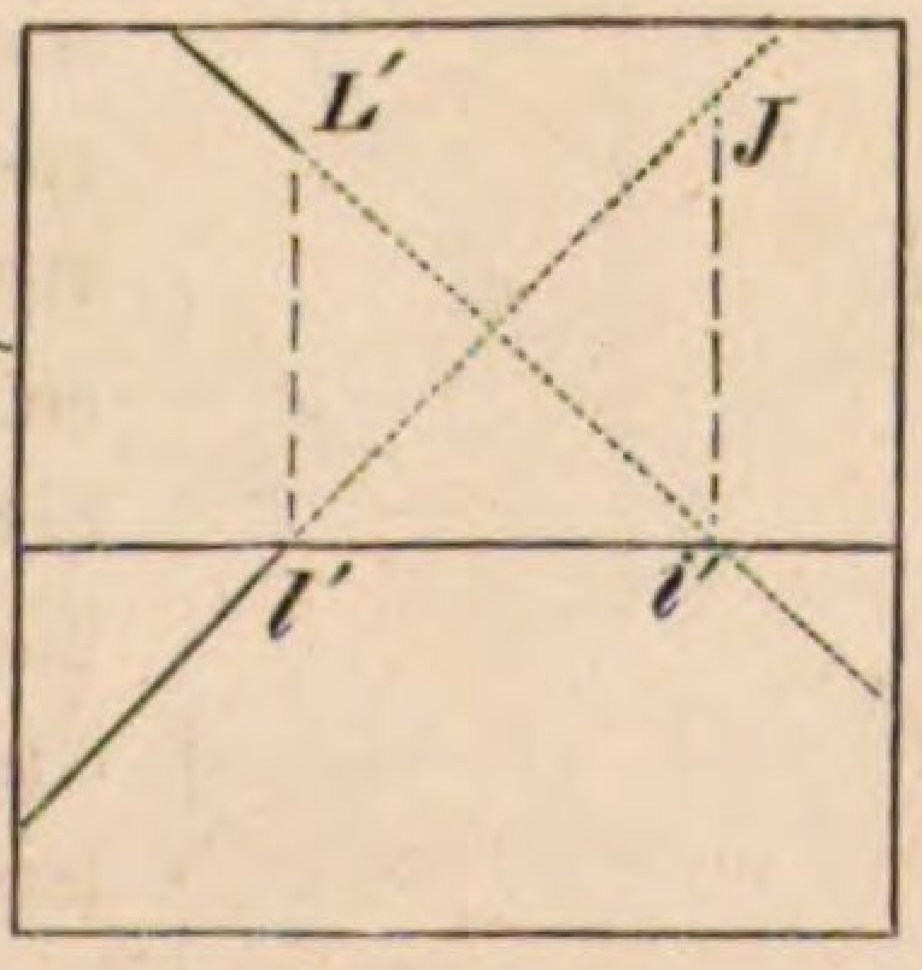


Fig. *13*.



14. Man kehre dies Modell um, die Rückseite der Vertikalebene dem Beschauer zu, dann hat man, wie in Fig. *12*, eine Linie vor Augen, welche die Vertikalebene in deren oberem Theile bei L′ durchschneidet, die Horizontalebene aber in J′ hinter der Vertikalebene.

Fig. *13* zeigt die graphische Ausführung der Projektionen bei solcher Lage der Linie.

Man kehre das Modell so um, daß der seitherige obere Theil der Vertikalebene unten hin kommt, dann wird eine gerade Linie sich zeigen, welche

die Horizontalebene in dem vorderen, die Vertikalebene dagegen in deren unterem Theile durchschneidet.

Fig. 14.

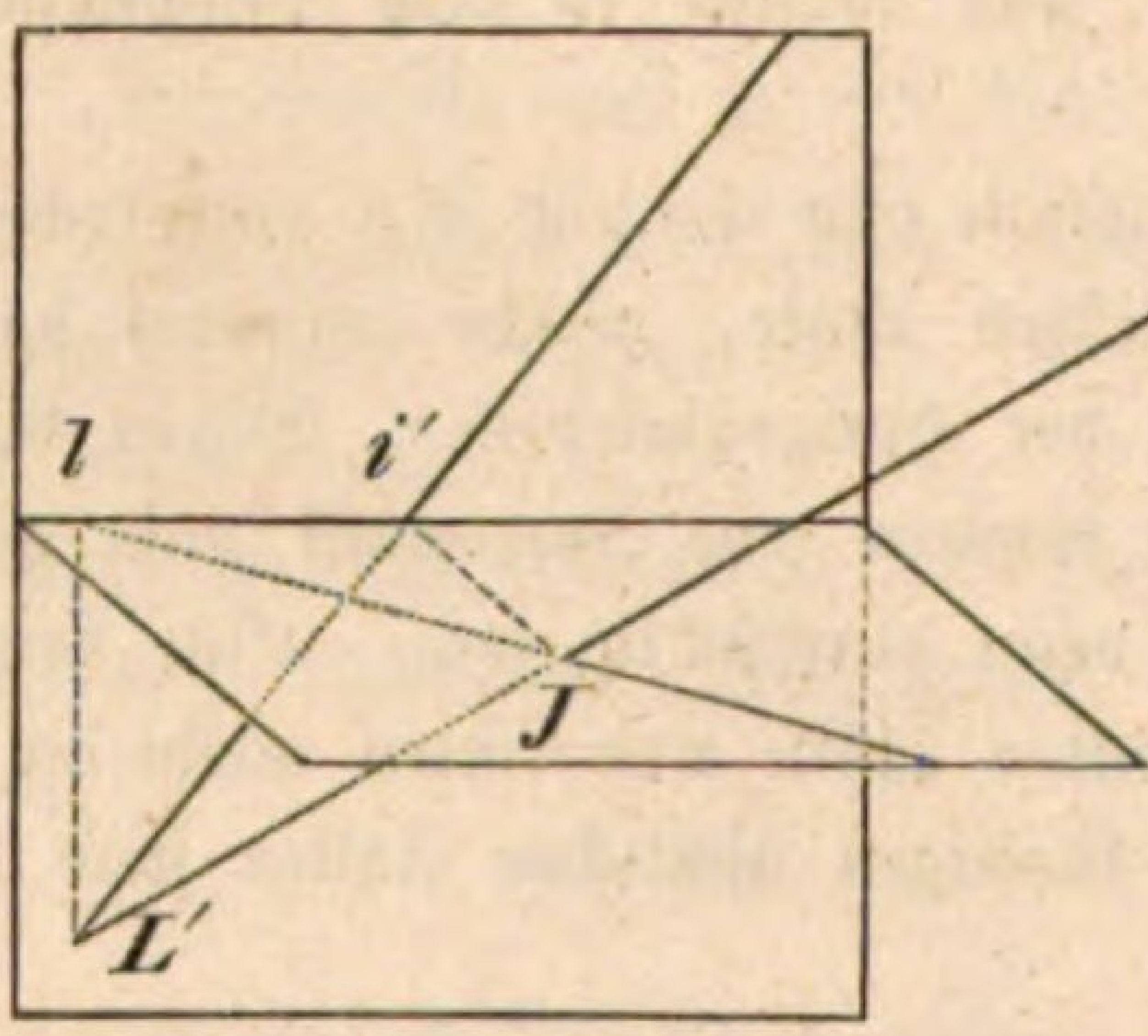
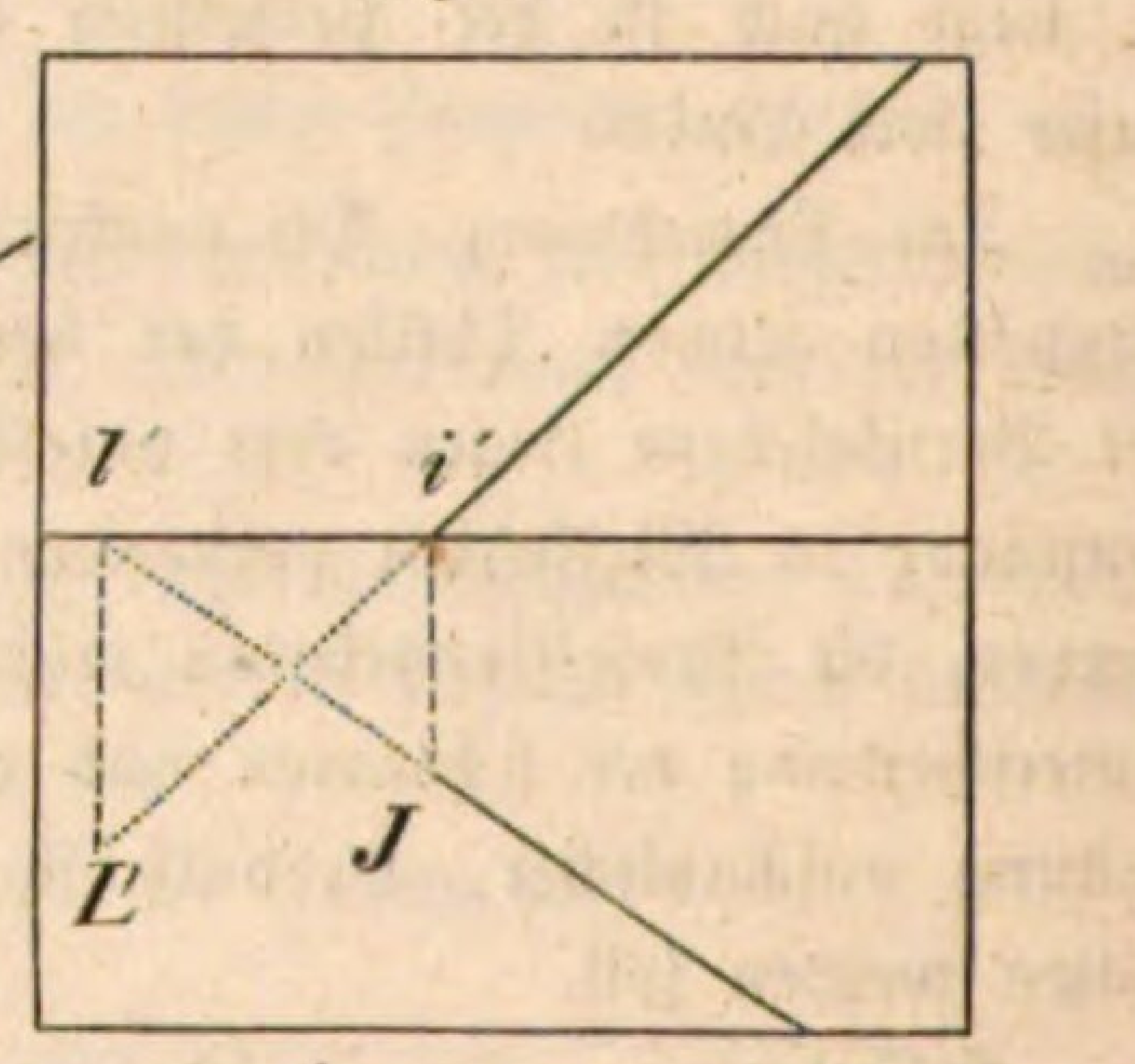


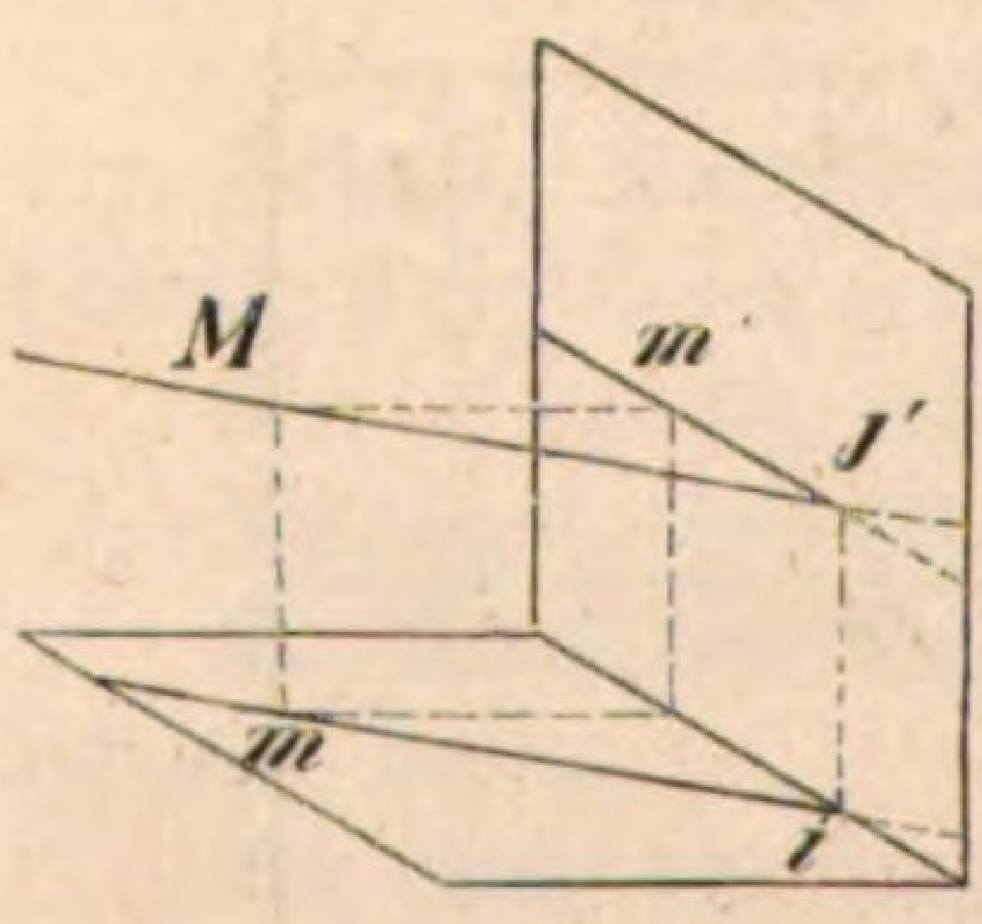
Fig. 15.



Auf diesen Fall beziehen sich die Fig. 14 und 15, deren erstere wiederum in schräger, die zweite in gewöhnlicher oder gerader Projektion gezeichnet ward. Auf beiden sieht man wie vorhin den Durchschnittspunkt der Horizontalebene durch J, jenen mit der Vertikalebene durch L′ bezeichnet.

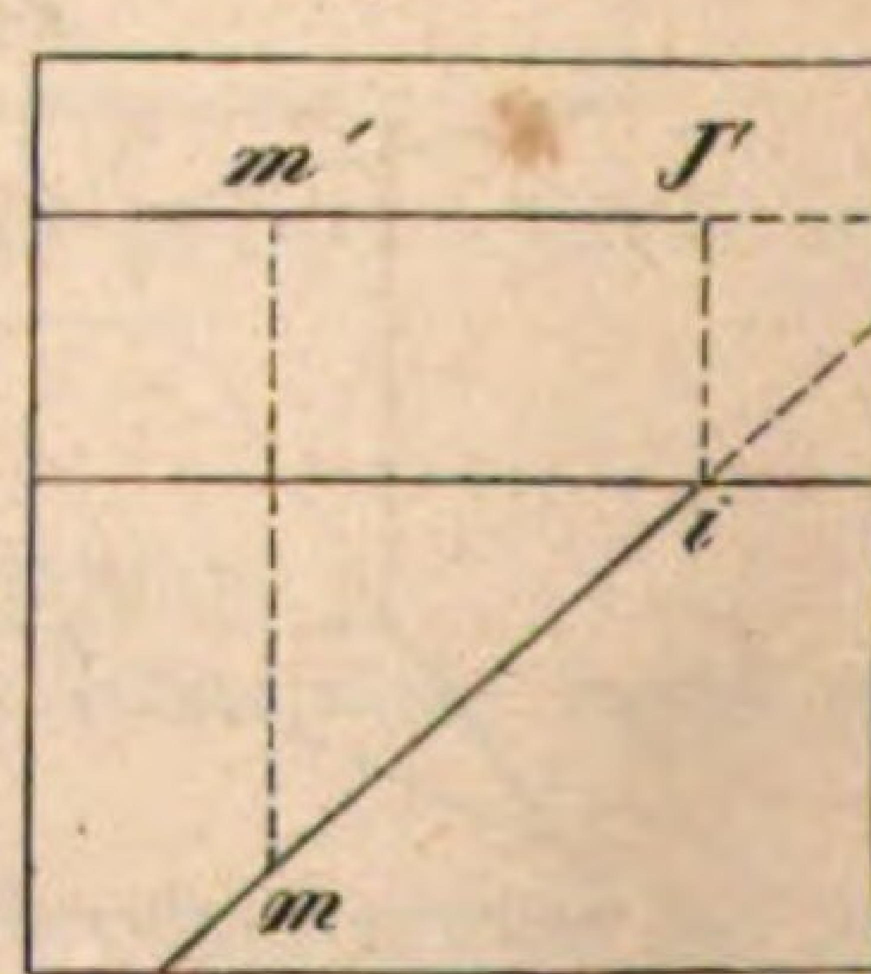
Besonderer Fall. Fig. 16 und 16 a.

Fig. 16.



Die Linie $(mi, m'J')$ ist mit der Horizontalebene parallel, was daraus hervorgeht, daß ihre Vertikalprojektion m′ J′ mit der Grundlinie parallel geht, weshalb die Linie selbst in einer horizontalen Ebene enthalten sein muß. Sie hat somit nur mit der Vertikalebene einen Durchschnittspunkt J.

Fig. 16 a.



Man kehre die Fig. 16 und 16 a um, das Unterste zu oberst, so zeigt sich eine Gerade, welche mit der Vertikalebene parallel geht, und welche die Horizontalebene in J durchschneidet (der Accent bei J müßte jetzt nämlich unterdrückt werden).

Wahre Länge einer geraden Linie, abgeleitet aus ihren Projektionen.

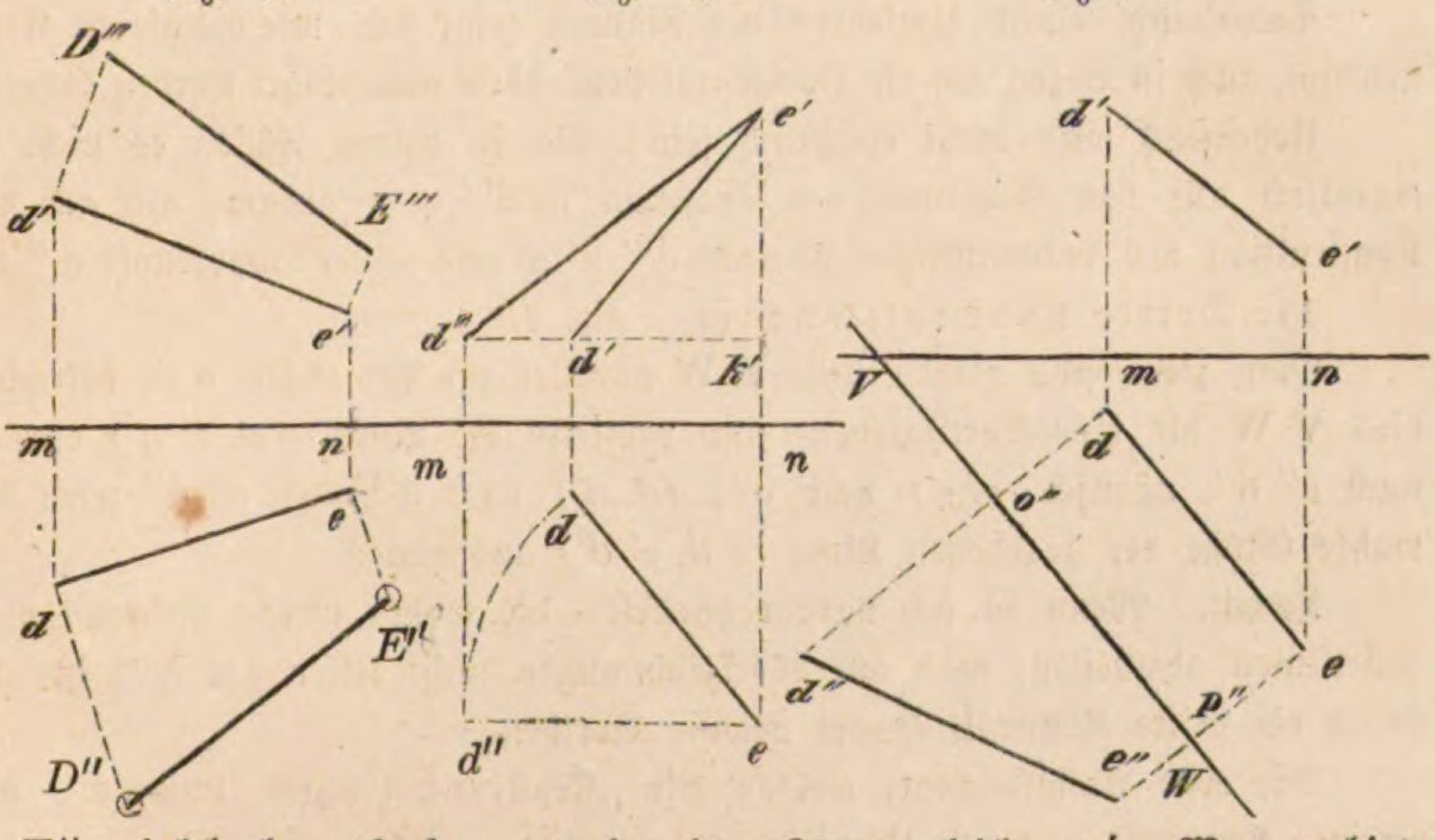
15. Aufgabe. Es sind die Projektionen einer begränzten geraden Linie gegeben, daraus soll ihre Länge gefunden werden.

(d e, d′ e′) sei die gerade Linie; *(d, d′)* und *(e, e′)* seien ihre Endpunkte.

Erste Konstruktion. Fig. *17*.

Man denke sich die gerade Linie im Raume, in Verbindung mit ihrer Horizontalprojektion, dann wird der eine Endpunkt über *d* liegen in einer Höhe gleich *m d′*, der zweite Endpunkt wird über *e* liegen, in einer Höhe gleich *n e′*. Alle vier Linien, nämlich die Projektion *d e*, die beiden Senkrechten an ihren Enden und die gerade Linie im Raume bilden ein Paralleltrapez, welches in vertikaler Ebene liegt. Dies Viereck kann um die Projektion *d e* als um ein Scharnier gedreht und in die Horizontalebene niedergelegt werden, wo es sich dann in seiner wahren Größe zeigen wird. Hierzu errichte man d D″ winkelrecht auf d e und in einer Länge gleich m d′

Fig. *17*. Fig. *18*. Fig. *19*.



e E″ winkelrecht auf d e und in einer Länge gleich n e′. Man verbinde D″ mit E″, so ist das umgelegte Paralleltrapez gezeichnet und D″ E″ wird die wahre Länge von *(d e, d′ e′)* ausdrücken.

Oder zweitens. Man denke sich die gerade Linie im Raume in Verbindung mit ihrer Vertikalprojektion d′ e′ und mit den zwei projicirenden Linien der Endpunkte, wovon die eine an Länge gleich ist der Entfernung m d, die andere gleich n e. Diese vier Linien bilden ein zweites Paralleltrapez, welches bei d′ D‴ E‴ e′ auf die Vertikalebene umgelegt worden; dabei hat die Projektion d′ e′ als Scharnier gedient, d′ D‴ und e′ E‴ stehen rechtwinklich auf d′ e′. Die erstere ist gleich der Länge m d, die zweite gleich der Länge n e. D‴ E‴ giebt abermals die Länge von *(d e, d′ e′)* an.

16. Zweite Konstruktionsart. Fig. *18.*

Man stelle sich vor, das vorhin genannte Paralleltrapez, welches die Linie *(d e, d' e')* mit ihrer Horizontalprojektion d e bildet, werde um die Senkrechte in e als um eine Axe gedreht, bis es zur vertikalen Projektionsebene parallel steht, dann wird es sich auf diese Ebene in wahrer Gestalt und Größe projiciren, und so das Gesuchte zeigen. Bei dieser Drehung blieb der Endpunkt über e unverändert, und der Endpunkt über d behielt seine Höhe bei.

Nachdem daher e d'' gleich e d parallel zur Grundlinie gezogen worden und durch d' eine Wagerechte k' d', projicirte man den Punkt d'' auf diese Wagerechte nach d''' und m d''' e' n war die Projektion des Trapezes in seiner richtigen Größe, deshalb auch e' d''' gleich der wahren Größe von *(de, d'e')*.

Bemerkung. Durch Umkehren der Figuren zeigt sich, wie die gleiche Konstruktion auch in Bezug auf die Horizontalebene hätte ausgeführt werden können.

Uebrigens wird leicht ersichtlich sein, daß in beiden Fällen es nicht so eigentlich auf das Gewinnen des Trapezes m d''' e' n ankam, als auf die Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks d''' k' e' und seiner Hypotenuse d''' e'.

17. Dritte Konstruktionsart. Fig. *19.*

Man ziehe eine gerade Linie V W parallel zur Projektion e d, betrachte dies V W als eine Vertikalebene und projicire die Linie *(e d, e' d')* darauf nach e'' d'', nämlich *(e, e')* nach e''; *(d, d')* nach d'' und e'' d'' wird die wahre Größe der gegebenen Linie *(e d, e' d')* ausdrücken.

Zusatz. Wenn es sich darum handelt, die wahre Größe mehrerer Parallellinien abzuleiten, was auf Werkzeichnungen nicht selten der Fall ist, so bietet die dritte Konstruktionsart gewisse Vortheile.

Die erste Auflösungsart werden wir „Konstruktion durch Umlegen", die zweite „Konstruktion durch Umdrehung" nennen.

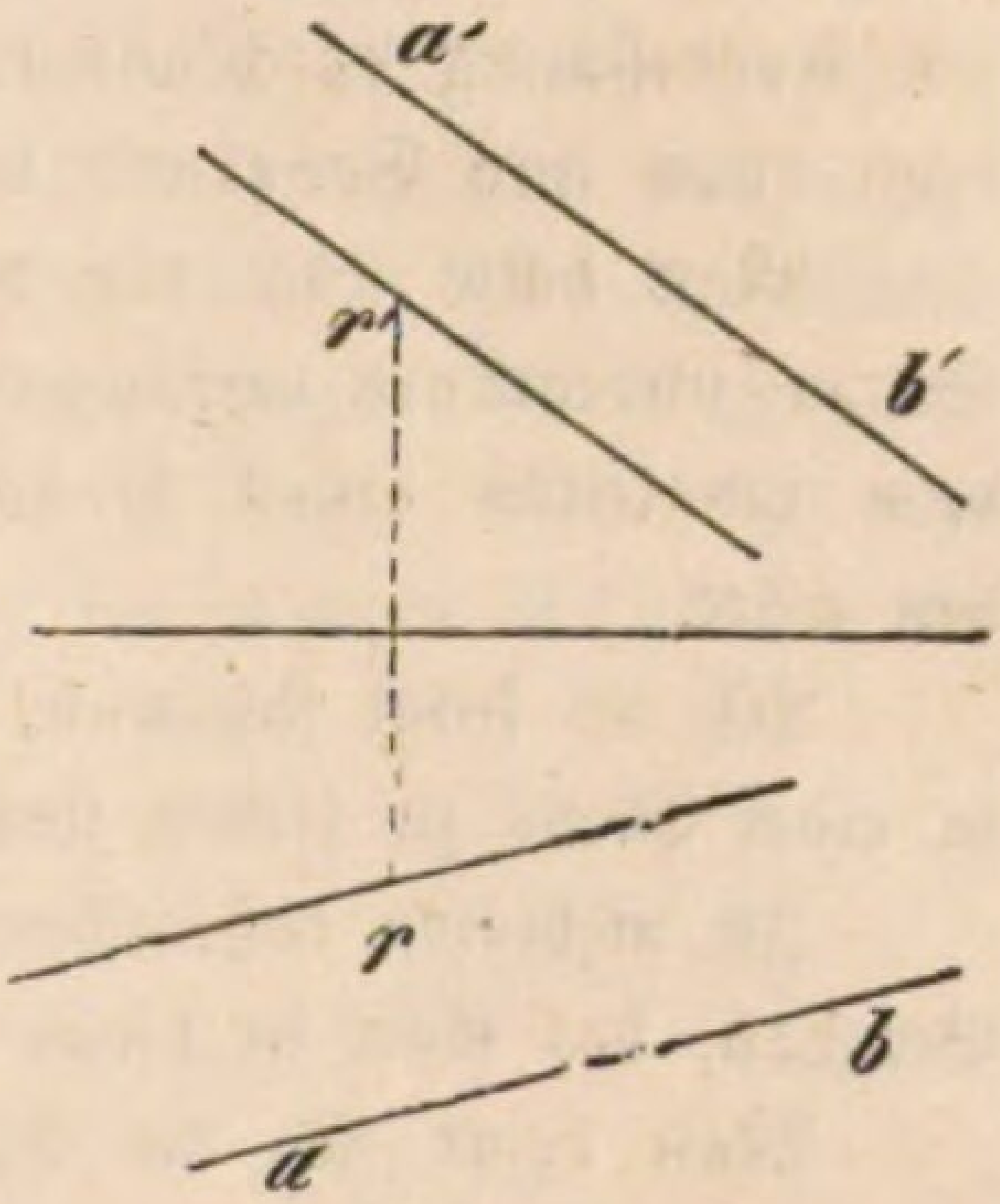
Im Allgemeinen bemerken wir noch, daß die Projektion einer begränzten geraden Linie nie größer sein kann als diese selbst. Beide haben gleiche Länge, wenn die gerade Linie zur Projektionsebene parallel liegt. In allen andern Fällen projicirt die Linie sich um so kleiner, je größer ihr Neigungswinkel gegen die Projektionsebene; die Länge der Projektion wird Null, d. h. sie reducirt sich auf einen Punkt, wenn jener Neigungswinkel ein rechter ist.

Parallellinien.

18. Lehrsatz. Parallele Linien haben auf einer und derselben Ebene parallele Projektionen.

Denn die Projektion einer Linie ist der Durchschnitt ihrer projicirenden Ebene mit der Projektionsebene. Sind aber zwei oder mehrere Linien unter sich parallel, dann müssen nothwendig ihre projicirenden Ebenen auch unter sich parallel sein. Aber die Durchschnitte von zwei oder mehr unter sich parallelen Ebenen durch eine dritte Ebene sind parallele Linien, also sind es auch die genannten Projektionen.

Fig. 20.



Aufgabe. Man soll durch einen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen geraden Linie legen.

$(ab, a'b')$ Fig. 20 sei die gerade Linie, (r, r') der gegebene Punkt.

Konstruktion. Die Horizontalprojektion der gesuchten Linie muß durch r gehen und mit a b parallel sein. Die Vertikalprojektion muß durch r′ gehen und mit a′ b′ parallel sein.

Die ebene Fläche.

19. Obgleich diese Fläche sehr oft, ja in der Regel als eine umgränzte Figur auftritt, muß sie hier doch allgemeiner und darum in unbezeichneter Ausdehnung aufgefaßt werden.

Nun lehrt die Geometrie, daß die Stellung oder Lage einer Ebene bestimmt sei, wenn man drei Punkte in ihr kennt, welche nicht in gerader Linie liegen. Das Verhalten hierbei mag in folgender Art aufgefaßt werden: durch zwei von den drei Punkten sei eine gerade Linie von unbegrenzter Ausdehnung gelegt, und durch diese Gerade nach irgend welcher weiteren Richtung eine Ebene. Diese werde nun um die Gerade als um eine Axe gedreht, bis sie durch den dritten Punkt geht. So wie dies statt findet, ist eine weitere Bewegung der Ebene nicht mehr möglich, sie müßte denn einen der drei Punkte verlassen.

In projektiver Hinsicht ist jedoch das Bestimmen einer Ebene mittelst dreier ihrer Punkte nicht günstig. Zweckmäßiger erweist es sich einen der drei Punkte, mit jedem der beiden andern durch eine gerade Linie von unbegränzter Länge zu verbinden. Diese zwei geraden Linien bestimmen gleichfalls die Lage der Ebene und geben zugleich die Möglichkeit, dieselbe nach allen ihren Richtungen hin ausdehnen und verlängern zu können.

Man fasse die Sache also auf; eine der zwei Linien werde als fest, d. h. in ihrer Lage unveränderlich angenommen, die andere dagegen sei beweglich und gleite längs der ersten so fort, daß sie stets parallel bleibt zu ihrer ursprünglichen Richtung, so kann sie die ebene Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung durchlaufen, oder, wie man geometrisch sich ausdrückt, sie konn durch ihre Bewegung die Ebene erzeugen.

Man hätte auch die drei Punkte zu einem Dreiecke verbinden, dessen Seiten unbegränzt verlängern und alsdann eine davon auf den beiden andern hingleiten lassen können; wodurch die Ebene abermals erzeugt worden wäre.

20. Es fragt sich nun, welche Linien, oder welche Art von Linien, die in einer Ebene zu ziehen sind, empfehlen sich zu deren projektiver Darstellung?

In mehreren technischen Zweigen, namentlich in der Fortifikation und im Bergbau, hat man in dieser Hinsicht seit Langem Folgendes im Gebrauche.

Man denkt sich die Ebene bis zur horizontalen Projektionsebene verlängert, giebt den beiderseitigen Durchschnitt dieser Flächen an und nennt denselben, oder vielmehr den Winkel, welchen der horizontale Schnitt mit der Richtung der Magnetnadel macht, „das Streichen der Ebene.“ Man denkt sich ferner in der Ebene eine andere gerade Linie, welche auf der Richtung des Streichens rechtwinklig steht, und giebt den Winkel an, welchen diese Linie mit ihrer eigenen Horizontalprojektion macht. Solcher Winkel heißt „das Fallen der Ebene.“ Diese wird also bestimmt durch Angabe ihres Streichens und Fallens.

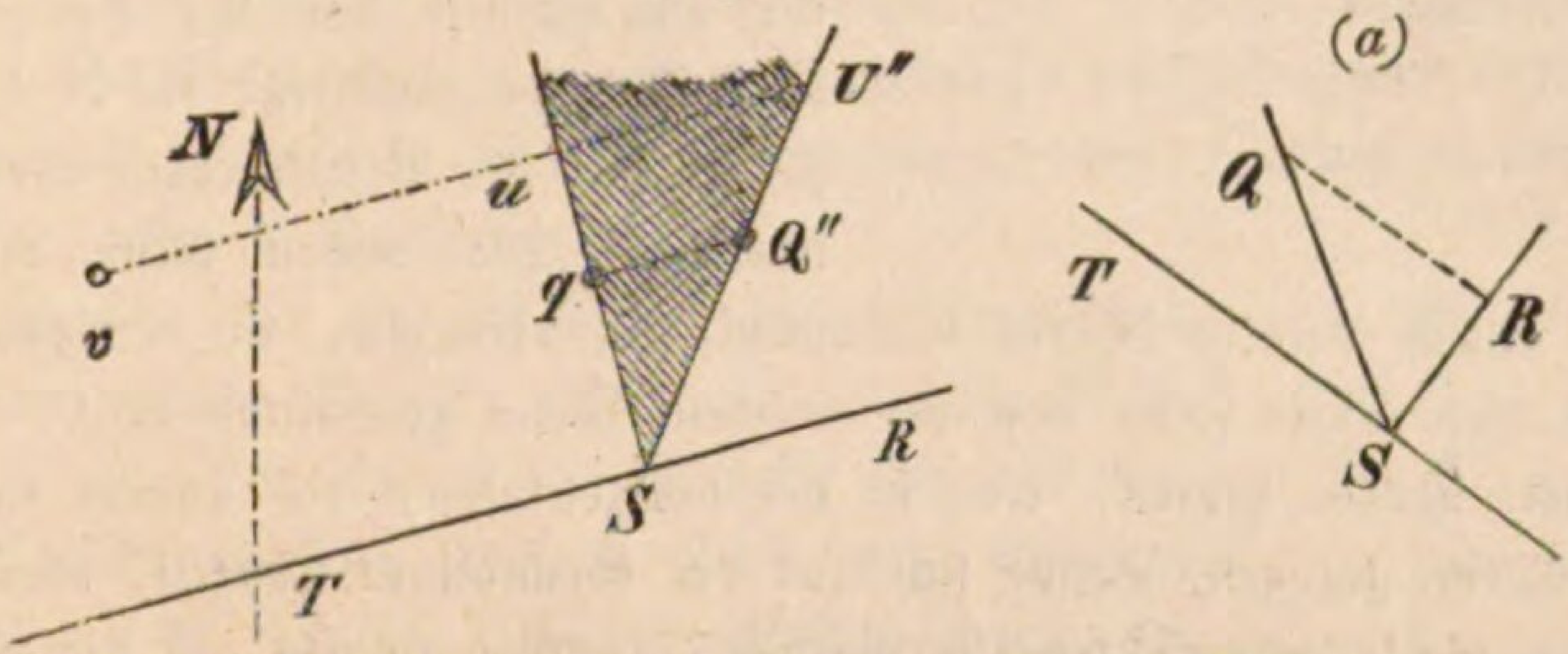
Die Fig. *21* stelle eine horizontale Projektion dar.

Man denke sich eine schief geneigte Ebene, welche die Horizontalebene nach der Linie T R durchschneidet, und von da nach oben ansteigt. T N sei die Richtung der Magnetnadel und N T R wird „das Streichen der Ebene“ angeben. Dieser Winkel ist übrigens für alles Folgende von keinem weiteren Belang. Durch einen beliebigen Punkt auf T R durch S z. B. denke man sich in der schiefen Ebene eine Linie gezogen, welche auf T R rechtwinklig steht, deren Projektion S q also gleichfalls auf R T rechtwinklig stehen muß. Der Winkel, welchen diese genannte Linie mit ihrer Projektion bildet, ist zugleich der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die Horizontalebene, oder auch das „Fallen“ der schiefen Ebene. Die vertikalstehende Fläche, worin dieser Winkel liegt, ist um die Projektion S q als Scharnier gedreht und in die Projektionsebene niedergelegt worden, wodurch der Neigungswinkel nach q S Q″ zu liegen kam. Q″ q steht rechtwinklig auf S q; wird

nun die Winkelebene wieder aufgerichtet, so kommt Q″ senkrecht über q zu stehen und dies in einer Höhe, welche gleich ist der Linie q Q″.

Es sei v die Projektion eines Punktes in der schiefen Ebene, welcher mit V bezeichnet werden soll, und es fragt sich, welche Höhe über der Projektionsebene dies V haben müsse. Zur Beantwortung denke man durch V eine Parallele mit T R gezogen; diese wird ganz in der schiefen Ebene liegen und ihre Projektion v u wird parallel sein mit T R. Derjenige Punkt der gedachten Parallelen, welcher sich in den Kreuzungspunkt u projicirt, kommt durch Umlegen der Winkelebene nach U″ zu liegen, wo S Q″ und v u sich schneiden. Nun giebt u U″ die Höhe der ganzen Parallelen an, also auch des Punktes auf ihr, dessen Projektion v ist.

Fig. 21.



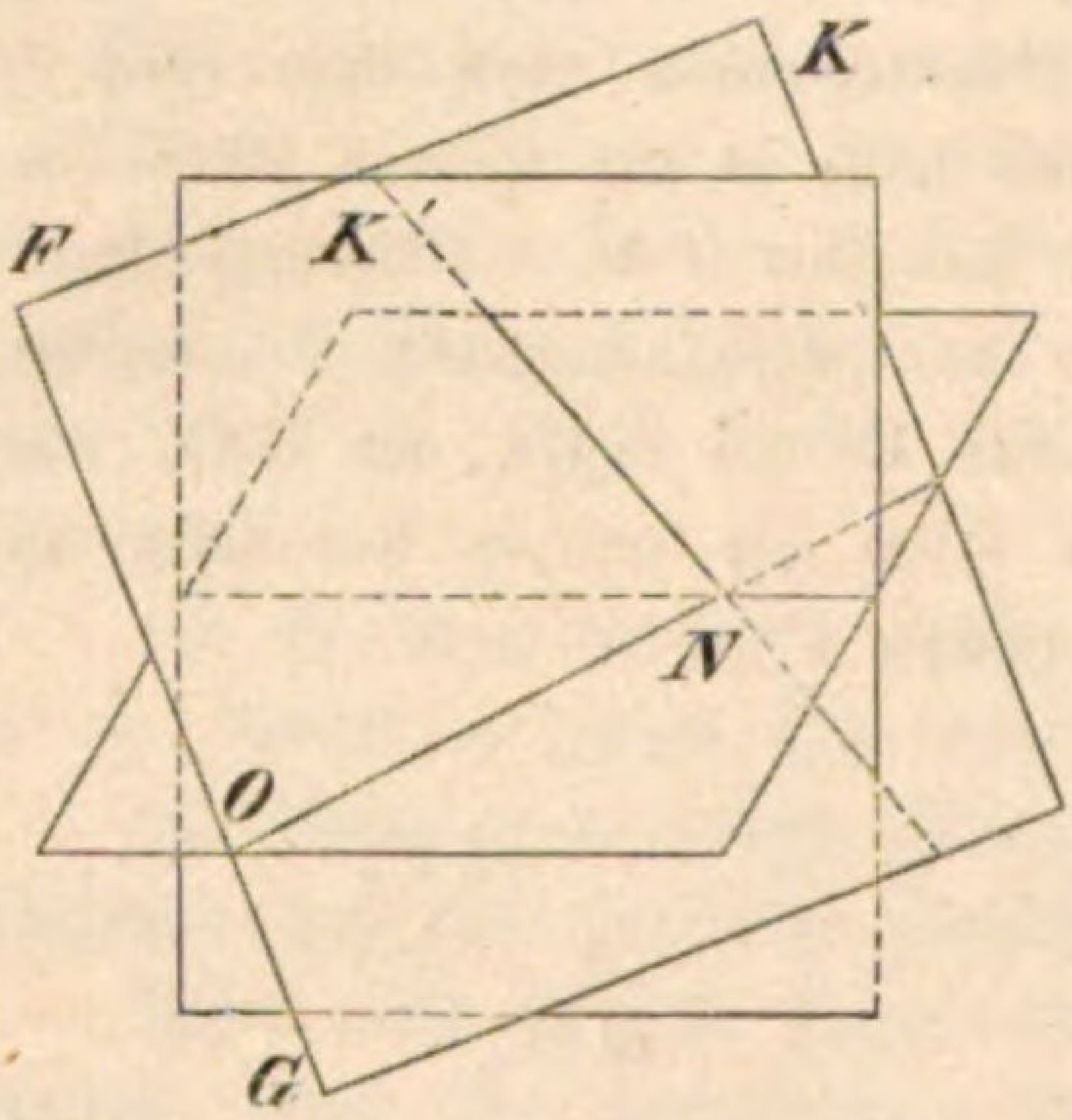
Man ersieht aus der ganzen Darstellung, wie, Fig. (a), durch die Angabe des Durchschnittes T R einer schiefen Ebene mit der Projektionsebene, so wie ihres beiderseitigen Neigungswinkels Q S R die wahre Lage eines jeden Punktes der Ebene zu bestimmen ist, dessen Projektion, wie vorhin v, gegeben wird. Ist aber dies der Fall, so können auch alle weiteren in Bezug auf die schiefe Ebene vorgelegten geometrischen Aufgaben vermittelst der Projektionen gelöst werden.

21. Demungeachtet wird die vorgetragene Bestimmungsweise einer Ebene in der darstellenden Geometrie im Allgemeinen nicht angewendet, weil man es für unpassend gefunden hat, zwei ungleichartige Dinge wie Durchschnitt mit der Horizontalebene und Neigungswinkel hierzu anzuwenden. Die horizontale Projektionsebene hat erstlich vor der vertikalen keinen Vorzug, auch haben wir wiederholt darauf aufmerksam gemacht, wie durch eine Viertelswendung die eine mit der andern vertauscht werden könne, und zwar unbeschadet der ausgeführten oder auszuführenden Konstruktionen.

Eine schiefe Ebene, d. h. eine Ebene, welche weder horizontal noch

vertikal ist, wird auch beide Projektionsebenen durchschneiden, die horizontale sowohl wie die vertikale. Vermittelst solcher zwei Durchschnittslinien werden wir die Lage einer Ebene festsetzen, und weil es gut ist, Dingen, welche oft vorkommen, eigene Namen zu geben, so nennen wir dieselben „Risse" (traces) der Ebene, und zwar „Horizontalriß" den Durchschnitt einer schiefen Ebene mit der Horizontalebene; „Vertikalriß" den Durchschnitt derselben mit der Vertikalebene.

Fig. 22.



In Fig. 22 sei G F K nach schräger Projektion eine schiefe Ebene, O N ihr Durchschnitt mit der Horizontalebene oder ihr Horizontalriß; K' N ihr Durchschnitt mit der Vertikalebene oder ihr Vertikalriß. Die beiden Risse müssen sich stets in einem Punkte N der Grundlinie durchkreuzen, in demjenigen nämlich, wo diese Linie selbst von der schiefen Ebene geschnitten wird.

Zwei gerade Linien, eine in der horizontalen, die andere in der vertikalen Ebene gezogen, welche sich auf der Grundlinie kreuzen, oder bei hinreichender Verlängerung kreuzen würden, können immer als die Risse einer Ebene genommen werden, welchen Winkel sie mit der Grundlinie auch bilden.

Fig. 23.

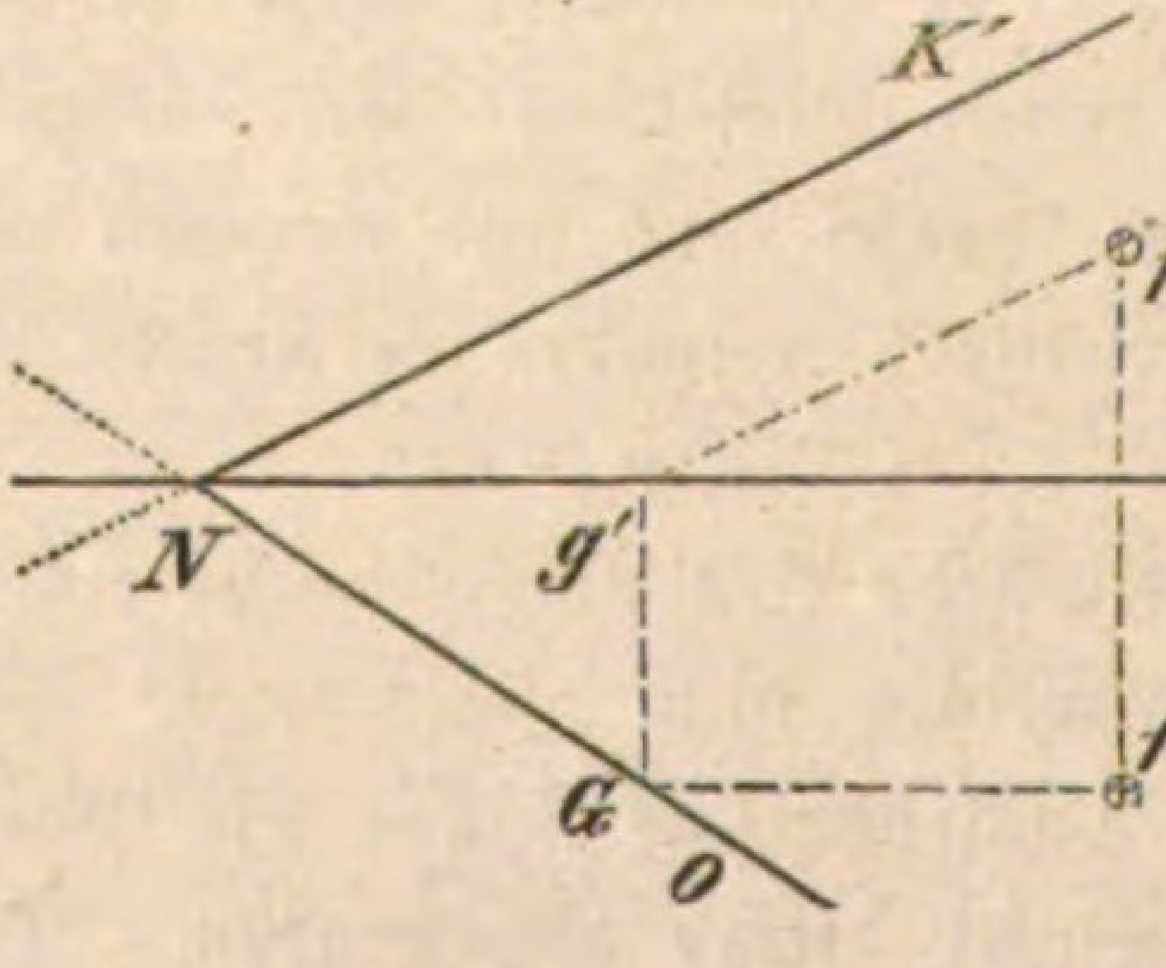
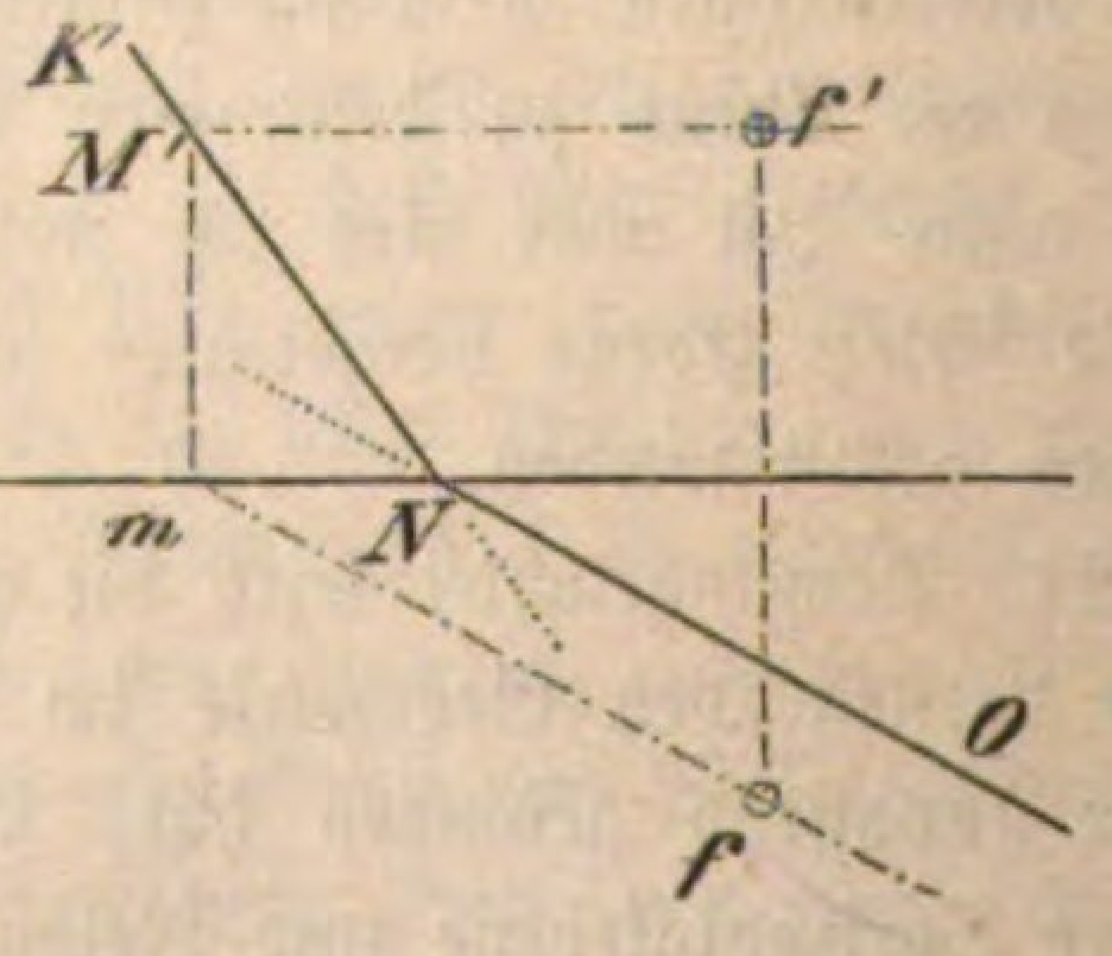


Fig. 24.



22. In Fig. 23 und 24 seien N O der Horizontalriß, N K' der Vertikalriß zu einer schiefen Ebene und f' die Vertikalprojektion eines Punktes der Ebene: es soll dessen Horizontalprojektion f bestimmt werden.

Fig. 23. Man dachte sich, durch den Punkt der schiefen Ebene gehe eine Parallele mit deren Vertikalriß, also eine Linie, welche ganz in der Ebene

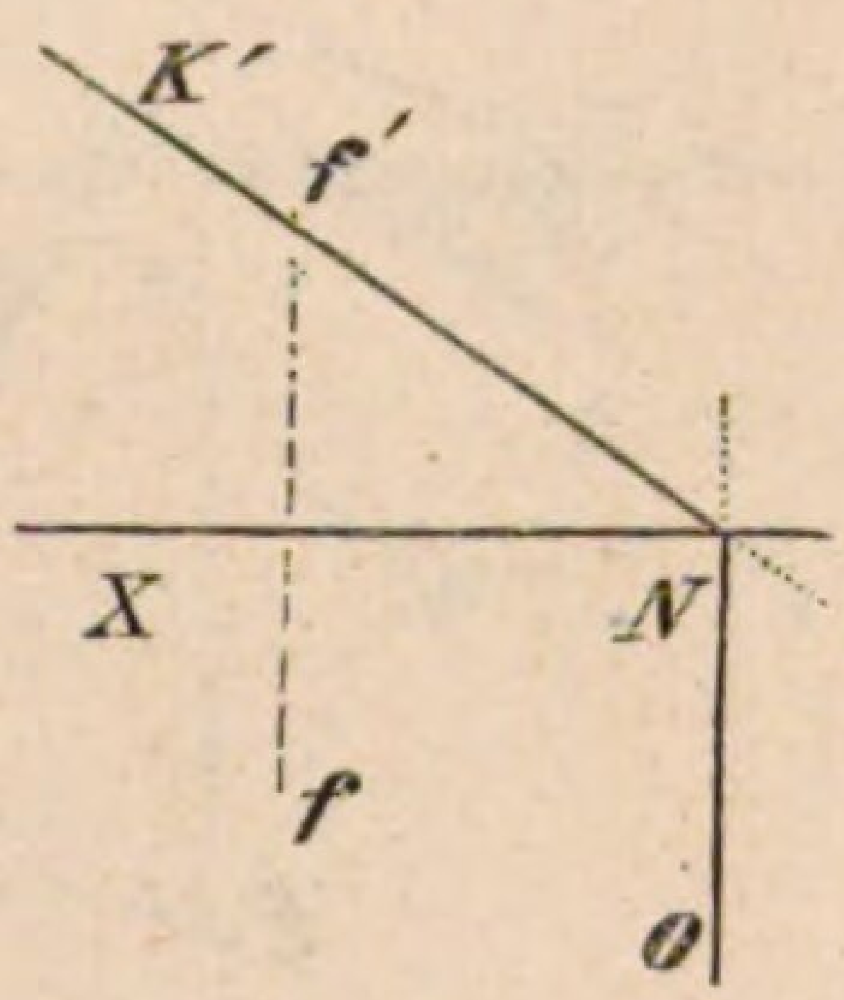
liegen muß. Die Vertikalprojektion f′g′ dieser Parallelen wird durch f′ gehen und mit N K′ parallel sein. Die Parallele kann die Horizontalebene nur in einem Punkte des Risses N O durchschneiden und dieser ist gefunden, wenn man g′ auf die Gerade N O nach G projicirt. Nun aber wird eine Parallele mit dem Vertikalriß auch parallel sein mit der vertikalen Projektionsebene und ihre Horizontalprojektion kann keine andere sein, als die Parallele zur Grundlinie, welche durch G geht. Auf dieser und senkrecht unter f′ muß f liegen.

Fig. *24*. Hier dachte man sich durch den Punkt der schiefen Ebene eine Parallele zu deren Horizontalriß, also eine wagerechte Linie, welche wiederum ganz der Ebene angehört. Ihre Vertikalprojektion geht durch f′ und ist parallel zur Grundlinie, sie trifft die Vertikalebene in M′ auf dem Risse N K′. M′ projicirt sich nach m. m f gleichlaufend mit N O ist die Horizontalprojektion der Parallelen und in ihr liegt f wiederum senkrecht unter oder über f′.

Zusatz I. Unschwer wird man entnehmen, wie f′ hätte abgeleitet werden müssen, wäre f gegeben gewesen.

Zusatz II. In Fig. *25* bildet der Horizontalriß O N einen rechten Winkel mit der Grundlinie N X. Dies zeigt an, daß die Ebene O N K′ auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehe und daß der Vertikalriß N K zugleich die Vertikalprojektion der ganzen Ebene sei. Ist daher die Horizontalprojektion f eines Punktes der Ebene angenommen, so liegt dessen Vertikalprojektion f′ auf N K′. Wäre aber f′ ursprünglich gegeben, so würde dadurch f nicht bestimmt sein; es könnte überall auf der Senkrechten f′ f angenommen werden.

Fig. *25*.



Der Grund hiervon liegt in folgenden Verhältnissen: ist eine Ebene angenommen oder gegeben vermittelst ihrer Risse, ferner die Projektion eines Punktes in der Ebene, so liegt der Punkt selbst da, wo seine projicirende Linie die Ebene durchschneidet. In Fig. *25* aber liegt die projicirende Linie von f′ selbst in der Ebene O N K′, kann also in ihr nichts weiter bestimmen.

Ein Umkehren der Fig. *25* wird zeigen, wie all diese Beziehungen auch stattfinden bei Ebenen, welche auf der Horizontalebene senkrecht stehen.

Zusatz III. Daß vorhin zur Bestimmung der Projektionen eines Punktes Hülfslinien angenommen wurden, welche einem oder dem andern Risse der Ebene parallel lagen, geschah um der praktischen Einfachheit willen. In

gewissen Fällen dagegen wird man Linien von anderer Richtung wählen, wie wir alsobald Gelegenheit finden werden dies näher zu zeigen.

23. Aufgabe. Es sind drei Punkte gegeben, man soll die Risse der Ebene bestimmen, welche durch diese Punkte gelegt wird.

(f, f'), *(g, g')* und *(h, h')* Fig. *26* seien die drei Punkte.

Man legt durch je zwei derselben eine gerade Linie. Man bestimmt die Punkte J', K', L', wo die drei Linien die Vertikalebene durchschneiden (§. 13). Diese Punkte gehören dem gesuchten Vertikalrisse J' Z an.

Man bestimmt desgleichen die Punkte O, P, Q, wo die drei Linien die Horizontalebene durchschneiden, sie liegen auf dem gesuchten Horizontalrisse Q Z

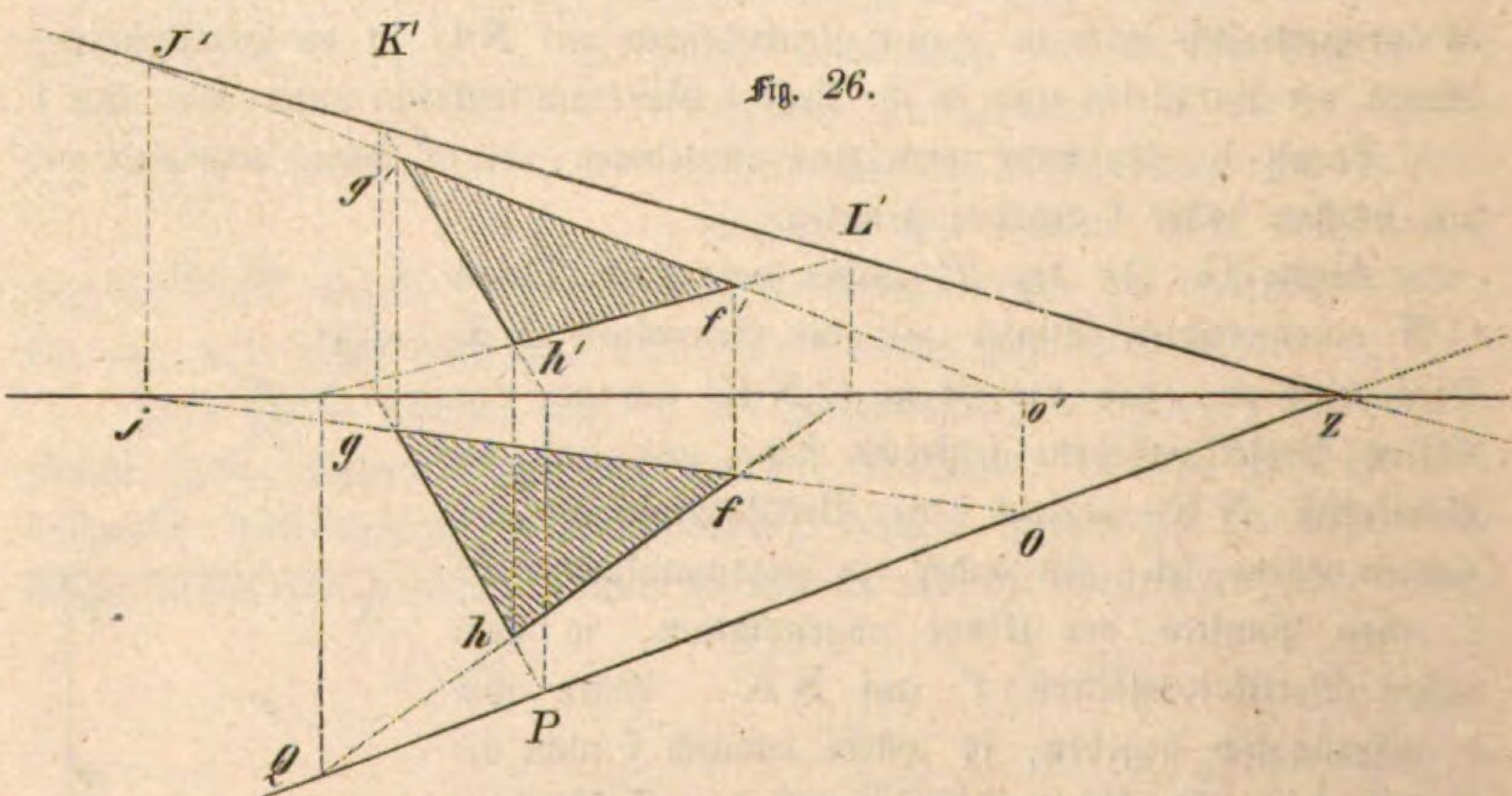


Fig. 26.

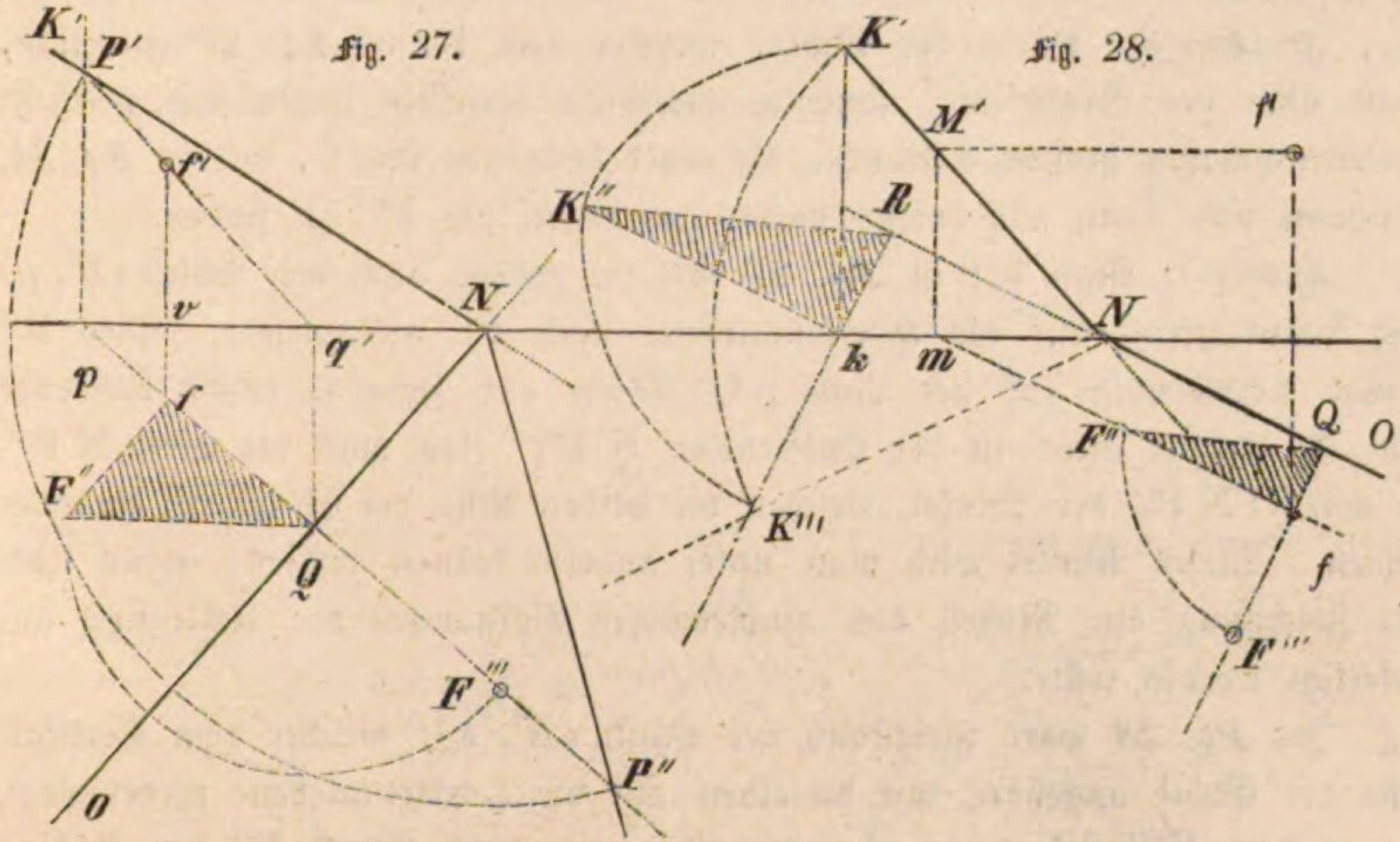
Zusatz I. Die Konstruktion liefert, wie man sieht, eine doppelte Probe für die Genauigkeit der Ausführung.

Zusatz II. Man sieht auch, wie zu verfahren gewesen, wenn die Risse der Ebene nebst einer Projektion des in ihr liegenden Dreieckes gegeben und die andere Projektion abzuleiten gewesen wäre.

24. Aufgabe. Es ist eine Ebene bestimmt mittelst ihrer Risse, und in derselben ein Punkt vermittelst seiner Projektionen. Die Ebene soll um einen der Risse als Scharnier gedreht, in die entsprechende Projektionsebene niedergelegt und nach geschehener Umlegung der Ort des gegebenen Punktes bestimmt werden.

N O, N K′, Fig. 27 und 28, seien die Risse der Ebene, f die Horizontalprojektion des Punktes, welcher in und mit ihr in die Horizontalebene niedergelegt werden soll.

Wenn eine Ebene sich um eine gerade Linie in ihr als um ein Scharnier oder eine Axe dreht, so beschreibt während der Bewegung ein jeder Punkt der Ebene, welcher nicht in der Axe liegt, einen Kreis oder Kreisbogen, dessen Ebene auf der Axe rechtwinklig steht, und dessen Halbmesser gleich ist der Entfernung des Punktes von der Axe. In den Fig. 27 und 28 soll der Horizontalriß N O als Drehungsaxe dienen, daher wird der Punkt, dessen Projektion f, während des Umlegens einen Kreisbogen beschreiben, dessen



Ebene auf N O senkrecht, also vertikal steht. Diese vertikale Ebene wird sich als eine durch f gehende, und auf N O rechtwinklig stehende gerade Linie f Q P″ projiciren; Q ist das Centrum des beschriebenen Kreisbogens.

Die vertikale Ebene Q f p und die schiefe Ebene O N K′ durchschneiden sich nach einer Geraden, welche P′ q′ als Vertikalprojektion hat; auf diesem P′ q′ muß die Vertikalprojektion f′ liegen. War f′ bestimmt, erübrigte nur noch die wahre Größe von (f Q, f′ q′) als dem Radius des von (f, f′) beschriebenen Kreisbogens, um denselben von Q nach F‴ zu tragen, womit der Ort des Punktes nach geschehener Umlegung festgesetzt war. Die wahre Größe von (f Q, f′ q′) aber erhielt man nach §. 15 als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks Q f F″, in welchem die Seite f F″ gleich ist der Höhe v f′.

Wesentliche Bemerkung. Man hat in unserer Figur noch aus dem Centrum Q den Kreisbogen F″ F‴ gezeichnet, nicht als reines Sinnbild dafür, daß Q F‴ = Q F″, wie solches etwa bei Konstruktionen der ebenen Geometrie üblich; vielmehr veranschaulicht die Linie p P″, das Dreieck und der Kreisbogen den ganzen geometrischen Vorgang, welcher während des Umlegens in der Ebene p f P″ statt gehabt, es ist selbst wieder die Umlegung dieser Ebene mit allen in ihr vorhandenen oder gedachten Linien.

Ueberhaupt gehört es zur Methode der darstellenden Geometrie, Ergebnisse, welche durch die Bewegung irgend welcher Punkte oder Linien hervorgebracht sind, als solche aufzufassen und vermittelst der Projektionen wieder zu geben.

In Fig. *28* würde der Punkt, welcher dem P′ in Fig. *27* entspricht, nicht über der Grundlinie, sondern unterhalb derselben liegen und zwar in verhältnißmäßig großem Abstande. Es ward deswegen hier f′, wie in Fig. *24*, bestimmt und dann wie vorhin weiter gearbeitet, um F‴ zu finden.

Zusatz I. Man hat in Fig. *27* mit der Ebene auch den Punkt *(P′, p)* des Vertikalrisses auf die Horizontalebene nach P″ niedergelegt. Dies P″ mußte nothwendig auf der Linie p Q liegen und zwar in einem Abstande von N, welcher gleich ist der Entfernung N P′. Zog man die Linie N P″, so war O N P″ der Winkel, welchen die beiden Risse der Ebene mit einander bilden. Diesen Winkel wird man unter anderm kennen müssen, wenn nach der Zeichnung ein Modell des geometrischen Vorganges der Umlegung angefertigt werden sollte.

In Fig. *28* ward gleichfalls der Punkt *(K′, k)*, welcher dem Vertikalrisse der Ebene angehört, mit derselben auf die Horizontalebene niedergelegt, wo er nach K‴ fiel; dazu war es nöthig, wie beim Punkt F″ den Radius R K″ des von *(k, K′)* bei seiner Drehung beschriebenen Kreisbogens zu bestimmen. Der umgelegte Vertikalriß NK‴ wurde als nicht sichtbar punktirt.

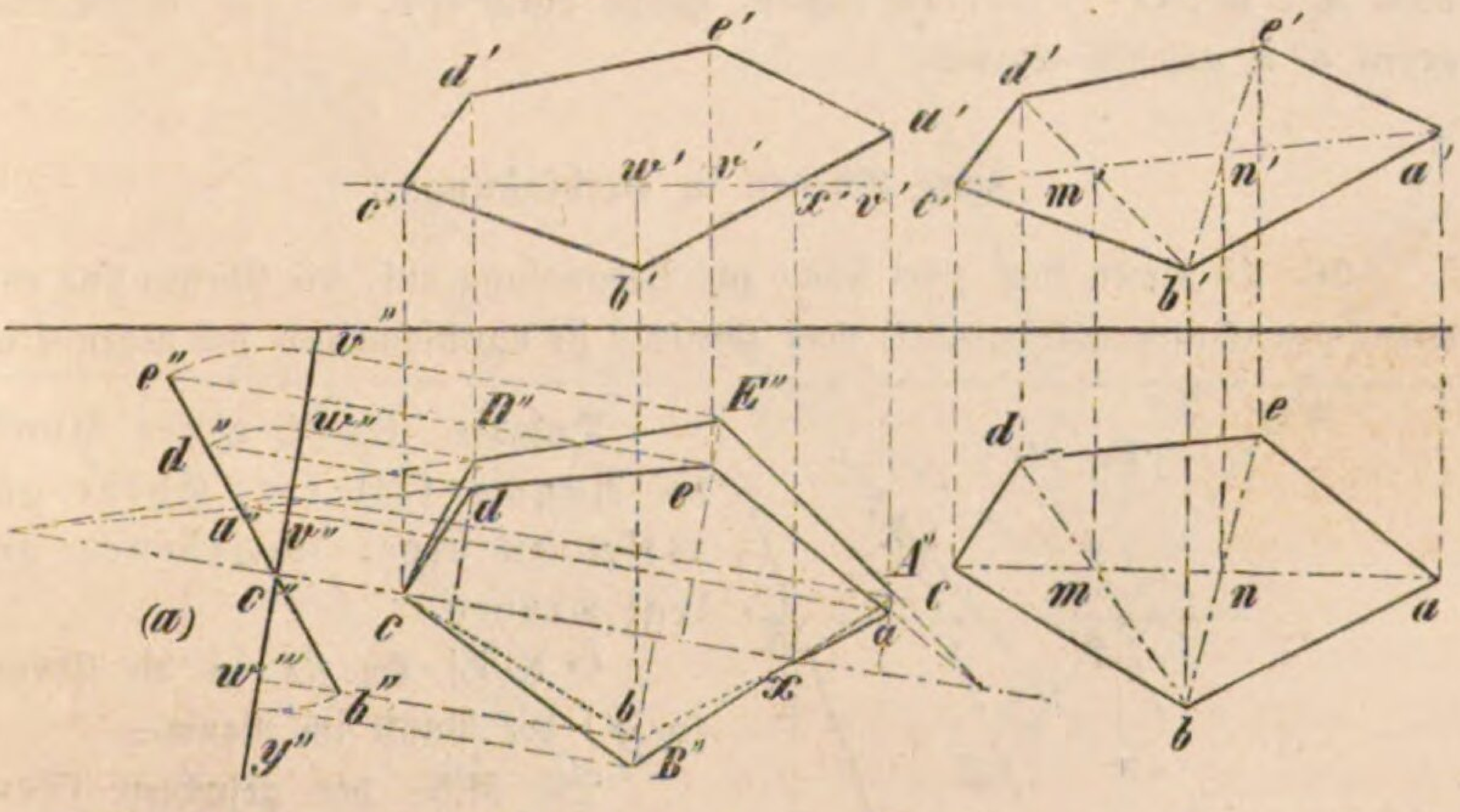
Zusatz II. Der Winkel F″ Q f in Fig. *27* und *28* und auch K″ R k in letzterer Figur ist gleich demjenigen, welchen die vorgelegte Ebene mit der Horizontalebene bildet. Vergl. §. 20, Fig. *21*. Man entnimmt hieraus, wie solche Winkel vorkommenden Falles zu bestimmen sind.

Zusatz III. Man kehre die Fig. *27* und *28* um und betrachte die bisherige Horizontalprojektion als eine vertikale, so wird ersichtlich, wie die behandelten Aufgaben in Bezug auf die Vertikalebene zu lösen seien.

Begränzte ebene Figuren.

a b c d e Fig. *29* sollte die Horizontalprojektion eines ebenen Vieleckes sein. Von der Vertikalprojektion konnten drei Punkte a′, b′, c′ beliebig gewählt werden, in so ferne sie nur beziehungsweise senkrecht über a, b, c lagen. Dagegen mußten d′ und e′ nach der Bedingung abgeleitet werden, daß *(d, d′)* und *(e, e′)* mit *(a, a′)*, *(b, b′)*, *(c, c′)* in einer Ebene liegen. Zu diesem Ende hat man die Sehne *(c a, c′ a′)* gezogen und in der Horizontalprojektion noch die weiteren Hülfslinien b d, b e. Die Kreuzungspunkte m, n projicirte man hinauf nach m′, n′ zog b′ m′, b′ n′, auf welchen Linien und senkrecht über d und e, d′ und e′ liegen mußten. Die Konstruktion beruht darauf, daß eine gerade Linie, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, ganz in dieser Ebene liegt.

Fig. *30*. Fig. *29*.



Ein verschiedenes Verfahren ward bei Fig. *30* angewendet. a b c d e und a′ b′ c′ hatte man wie vorhin angenommen. Sofort dachte man sich in der Vielecksebene eine wagerechte Linie, welche etwa durch das Eck *(c, c′)* geht. Ihre Vertikalprojektion war die durch c′ gehende Parallele zur Grundlinie, sie schnitt die Seite b′ a′ und x′, welchen Punkt man auf b a nach x herabprojicirt. c x war also die Horizontalprojektion der gedachten wagerechten Hülfslinien.

Bei *(a)* stellte man nun eine Hülfsprojektionsebene y″ v″ senkrecht auf c x. In dieser Hülfsprojektion stellt sich die Wagerechte als der Punkt c″ dar

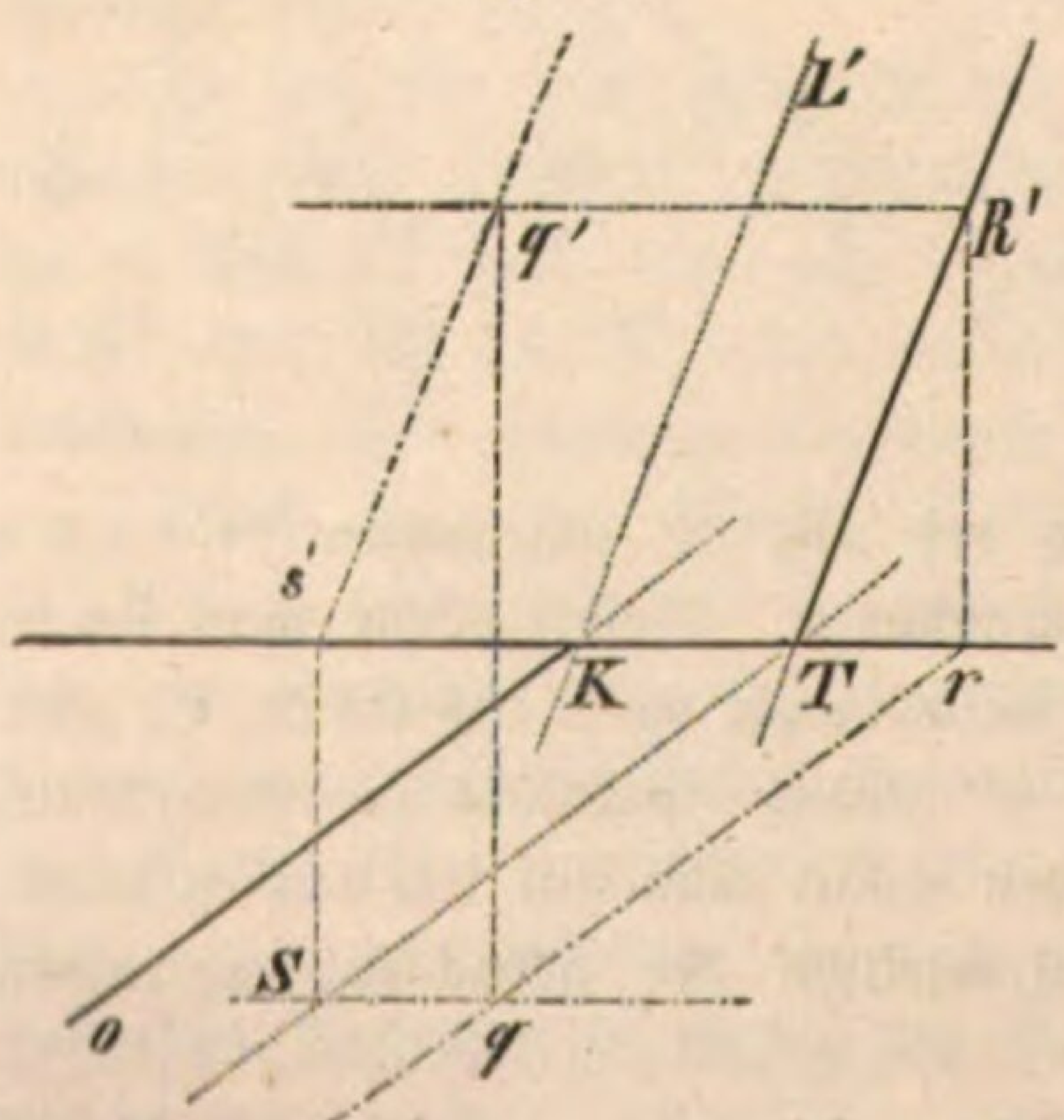
und das ganze Vieleck als die gerade Linie $b''c''e''$. Es projicirte sich nämlich b nach b'' in einer Tiefe $w''b''$ unter $y''z''$, welche gleich ist der Tiefe von b' unter $b'x'$, nämlich gleich der Tiefe $w'b'$. a projicirte sich nach a'', so daß $v''a'' = v'a'$; dadurch war die Richtung von $b''c''a''$ bestimmt, und man konnte d nach d''; e nach e'' projiciren. Die Höhen $w''e''$ 2c. dieser Punkte würden in der Vertikalprojektion nach $w'e'$ 2c. getragen und diese somit vollends bestimmt.

Dies Verfahren ist weniger unmittelbar, als das bei Fig. 29 innegehaltene, allein es liefert praktisch schärfere Resultate und empfiehlt sich außerdem noch, wenn die wahre Gestalt von $(a\,b\,c\ldots,\ a'\,b'\,c'\ldots)$ abzuleiten ist. Zu diesem Zwecke giebt man dem Vielecke eine Drehung um die Wagerechte $(c''x,\ c'x')$, bis es selbst wagerecht liegt, und sich also in wahrer Gestalt projicirt; dabei kam die Linie $b''e''$ mit ihren Punkten auf $y''v''$ zu liegen und von da aus projicirte man mittelst Parallelen zu $c''x''$ herab nach A'', E'', $D''\ldots$ 2c. auf Linien, welche durch a, e, $d\ldots$ 2c. rechtwinklig gegen $c''x$ gezogen wurden.

Zwei Ebenen in Verbindung.

26. Es treten hier zwei Fälle zur Behandlung auf: die Ebenen sind entweder erstens unter sich parallel, oder zweitens sie durchschneiden sich gegenseitig.

Fig. 31.



Aufgabe. Durch einen Punkt im Raume soll eine Ebene parallel zu einer Gegebenen gelegt werden.

O K L' Fig. 31 sei die Ebene; $(q,\ q')$ der Punkt im Raume.

Die Risse der gesuchten Ebene müssen nothwendig den gegebenen paarweise parallel sein. Legt man daher durch $(q,\ q')$ eine gerade Linie $(q\,r,\ q'\,R')$ parallel zu dem Horizontalrisse O K, so wird diese Linie ganz in der verlangten Ebene enthalten sein, und der Punkt R', wo sie die Vertikalebene durchschneidet, gehört dem verlangten Vertikalrisse R' T an, welcher mit K L' parallel zu ziehen ist.

Wird durch (q, q') eine Parallele $(q\ s,\ q'\ S')$ zu dem Vertikalrisse L K′ gelegt, so muß aus entsprechenden Gründen der Punkt S, wo sie die Horizontalebene schneidet, dem gesuchten Horizontalrisse S T angehören, welcher mit O K parallel läuft.

Daß beide Risse in T auf der Grundlinie zusammentreffen, verbürgt die graphische Richtigkeit der Ausführung, in so ferne dieser Punkt noch auf der Zeichnungsfläche zugängig ist.

27. Aufgabe. Es sind zwei Ebenen vermittelst ihrer Risse gegeben, man soll die Projektionen ihrer gegenseitigen Durchschnittslinien konstruiren.

Fig. *32* und Fig. *33*. L J und L M′, O R und O S′ sind die gegebenen Risse.

Fig. *32*.

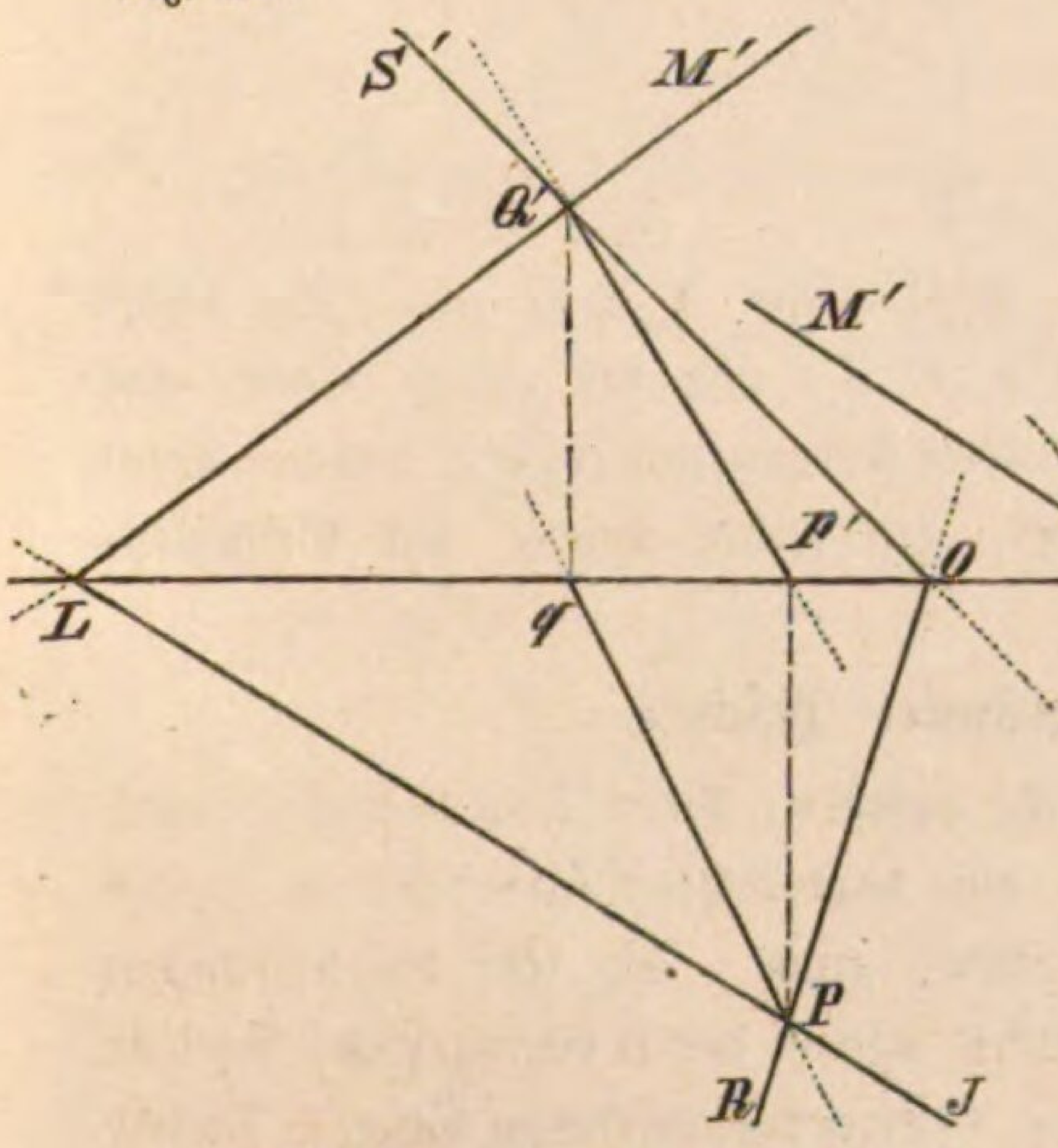
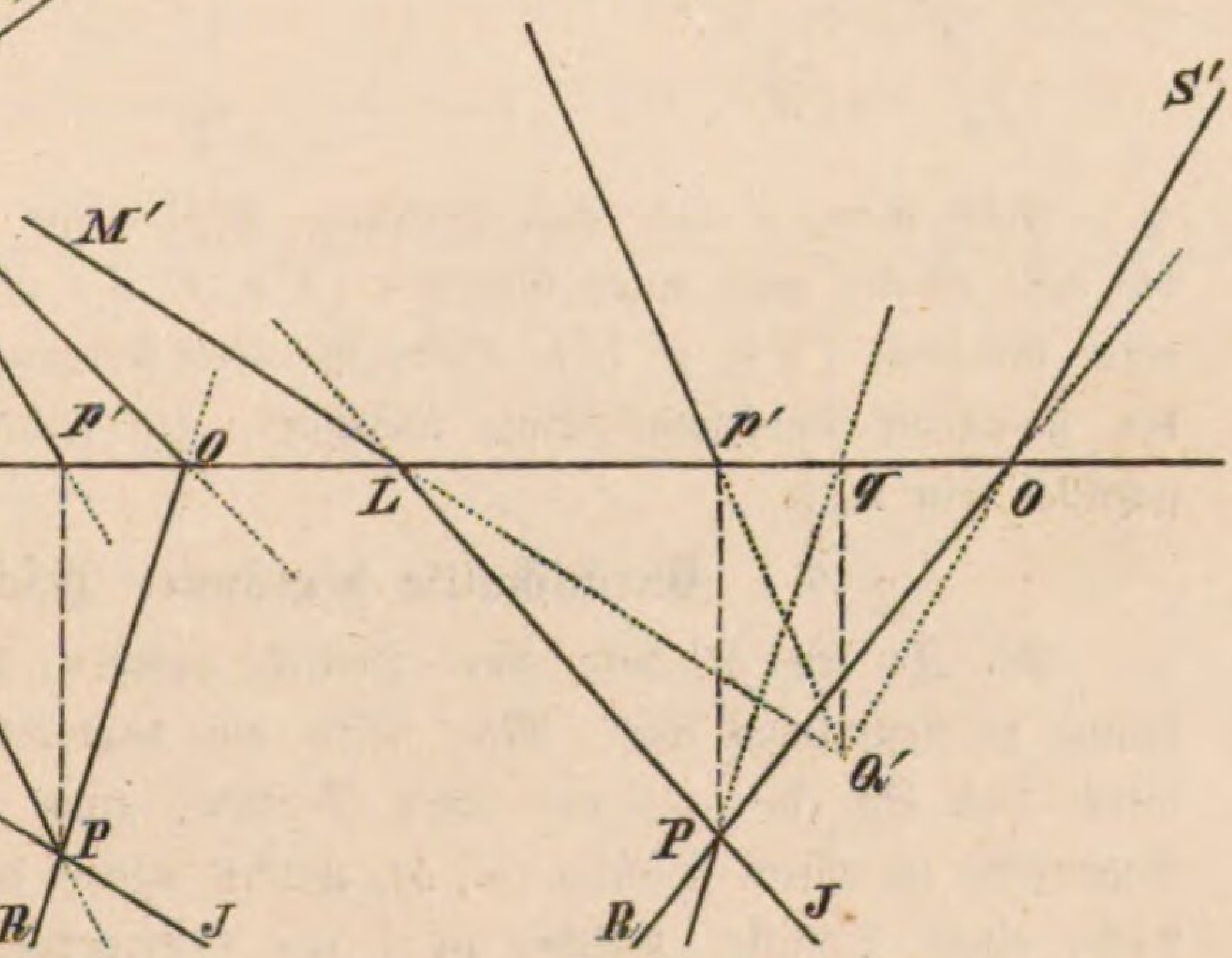


Fig. *33*.

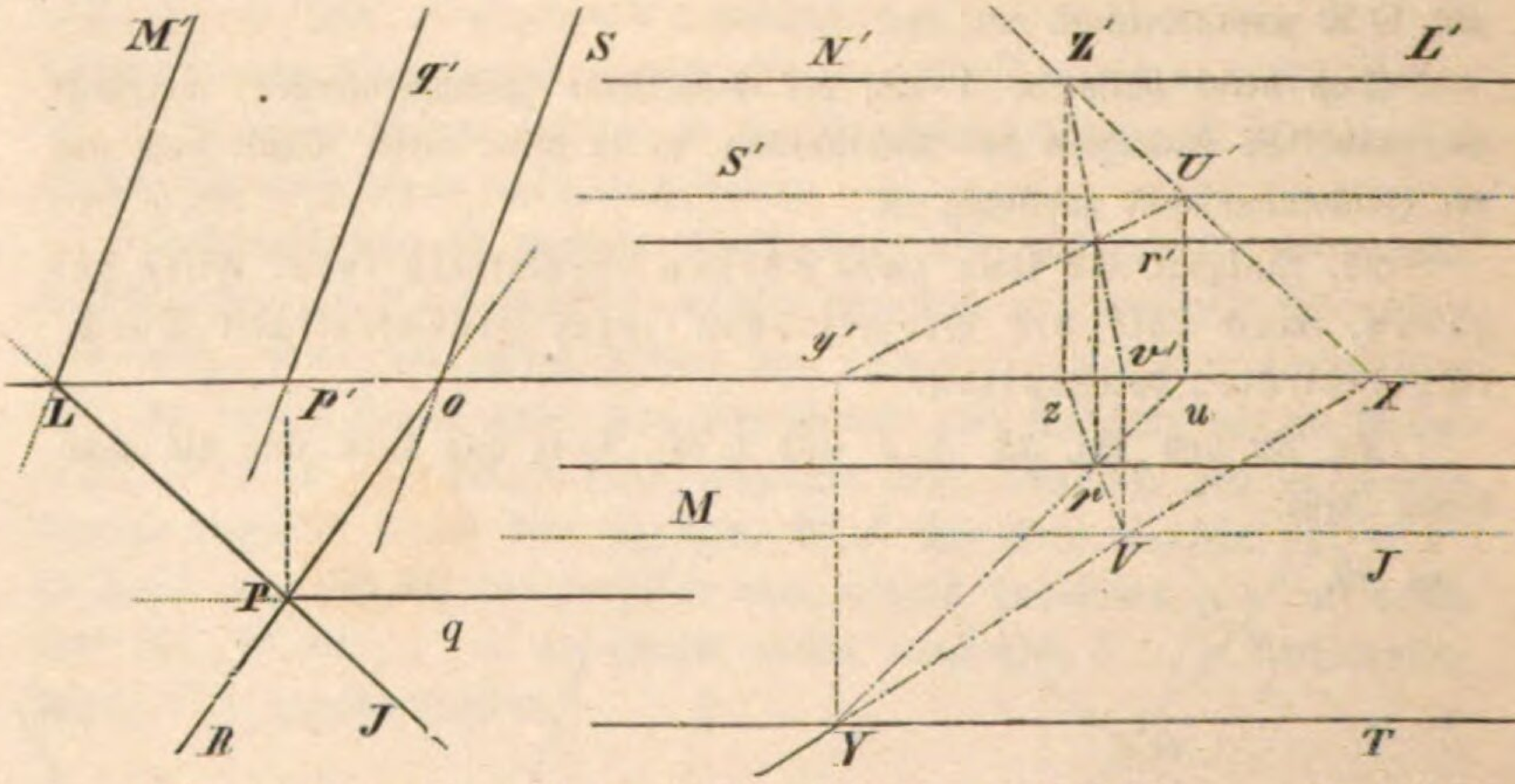


Der Begegnungspunkt P beider Horizontalrisse, welcher sich vertikal nach p′ projicirt, gehört den zwei Ebenen und somit ihrem Durchnitte an. Ferner ist Q′, der Begegnungspunkt beider Vertikalrisse, welcher sich nach q projicirt, ein anderer Punkt im Durchschnitt beider Ebenen; daher endlich sind P q und p′ Q′ die gesuchten Projektionen der Durchschnittslinie.

Besondere Fälle. Fig. *34* (S. 126). Die Vertikalrisse sind parallel. Daraus folgt, daß die Durchschnittslinie beider Ebenen diesen Rissen gleichfalls parallel sein müsse. P q parallel zur Grundlinie und p′ q′ parallel zu L M′ sind deshalb die verlangten Projektionen.

Fig. 35. Die Risse beider Ebenen sind der Grundlinie parallel, und zwar gehören N′L′ und M J einerseits, wie U′S′ und T Y andererseits zusammen.

Fig. 34. Fig. 35.



Man wendete hier eine beliebige Hülfsebene Y X Z′ an. Sie schnitt die erste Ebene nach einer Geraden *(V z, v′ Z′)* und die zweite Ebene nach einer Geraden *(Y u, y′ U′)*. Beide Geraden kreuzen sich *(r, r′)*, welcher Punkt der gesuchten Durchschnittslinie angehört, die selbst wieder der Grundlinie parallel sein muß.

Durchschnitte begränzter Flächen.

28. In *Fig. 36* sind zwei Dreiecke gegeben, deren gegenseitiger Durchschnitt zu bestimmen war. Man nahm eine wagerechte Hülfsebene an, welche durch das Eck *(m′, m)* des einen Dreieckes ging. Sie traf die verlängerte Gegenseite in einem Punkte *(o′, o)*, machte also in der (verlängerten) Dreiecksfläche einen Schnitt, welcher m o zur Horizontalprojektion hatte. Dieselbe wagerechte Hülfsebene durchschnitt die zweite Dreiecksfläche nach einer Linie, als deren Horizontalprojektion sich p q ergab, die beiden Projektionen kreuzten sich in einem Punkte x, welchen man auf m′ o′ nach x′ projicirte und *(x, x′)* war ein Punkt in dem Durchschnitte beider Dreiecksflächen. Eine zweite wagerechte Hülfsebene, als deren Vertikalprojektion die Gerade c′ g′ angenommen war, verursachte in jeder Dreiecksfläche einen Schnitt, welcher dem vorigen parallel sein mußte. Die Horizontalprojektionen dieser Schnitte kreuzten sich in y, welchen Punkt man auf c′ g′ nach y′ projicirte. Somit waren x y und x′ y′ die Projektionen des Durchschnittes der zwei Dreiecke.

Dieser Durchschnitt ist nur in so weit wirklich vorhanden, als er gleichzeitig innerhalb beider Dreiecksflächen liegt und als er hier durch eine volle Linie angegeben ward.

Dieselbe Methode ist man in der Lage anzuwenden, wenn zwei Ebenen, deren Durchschnitt verlangt wird, mittelst ihrer Risse gegeben sind, deren Kreuzungspunkte jedoch außerhalb der Zeichnungsfläche liegen. Dies ist theilweise der Fall mit den beiden Ebenen J L M′ und R O S (Fig. *37*), deren Horizontalrisse sich außerhalb des Zeichnungsblattes kreuzen. Hier hat man

Fig. *36.*

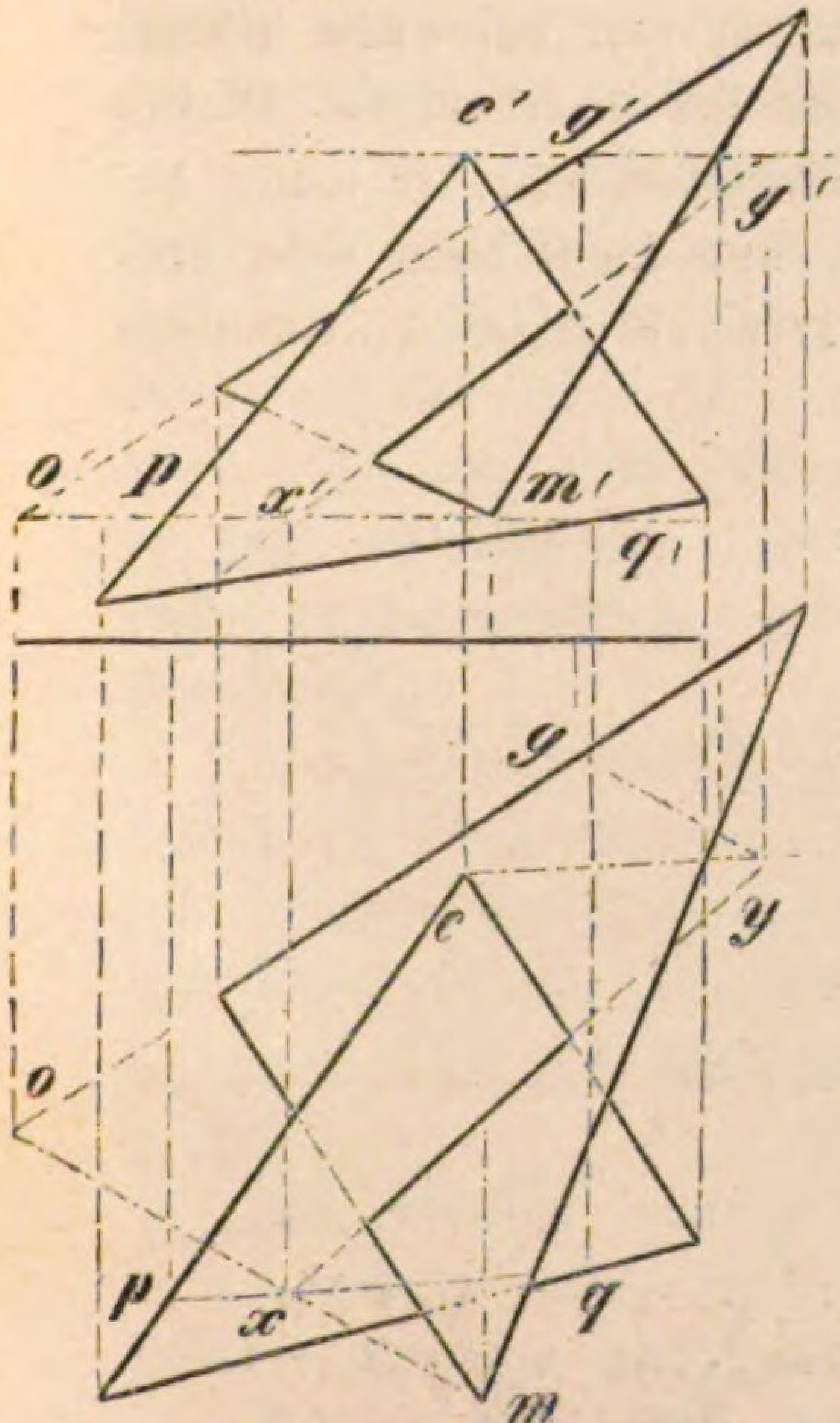
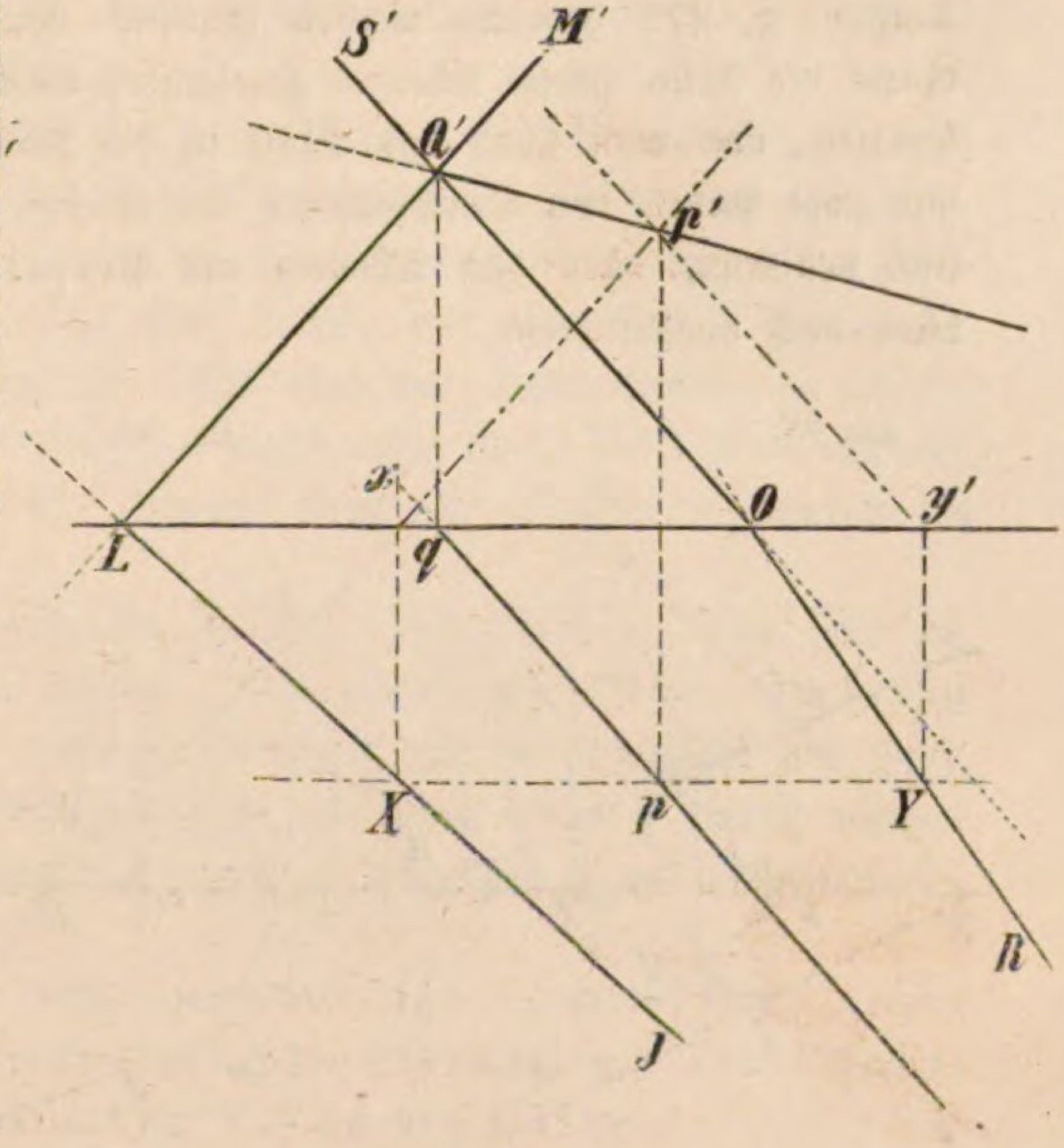


Fig. *37.*



nachdem Q′ markirt war, eine Hülfsebene X Y angenommen, welche parallel ist zur vertikalen Projektionsebene. Sie schneidet jede der zwei Ebenen nach einer Parallelen zu ihrem Vertikalrisse; x′ p′ und y′ p′ sind die Vertikalprojektionen dieser Parallelen, und liefern den Punkt *(p′, p)* der gesuchten Durchschnittslinie *(q p, Q′ p′)*.

Gerade Linien und ebene Flächen.

29. Aufgabe. Man soll den Durchschnittspunkt einer geraden Linie und einer Ebene konstruiren.

Vorbemerkung. Wenn in einer geometrischen Aufgabe die Lage eines Punktes gesucht wird, welche aus irgend welchen Bedingungen hervorgeht, und man ist dahin gelangt, eine ebene Fläche angeben zu können und eine gerade Linie, deren gegenseitigen Durchschnitt jener Punkt bildet, so ist er gefunden und die Aufgabe gelöst. Aber hier, in der darstellenden Geometrie, haben wir es nicht unmittelbar mit den Punkten des Raumes zu thun, sondern mit ihren Projektionen, und der kurze Ausdruck „einen Punkt bestimmen" heißt nichts weiteres, als „dessen Projektionen ableiten"; hierin liegt die Aufgabe.

Diese Bemerkung hätte schon früher, namentlich bei Gelegenheit der Aufgabe §. 27, gemacht werden können. Wurden dort auf einem Papierblatte die Risse zweier Ebenen gezeichnet, welche sich innerhalb des Blattes kreuzten, und man schob das Blatt in die Projektionsmappe, so waren damit zwei Punkte des Durchschnittes der Ebenen und damit dieser selbst physisch bestimmt, aber das Ableiten der Projektionen dieses Durchschnittes blieb noch auszuführen.

Fig. 38.

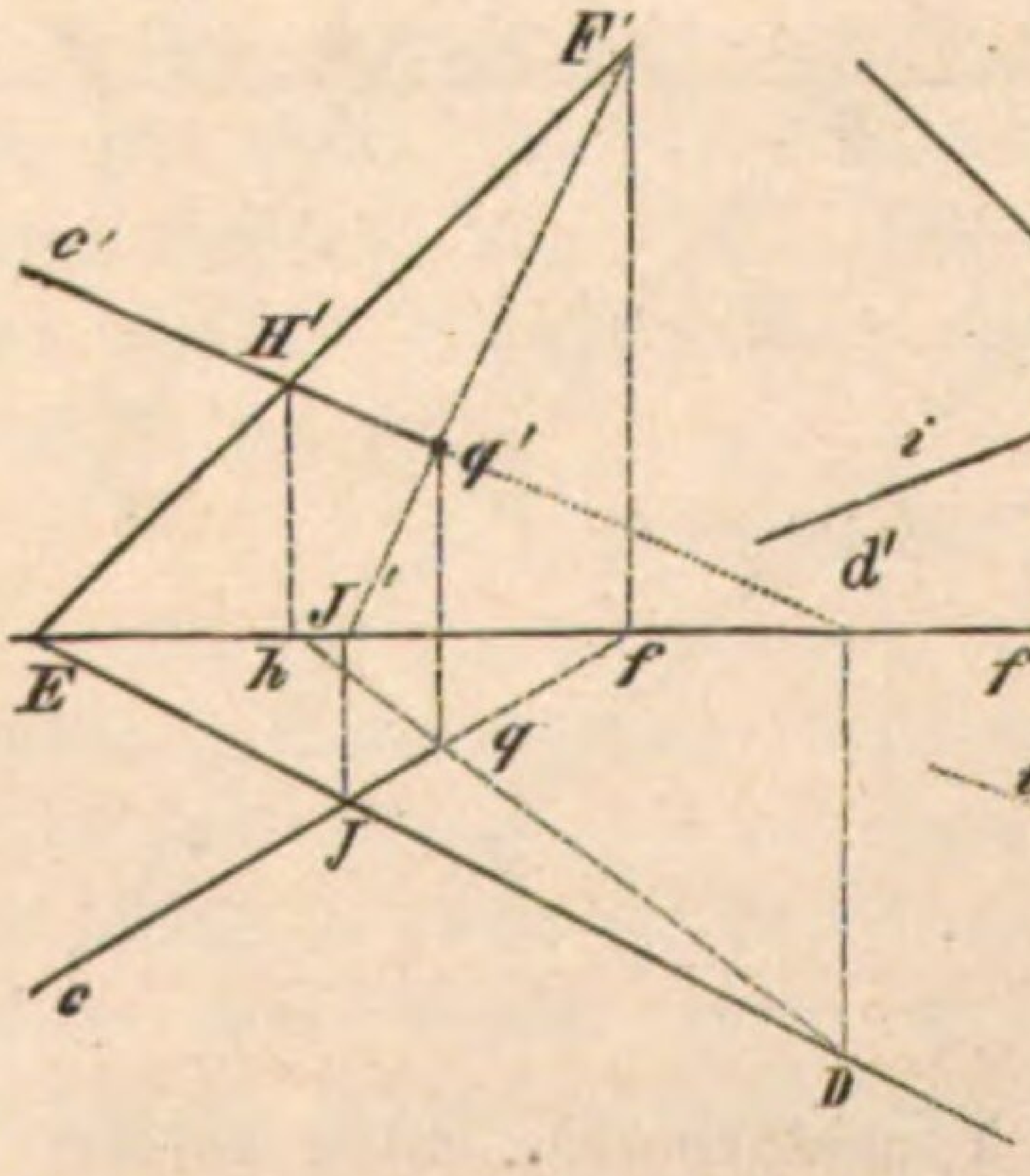


Fig. 39.

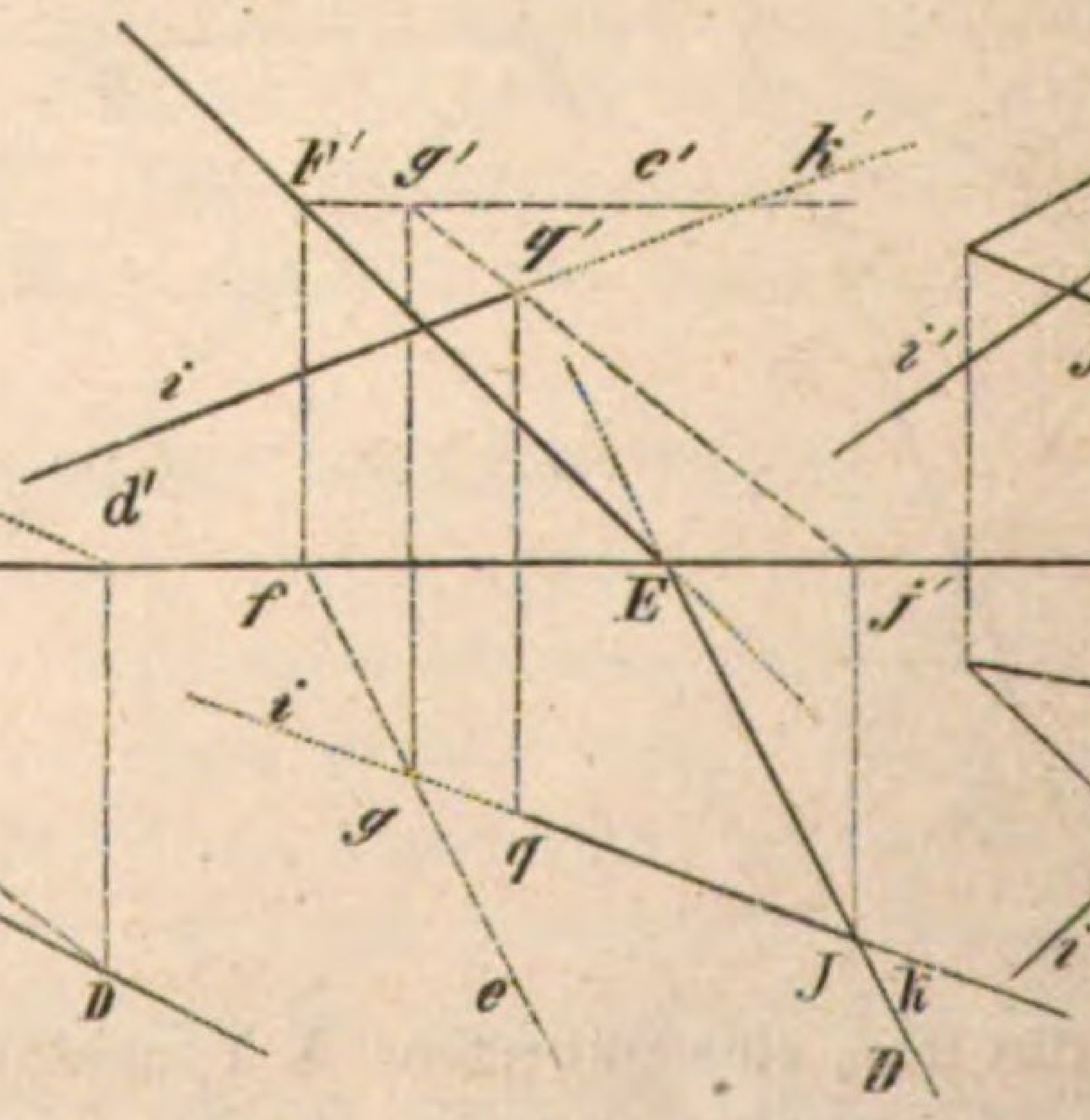
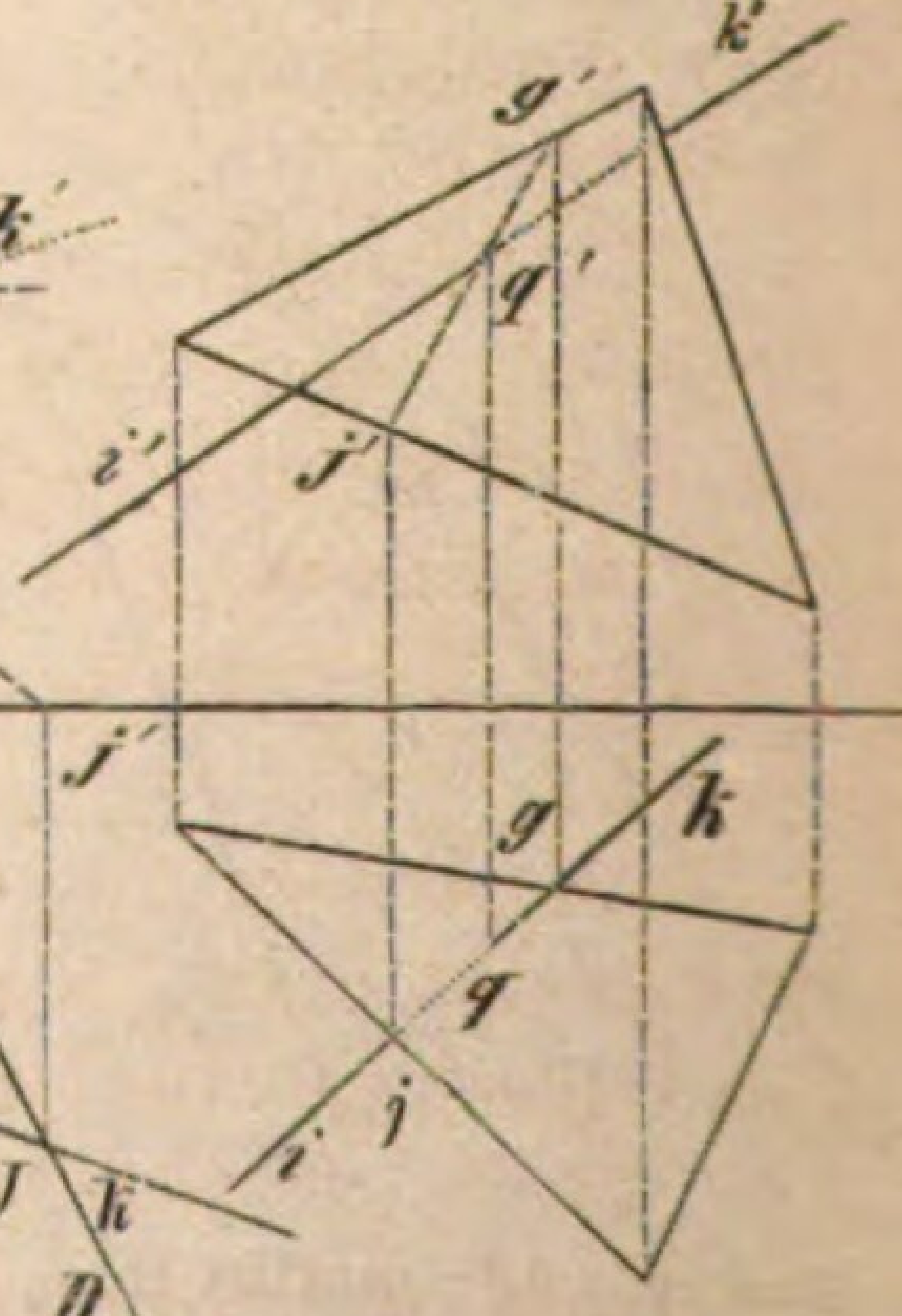


Fig. 40.



Lösung der Aufgabe. Man denkt sich durch die gerade Linie eine Hülfsebene gelegt, und bestimmt den gemeinsamen Durchschnitt dieser und der vorgelegten ebenen Fläche; der gesuchte Punkt ist derjenige, in welchem die Durchschnittslinie und die gegebene Gerade sich kreuzen. Am einfachsten wird die Ausführung, wenn man als Hülfsebene eine der beiden projicirenden Ebenen der geraden Linie nimmt, weil mit der Projektion einer geraden Linie auch die entsprechende projicirende Ebene gegeben ist.

In Fig. *38* ist D E F′ die ebene Fläche; *(c f, c′ d′)* die gerade Linie. Ihre horizontal projicirende Ebene hat die Senkrechte f F′ als Vertikalriß. Diese projicirende Ebene c f und die D E F′ schneiden sich nach einer geraden Linie, deren Vertikalprojektion j′ F′ ist. Den Kreuzungspunkt q′ von j′ F′ und c′ d′ projicirt man herab auf c f nach q, und hat somit die Projektionen des gesuchten Punktes. Wendete man die vertikal projicirende Ebene der Linie *(c f, c′ d′)* an, so war die Senkrechte d′ D deren Horizontalriß, also h D Horizontalprojektion ihres Durchschnittes mit D E F′. Wenn der Kreuzungspunkt q der zwei Projektionen c f und h D senkrecht unter dem vorhin gefundenen q′ lag, hatte man hierin, praktisch genommen, eine Probe für die Richtigkeit der Konstruktion.

Bei Fig. *39* ist *(i k, i′ k′)* die gerade Linie, D E F′ die ebene Fläche. Hier wären zur Bestimmung von *(q, q′)* weitgreifende Verlängerungen nöthig geworden, hätte man nicht in der Ebene noch eine wagerechte Linie angenommen, eine Linie *(F′ e′, f e)* also, welche mit dem Risse E D parallel liegt. Die projicirende Ebene i k trifft nun den Horizontalriß in *(J, j′)*, sie trifft die Wagerechte in *(g, g′)*, macht also in D E F′ einen Schnitt, dessen Vertikalprojektion j′ g′ ist. Hieraus fand sich q′, und aus diesem die Projektion q.

Als drittes Beispiel ward in Fig. *40 (i k, i′ k′)* als gerade Linie und ein Dreieck als ebene Fläche genommen. Die projicirende Ebene i k schneidet zwei Dreiecksseiten in *(j, j′)* und *(g, g′)*, macht also in der Fläche des Dreieckes einen Schnitt, dessen Projektion j′ g′ sich mit i′ k′ in q′ kreuzt, woraus q folgte. Dies sind wiederum die gesuchten Projektionen des Durchschnittspunktes.

30. **Lehrsatz.** Steht eine gerade Linie rechtwinklig gegen eine ebene Fläche, so bilden die Projektionen der Linie rechte Winkel mit den entsprechenden Rissen der Ebene.

Beweis. Man denke sich irgend eine Ebene, welche mit *E* bezeichnet werden soll und eine gerade Linie *G*, welche rechtwinklig zu jener steht. Die (horizontale oder vertikale) Projektion von *G* heiße *g*. Der Riß von *E* auf derselben Projektionsebene heiße *R*. Eine jede Ebene nun, welche durch *G* gelegt wird, steht rechtwinklig auf *E*, die projicirende Ebene *g* steht deshalb rechtwinklig gegen *E*, sie steht aber auch rechtwinklig auf der Projektionsebene, daher steht sie rechtwinklig auf *R*, als dem gemeinsamen Durchschnitte beider Ebenen, und *g* muß mit *R* einen rechten Winkel bilden, was zu beweisen war.

31. **Aufgabe I.** Es soll der Abstand eines Punktes im Raume von einer ebenen Fläche bestimmt werden.

(j, j') Fig. *41* der Punkt; R Q S' die Ebene.

I. Man fälle aus *(j, j')* eine Senkrechte auf die Ebene; ihre Horizontalprojektion j k wird rechtwinklig stehen müssen auf R Q und ihre Vertikalprojektion j' k' rechtwinklig auf Q S'. §. 30.

II. Man bestimme den Durchschnittspunkt *(k, k')* der Senkrechten und der Ebene. §. 29.

III. Man bestimme die wahre Größe j k'' der Senkrechten *(j k, j' k')*. §. 15.

Aufgabe II. Es ist in Fig. *42* ein Parallelogramm gegeben, man soll in dem Ecke *(a, a')* desselben eine Senkrechte auf die Viereckfläche errichten.

Fig. *41.*

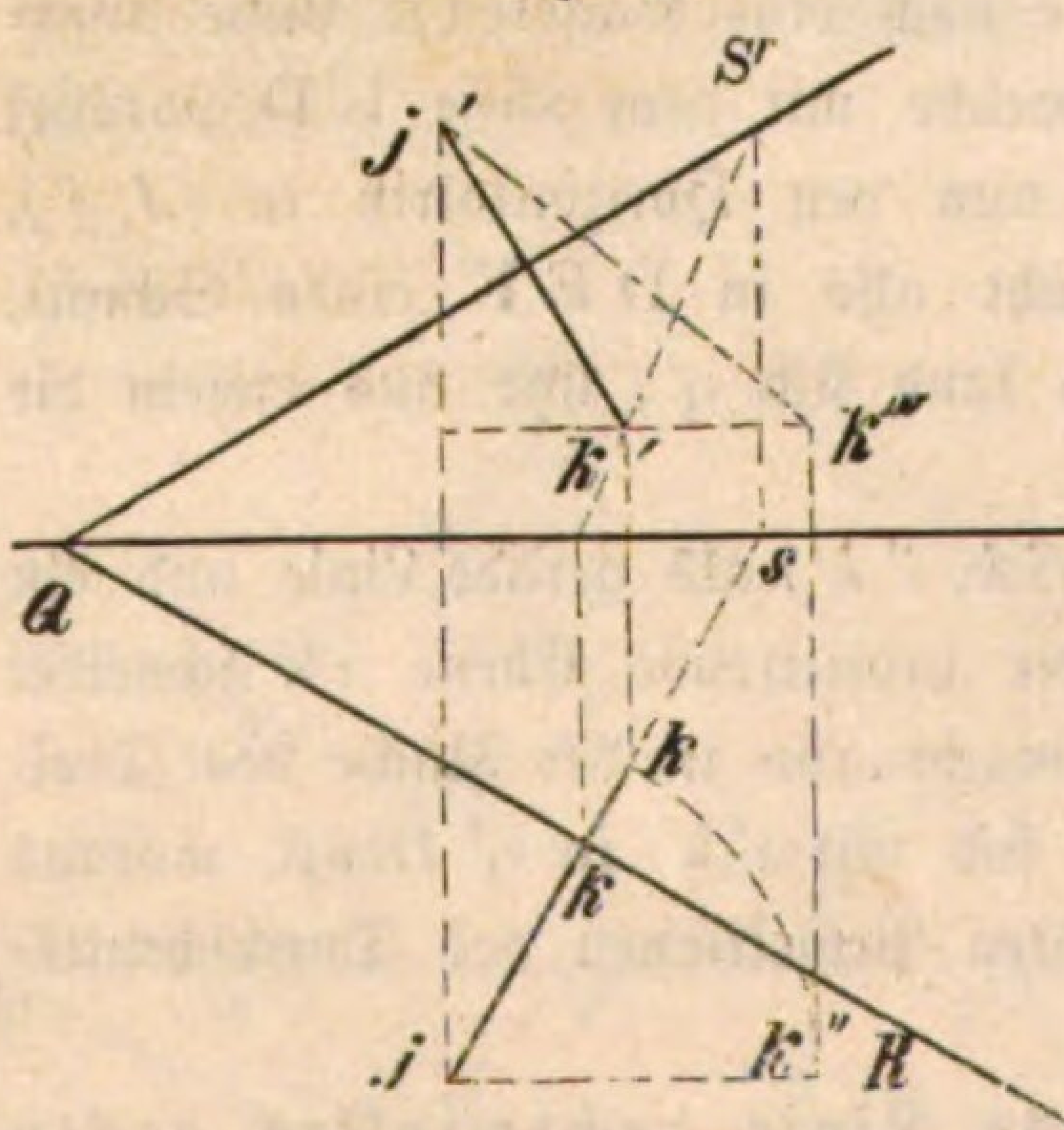
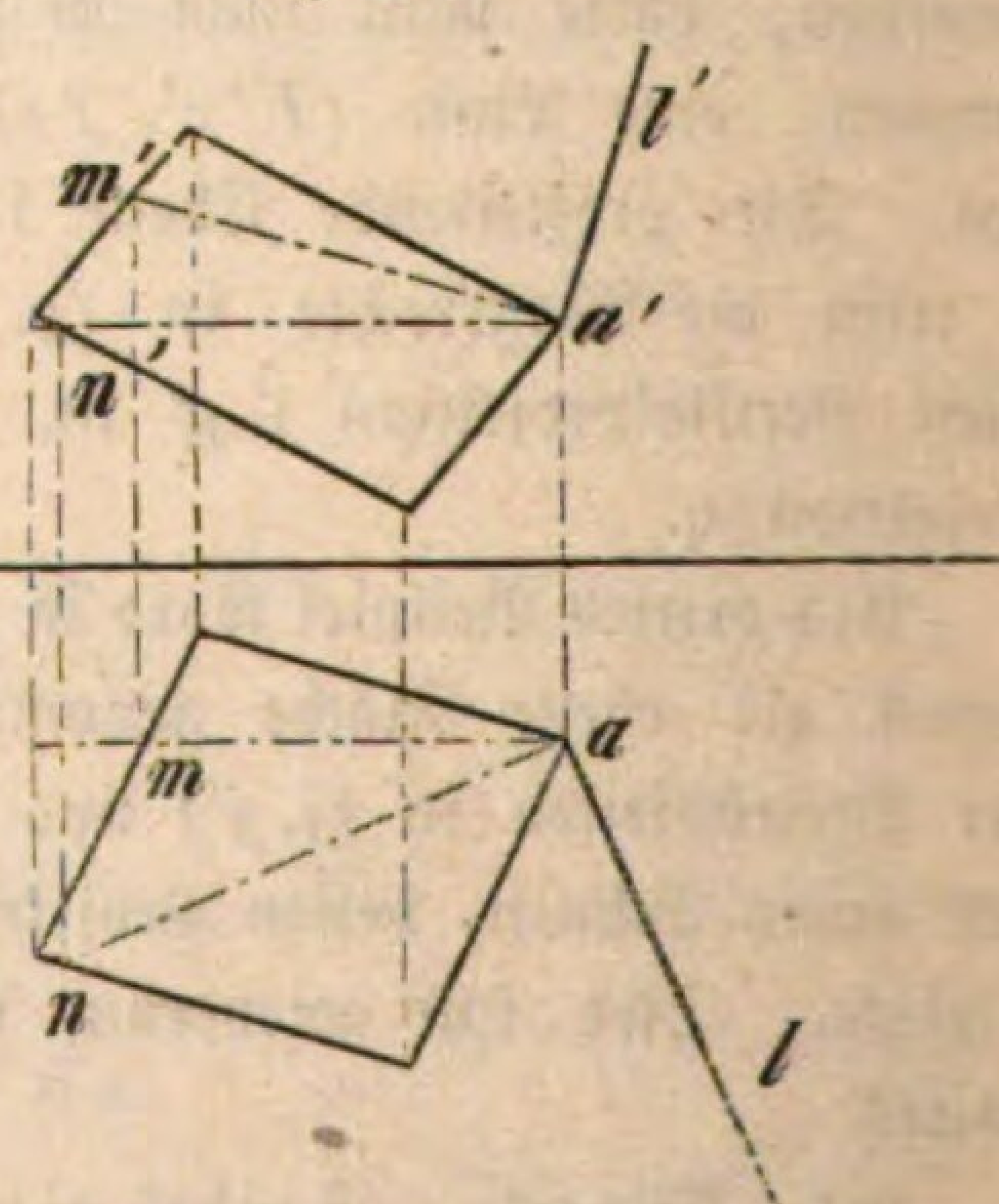


Fig. *42.*



Nach dem Vorgange der Aufgabe §. 23 könnten die Risse der Viereckebene konstruirt werden, auf welchen die Projektionen des zu suchenden Perpendikels beziehungsweise rechtwinklig stehen müßten.

Weil es hier jedoch nur auf die Richtung der Risse ankommt, so leisten Parallele zu ihnen dieselben Dienste und sind einfacher als jene zu erhalten. Man zog zu dem Ende in der Vertikalebene eine gerade Linie a' n' parallel zur Grundlinie, und betrachtete sie als die Projektion einer in der Viereckebene liegenden wagerechten Linie, welche also dem Horizontalrisse der Ebene parallel sein mußte. n' projicirte sich herab nach n, demzufolge war a n die Horizontalprojektion der Parallelen, und auf diesem a n mußte die Projektion a l des gesuchten Perpendikels rechtwinklig stehen.

Man zog ferner in der Horizontalebene eine Gerade a m parallel zur Grundlinie, und betrachtete sie als eine in der Viereckšebene liegende Parallele zur Vertikalebene, also auch zum Vertikalriß der Viereckšebene. Auf der entsprechenden Vertikalprojektion a′ m′ mußte darum die Vertikalprojektion a′ l′ des Perpendikels rechtwinklig stehen.

32. Gegenseitige Beziehungen der vorangegangenen Konstruktionen und Sätze.

Behandelt man Aufgaben über gerade Linien und ebene Flächen vermittelst der Projektionen, so findet sich, daß es bei ihrer Lösung schließlich immer auf eine oder mehrere von den vier folgenden Konstruktionen ankommt.

I. Konstruktion der wahren Größe einer begränzten schiefen Linie.

II. Konstruktion der wahren Gestalt einer ebenen Figur durch Umlegen ihrer Ebene in eine der Projektionsebenen.

III. Konstruktion des Durchschnittes einer geraden Linie und ebenen Fläche.

IV. Konstruktion von Geraden, welche auf Ebenen senkrecht stehen.

Dies sind darum Fundamental-Konstruktionen der darstellenden Geometrie und es muß den Zöglingen warm empfohlen werden, sich mit denselben wohl vertraut zu machen. Die nachfolgenden Aufgaben werden unter Andern auch zur näheren Beleuchtung dieses Verhältnisses dienen.

Verschiedene Aufgaben zur Uebung.

33. Erste Aufgabe. Man soll den Winkel zweier schiefen Ebenen konstruiren.

Lösung im Allgemeinen. Den Winkel zweier Ebenen nennt man allgemein einen Flächenwinkel. Wird aus einem Punkte der Durchschnittslinien beider Ebenen in jeder derselben eine gerade Linie rechtwinklig auf den Durchschnitt gezogen, so ist der Winkel dieser zwei Linien das Maß des Flächenwinkels. Die beiden geraden Linien können auch betrachtet werden als hervorgegangen aus dem Schnitte der zwei ersten Ebenen mit einer dritten, welche durch den genannten Punkt rechtwinklig auf ihre gegenseitige Durchschnittslinie gelegt worden.

Es sei in Fig. *43* (S. 132) F E G′ die erste, F K G′ die zweite Ebene, daher *(F g, f′ G′)* ihr gegenseitiger Durchschnitt.

Man zog eine Linie M N rechtwinklig gegen die Projektion F g, und betrachtete dies M N als den Horizontalriß einer dritten Ebene, welche senkrecht steht auf *(F g, f′ G′)*. Diese dritte Ebene wird jede der zwei ersten nach einer geraden Linie durchschneiden, welche beide den verlangten Winkel ein-

schließen. Mit der Geraden M N in Verbindung gebracht, bilden die zwei Schnitte ein Dreieck, welches um seine Grundlinie M N gedreht und in die Horizontalebene niedergelegt ward, wo es nach N J″ M zu liegen kam und bei J′ den verlangten Winkel zeigte. Es handelte sich, die Höhe L J″ des Dreieckes zu finden. Diese Höhe liegt aber in dem Durchschnitte der dritten Ebene mit der projicirenden Ebene F g und steht als solcher senkrecht auf *(F g, f′ G′)*.

Die projicirende Ebene F g ward in die Horizontalebene niedergelegt und der Durchschnitt *(F g, f′ G′)* mit ihr, welcher nach F G″ fiel (*g G″* steht rechtwinklig auf F g und ist gleich der Höhe *g G′*). Zog man sofort L J‴ senkrecht auf F G″, so war dies gleich der Höhe des Dreieckes, und blieb noch von L nach J″ zu tragen.

Fig. 43.

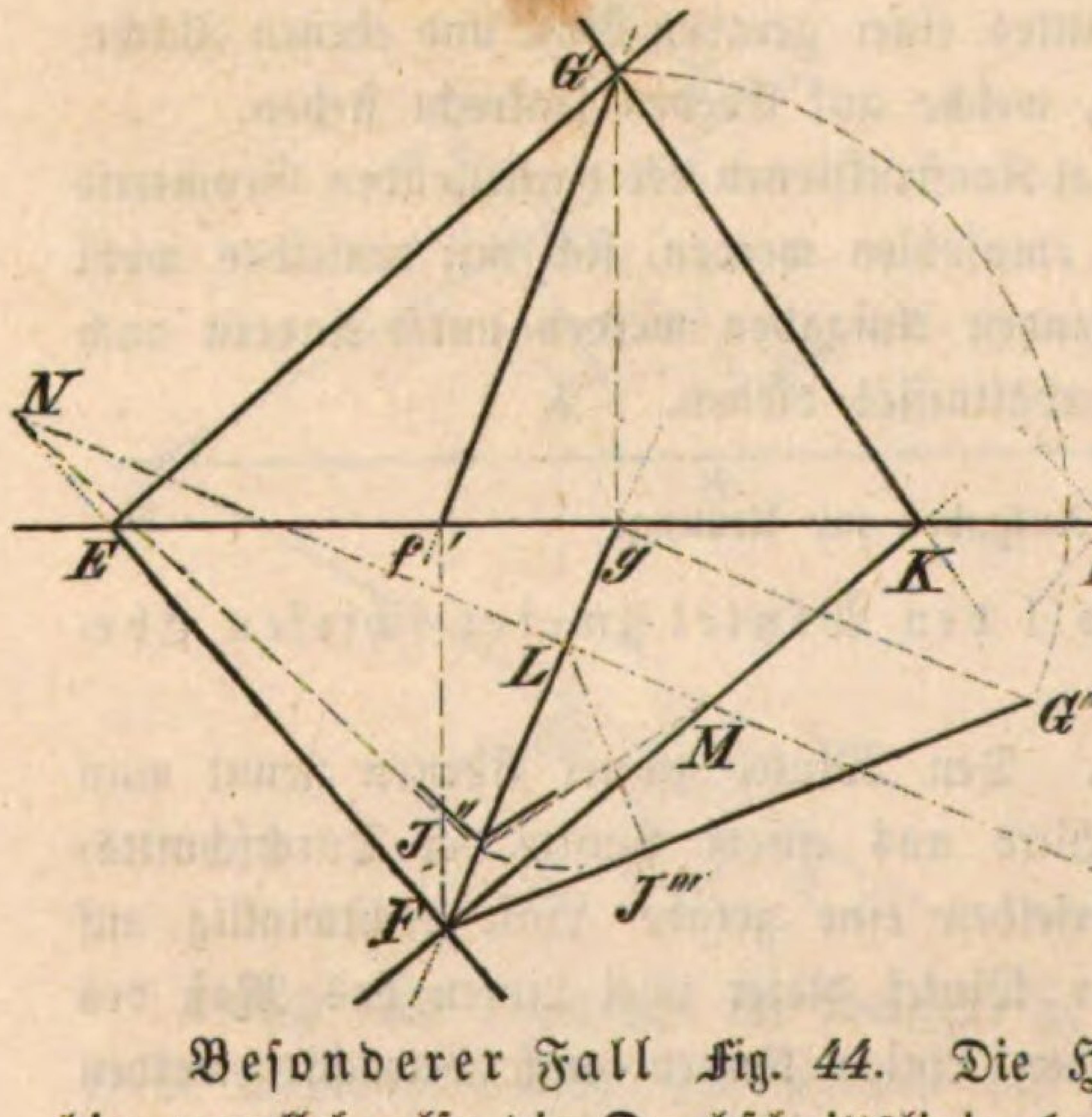
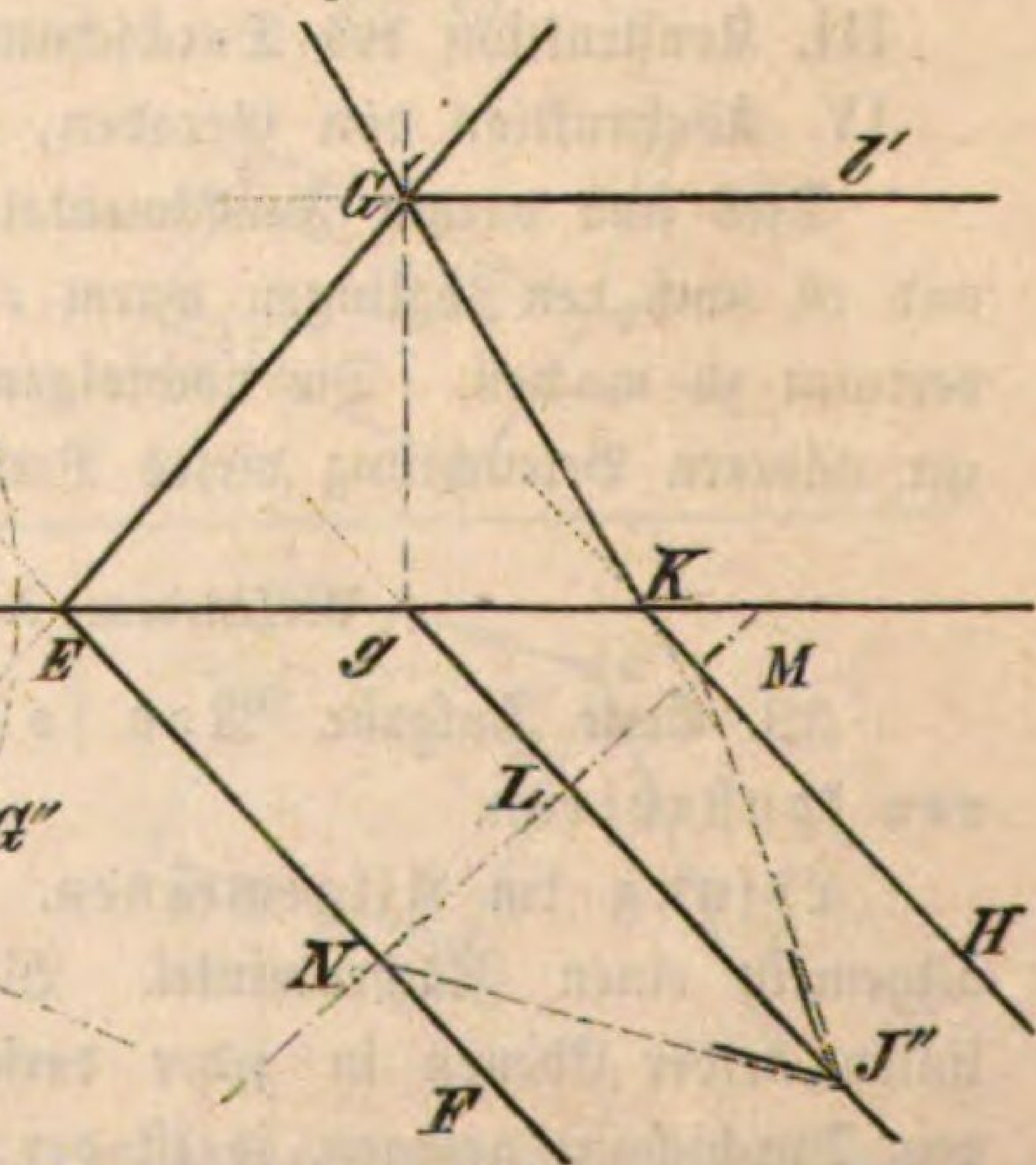


Fig. 44.



Besonderer Fall Fig. *44*. Die Horizontalrisse F E und H K sind hier parallel, also die Durchschnittslinie *(g L, g′ l′)* ihnen gleichfalls parallel. Die Hülfsebene, welche auf ihr senkrecht steht, projicirt sich darum als eine Gerade M N rechtwinklig auf E F. Die Schnitte der beiden ersten Ebenen durch die Hülfsebene fallen durch Umlegung derselben nach M J″ und N J″, wobei L J″ gleich der Höhe g G′ zu nehmen war. M J″ N ist das Maß des Flächenwinkels.

34. **Zweite Aufgabe.** **Man soll durch einen Punkt des Raumes eine Ebene legen, welche mit jeder der zwei Projektionsebenen einen bestimmten Winkel macht.**

Fig. 45. *(a)* sei der Winkel mit der Horizontalebene, *(b)* jener mit der Vertikalebene. Wir wollen zur Lösung der vorliegenden Aufgabe die „analytische", d. i. die zerlegende Methode anwenden und annehmen, J K H′ sei die verlangte Ebene. Es bleibt dann die Probe zu machen, ob sie den gestellten Bedingungen Genüge leiste. Zu dem Ende errichtet G J rechtwinklig auf J K, und G H′ rechtwinklig auf K H′.

Betrachtet G J als die Projektion einer Ebene, welche auf dem Risse J K senkrecht steht. Sie wird die Ebene J K H′ nach einer Geraden schneiden, welche mit der Projektion G J einen Winkel gleich *(a)* macht und dessen Spitze in J liegt.

Fig. 45.

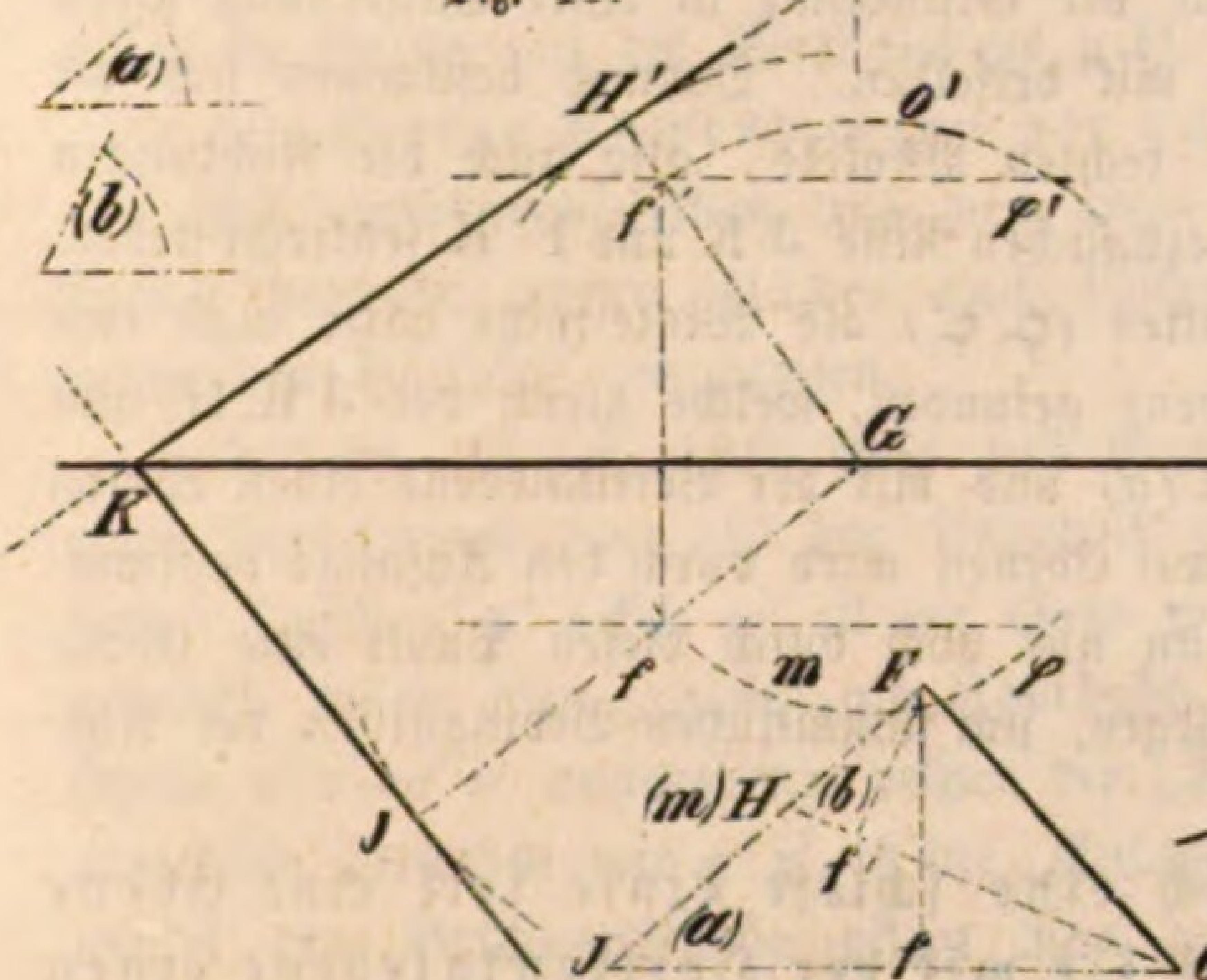
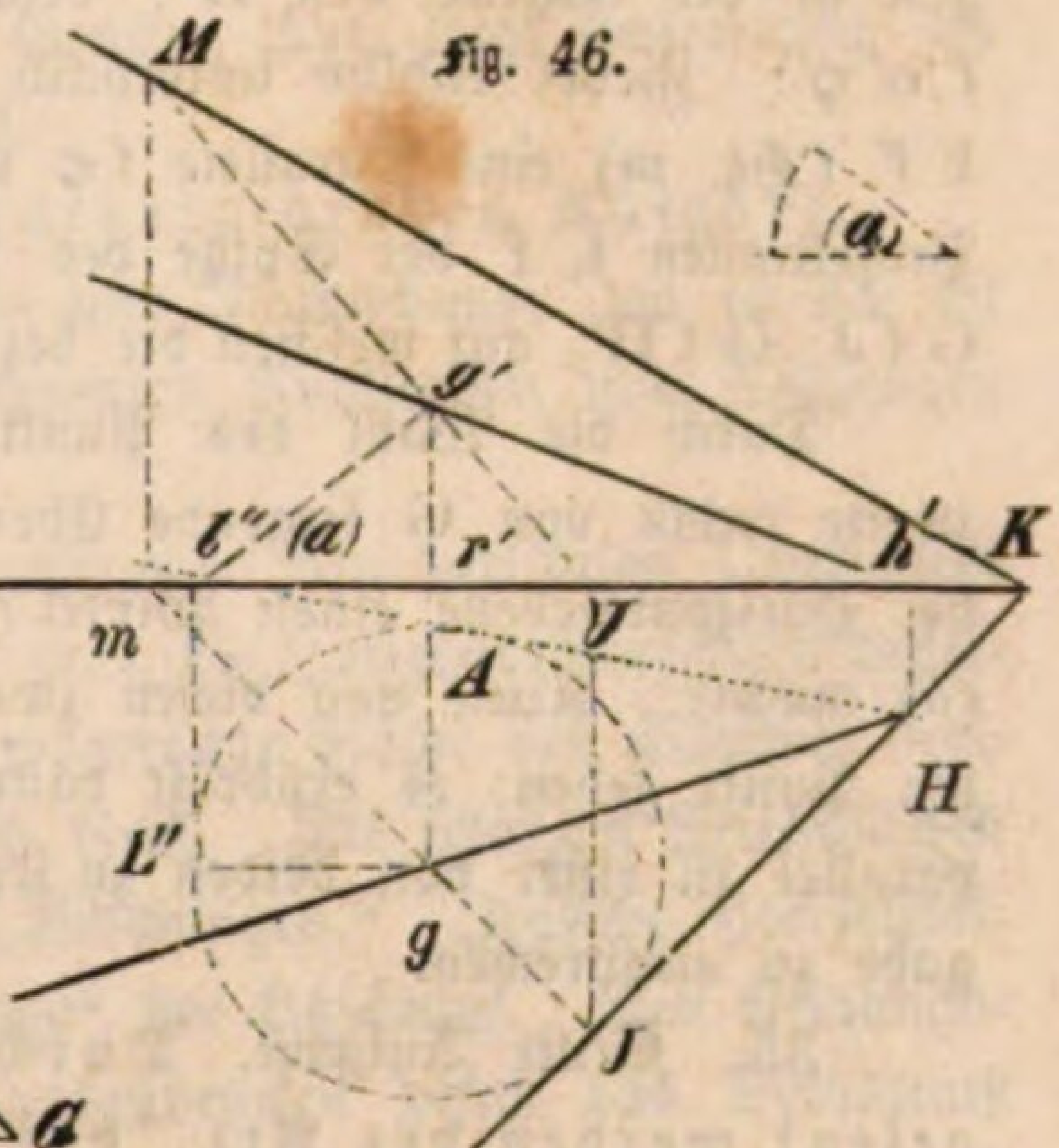


Fig. 46.



Betrachtet desgleichen G H′ als die Projektion einer andern Ebene, welche auf dem Vertikalrisse K H′ senkrecht steht. Sie wird die Ebene J K H′ nach einer andern Geraden durchschneiden, welche mit der Projektion G H′ einen Winkel gleich *(b)* macht und dessen Spitze in H′ liegt.

Die zwei Ebenen G J und G H′, welche beide auf J K H′ senkrecht stehen, werden sich aber selbst nach einer geraden Linie durchschneiden, die gleichfalls auf derselben Ebene senkrecht steht. In Verbindung mit den so eben genannten Projektionen und Schnitten bildet diese letzte Durchschnittslinie den gemeinsamen Katheten zweier rechtwinkligen Dreiecke. Das eine hat G J zur Hypotenuse und bei J einen Winkel gleich *(a)*; das andere hat G H′ zur Hypotenuse und bei H′ einen Winkel gleich *(b)*.

Nehmet jetzt bei *(m)* den genannten Katheten G F beliebig groß an, so sind alle Bedingnisse da zum Zeichnen der zwei bei F rechtwinkligen

Dreiecke, deren eines bei J einen Winkel *(a)*, das andere bei H einen Winkel *(b)* hat. Projicirt die Winkelspitze auf jede Hypotenuse nach f, bez. nach f'. Die Senkrechte F f giebt nun an, wie hoch die Winkelspitze über der Horizontalebene liegen werde, und F f' zeigt den Abstand dieser Spitze von der Vertikalebene.

Beschreibt also mit der Hypotenuse G J als Radius in der Hauptfigur aus einem beliebigen Punkte G einen Kreisbogen in der Gegend von J. Beschreibet mit G f als Radius aus G einen Bogen f m φ. Ziehet drittens in einer Höhe gleich F f eine Parallele f' φ' zur Grundlinie. Beschreibet sofort mit der Hypotenuse G H (Fig. *m*) aus G der Hauptfigur einen Bogen in der Gegend von H'; beschreibet mit G f' als Radius einen Bogen f' o' φ'. Ziehet endlich unterhalb der Grundlinie in einer Entfernung gleich F f' (Fig. *m*) eine Parallele f φ mit derselben. Dadurch bestimmen sich die Projektionen f, f' der Spitze des rechten Winkels, also auch die Richtungen G f J, G f H', auf welchen die bezüglichen Risse J K und F' K senkrecht stehen.

Durch die Wahl des Punktes *(φ, φ')* als Winkelspitze hätte man eine zweite rechts von G liegende Ebene gefunden, welche gleich der J K H' mit der Horizontalebene einen Winkel *(a)* und mit der Vertikalebene einen Winkel *(b)* machte. Keine von diesen zwei Ebenen wird durch den Anfangs bestimmten Punkt gehen; es erübrigt dann nur noch durch diesen Punkt eine Ebene parallel zu einer von beiden zu legen, um sämmtlichen Bedingnissen der Aufgabe zu entsprechen.

35. **Dritte Aufgabe.** Durch eine schiefe Linie soll eine Ebene gelegt werden der Art, daß sie mit der Horizontalebene einen bestimmten Winkel bildet.

(g H, g' h') Fig. *46* sei die gerade Linie; *(a)* der bestimmte Winkel.

Angenommen wie vorhin J K M' sei die verlangte Ebene, und wir wollen die Richtigkeit ihrer Stellung erproben.

Fürs erste wird zu erwägen sein, daß der Horizontalriß J K durch den Punkt H gehen müsse, wo *(g H, g' h')* die Horizontalebene durchschneidet.

Zweitens wird man eine gerade Linie m g J rechtwinklig gegen J H ziehen, und diese betrachten als die Projektion einer auf dem Risse senkrecht stehenden Ebene. Sie schneidet die gerade Linie in *(g, g')* und die Ebene nach einer geraden Linie, welche mit ihrer eigenen Projektion einen Winkel gleich *(a)* bildet, dessen Spitze in J. Drehet die Ebene g J mit allen in ihr liegenden Linien, so daß sie parallel zur Vertikalebene wird. Dadurch kommt g J nach g L'' parallel zur Grundlinie. L'' projicirt sich nach l'', und

$g' l'' \gamma'$ ist gleich dem Winkel, welchen die Ebene J K M' mit der Horizontalebene bildet. Dieser Winkel hat aber die bestimmte Größe *(a)*, die Höhe $g' \gamma'$ ward angenommen, also ist das rechtwinklige Dreieck $g \gamma' l''$ in allen Stücken bestimmt, damit auch der Radius $g L'' = \gamma' l''$ des Kreisbogens in welchen der durch *H* gehende Horizontalriß die Tangente bilden muß.

Die Gerade $(J g, j' g')$ schneidet die Vertikalebene in einem Punkte (m', M), welcher dem Vertikalrisse der gesuchten Ebene angehören muß.

Aus H hätte noch eine zweite Tangente H A an den aus g beschriebenen Kreis gezogen werden können. Sie wäre der Horizontalriß einer zweiten Ebene gewesen, welche gleichfalls durch die gerade Linie $(g H, g' h')$ geht und mit der Horizontalebene einen Winkel *(a)* bildet. Diese zweite Ebene, welche den Bedingnissen unserer Aufgabe Genüge thut, liegt symmetrisch zur ersten in Bezug auf die Vertikalebene g H.

36. Einige Anwendungen der vorhergehenden Aufgabe.

Wir wählen dieselben aus dem Erd- und Dammbaue, wo es sich oft darum handelt, ebene Flächen nach bestimmten Richtungen und Neigungen gegen den Horizont anzuordnen.

(a) Fig. *47* (S. 136) stellt das Profil oder den vertikalen Querschnitt eines Erddammes vor; *(b)* den Grundriß oder die Horizontalprojektion desselben. Durch v' x' (Fig. *a*) ist die obere wagerechte Fläche des Dammes ausgedrückt, welche hier zugleich als Fahrbahn dient. Die schrägen Seitenflächen (durch $x' z'$, $u' v'$ angegeben) heißen die „Böschungen." Jegliche Horizontalprojektion derselben wie y' z' ist die „Anlage" der Böschung. Den Neigungswinkel der Böschungsfläche pflegt man auszudrücken durch das Verhältniß der Anlage z' y' zur Höhe x' y'. In unserm Beispiele ist dies Verhältniß $= 3 : 2$ angenommen. Technisch bezeichnet man solche Neigung mit dem Ausdrucke „anderthalbfüßige Böschung", indem auf je 1 Fuß Höhe $1\frac{1}{2}$ Fuß Anlage kommen. Dies ist ungefähr auch die Neigung, welche frei abrutschendes Erdreich annimmt. Mit dem Ausdrucke „einfüßige Böschung" wird eine solche bezeichnet, wobei auf je 1 Fuß Höhe 1 Fuß Anlage kommt.

Nun sei in unserer Fig. *47* das Rechteck m n o p die Projektion der Fahrbahn einer Auffahrt oder eines Steigweges. Die schmale Seite o p liegt in einer Horizontalebene mit dem Fuße v w der Dammböschung, die Seite m n gleich hoch mit der Krone. Es handelt sich darum, die Böschungen des Steigweges anzuordnen, welche ebenfalls anderthalbfüßig werden sollen. Somit liegt hier die gleiche Aufgabe vor wie im §. 35: es soll nämlich durch jede der zwei Linien m p, n o eine Ebene gelegt werden, welche mit der

Horizontalebene einen Winkel x′ z′ y′ bildet. Zu dem Ende werden aus m und n mit einem Radius gleich y′ z′ Kreisbögen und an diese durch p und o Tangenten p t, o r gezogen. Die Böschungsfläche m p t wird von der verlängerten Kronenfläche noch nach einer geraden Linie m s parallel zu p t geschnitten, und endlich schneiden die Böschungsflächen sich gegenseitig nach den Geraden s v, n w, bei welchen einspringende Flächenwinkel oder „Kehlen“ entstehen.

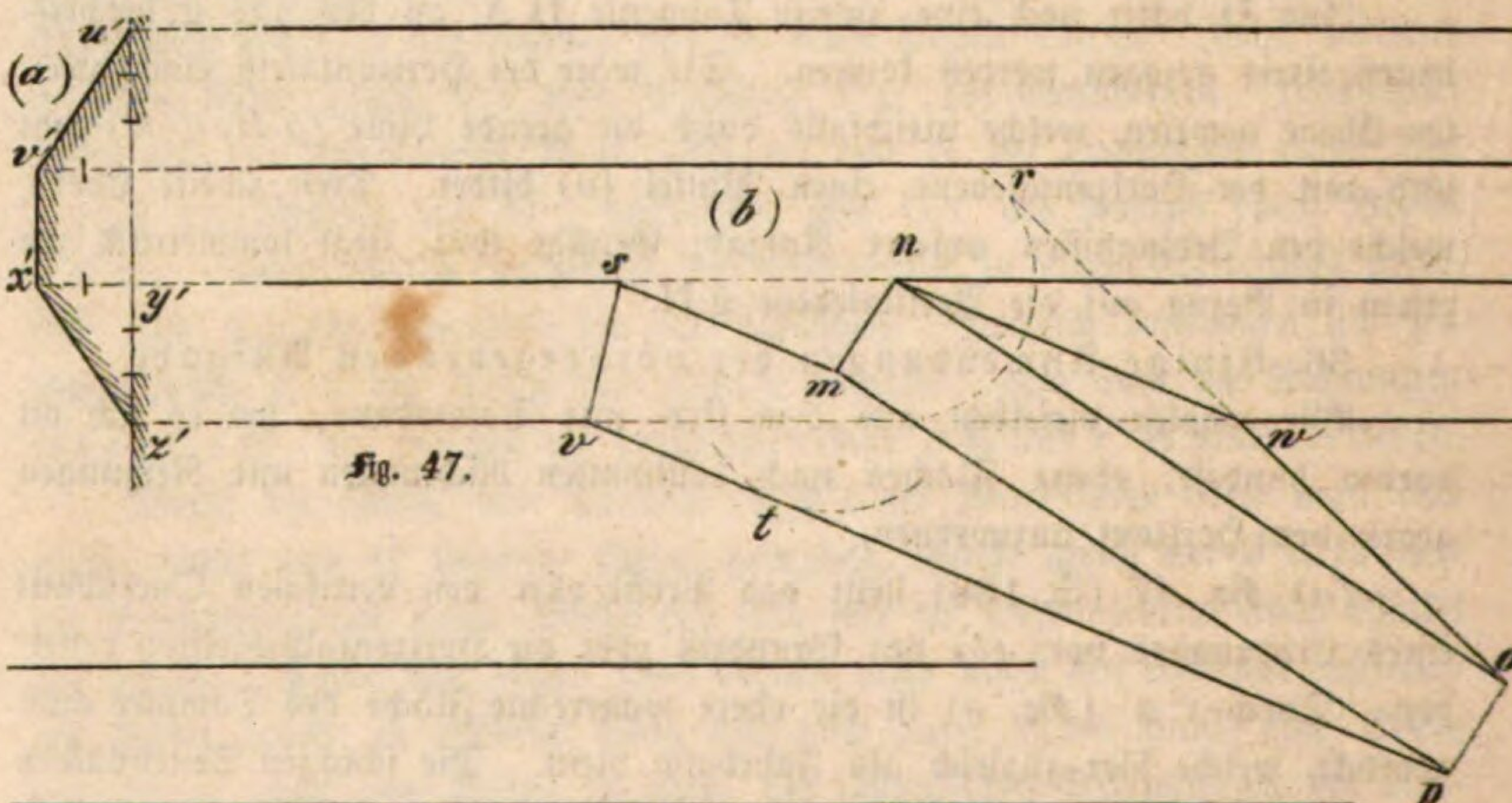


Fig. 47.

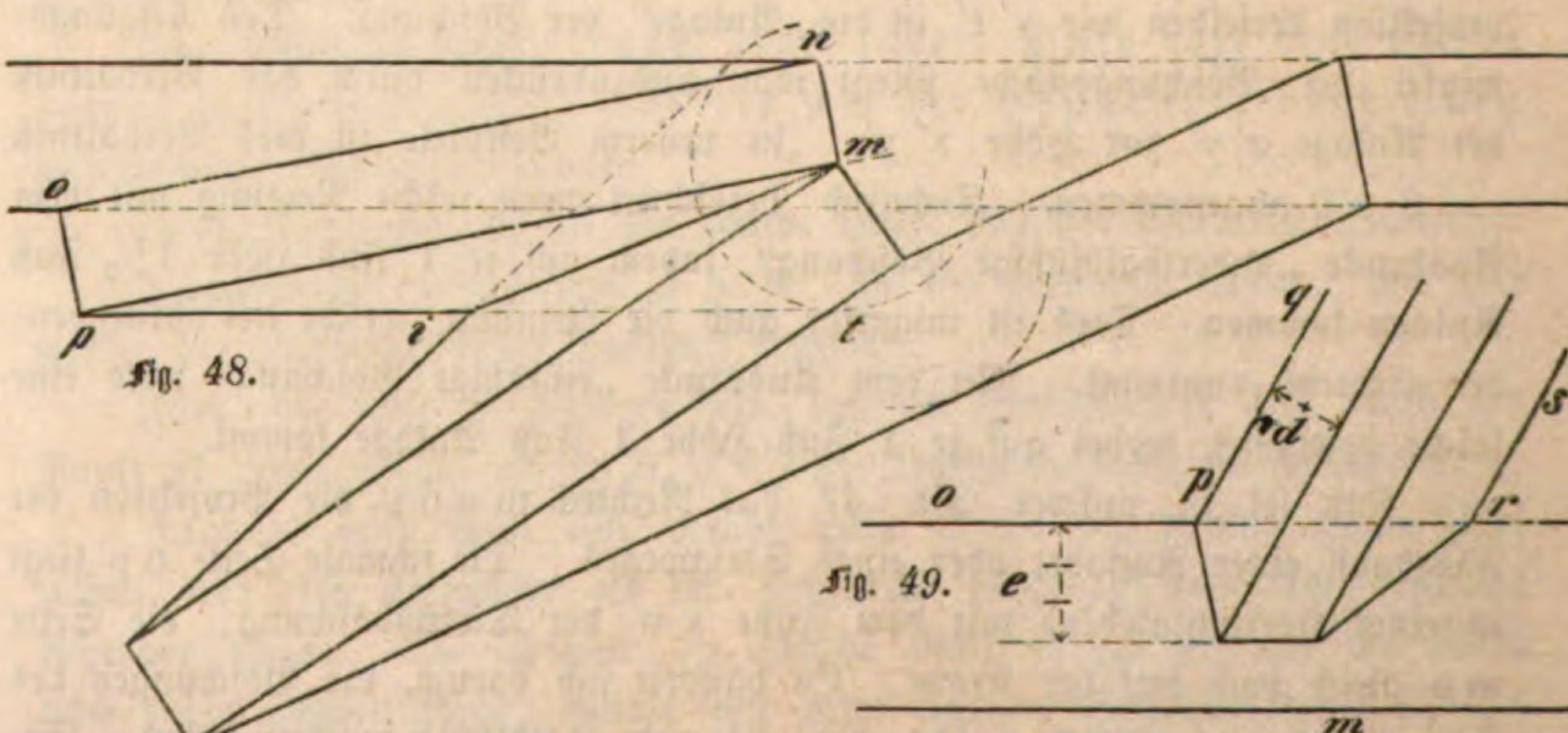


Fig. 48.

Fig. 49.

Fig. 48 giebt unter übrigens gleichen Verhältnissen die Zeichnung einer doppelten Auffahrt; die Fahrbahn m n o p der einen liegt mit der Kante n o

in der Böschungsfläche des Dammes; bei m i hat sich durch den gegenseitigen Schnitt zweier Böschungen wieder eine Kehle gebildet.

Man wird wahrgenommen haben, daß, nachdem aus dem Querschnitte *(a)* das Maß von y′ z′ oder x′ y′ entnommen war, alle weiteren Konstruktionen in der Horizontalprojektion auszuführen blieben. Dies findet bei Gegenständen von der Natur des Vorliegenden fast immer statt. Zu einiger weiteren Erläuterung über solches Verfahren haben wir noch die kleine Fig. *49* beigefügt. Hier wird als bekannt vorausgesetzt, daß m o r die Projektion einer anderthalbfüßigen Böschung sei, in welche ein niedriger Damm mit einfüßiger Böschung einschneidet, der Art, daß o r sowie p q und r s in derselben Horizontalebene liegen. Die Figur des Schnittes bleibt zu bestimmen. Hierzu theilte man bei *d* Anlage der kleineren Böschung in zwei gleiche Theile, und trug bei e drei solcher Theile rechtwinklig gegen o p auf. Durch den Endpunkt zog man eine Parallele zu o p. Diese mußte als Linie in der Fläche m o r mit der Kronenfläche des niederen Dammes in der gleichen Horizontalebene liegen und bestimmte somit die noch mangelnden Punkte der Durchschnittsfigur.

37. **Vierte Aufgabe.** Es sind gegeben zwei gerade Linien *(a b, a′ b′)*, *(c d, c′ d′)* Fig. *50*, welche nicht in einer und derselben Ebene liegen, man soll deren gegenseitigen Neigungswinkel konstruiren.

Fig. *50.*

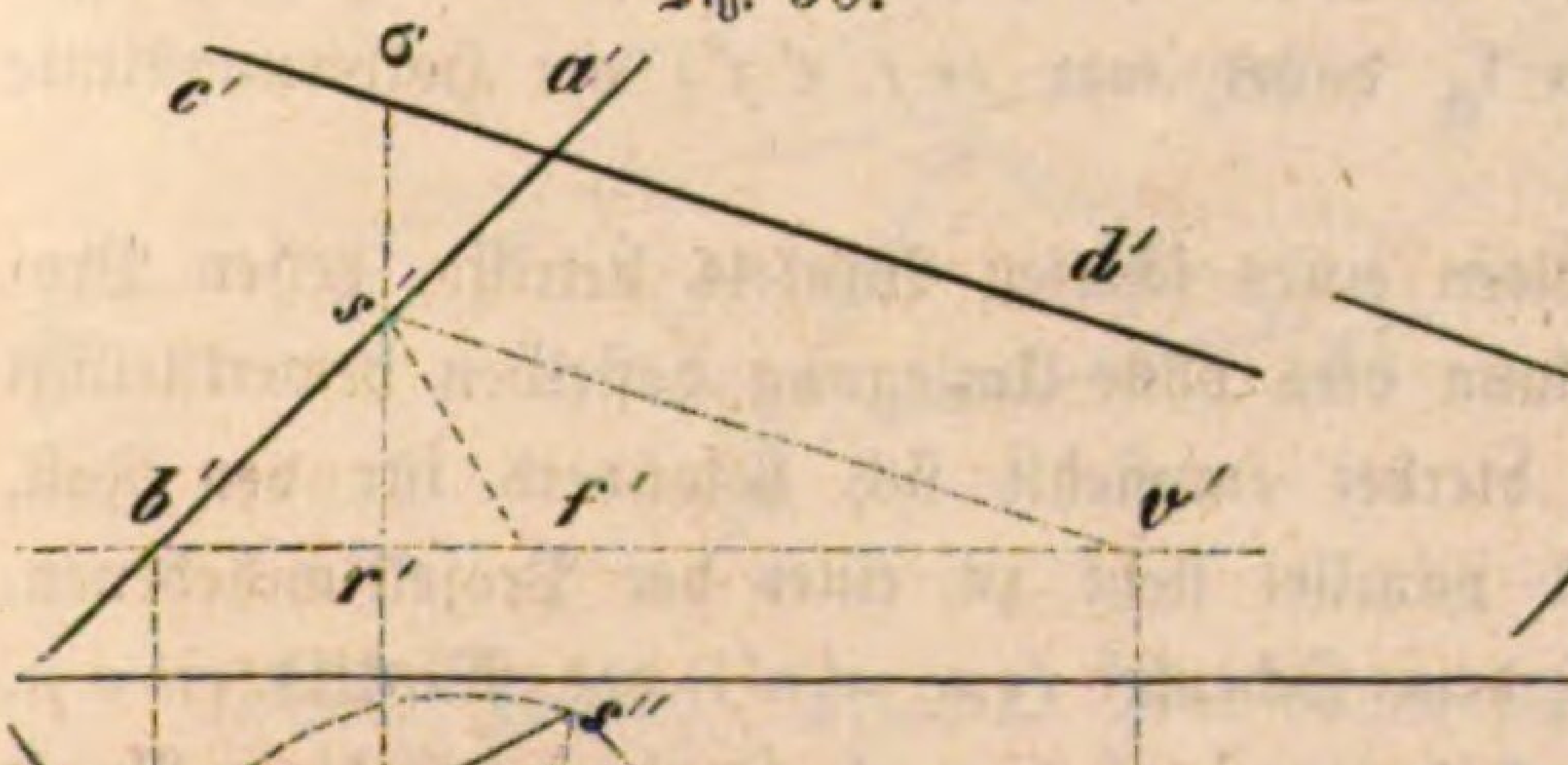
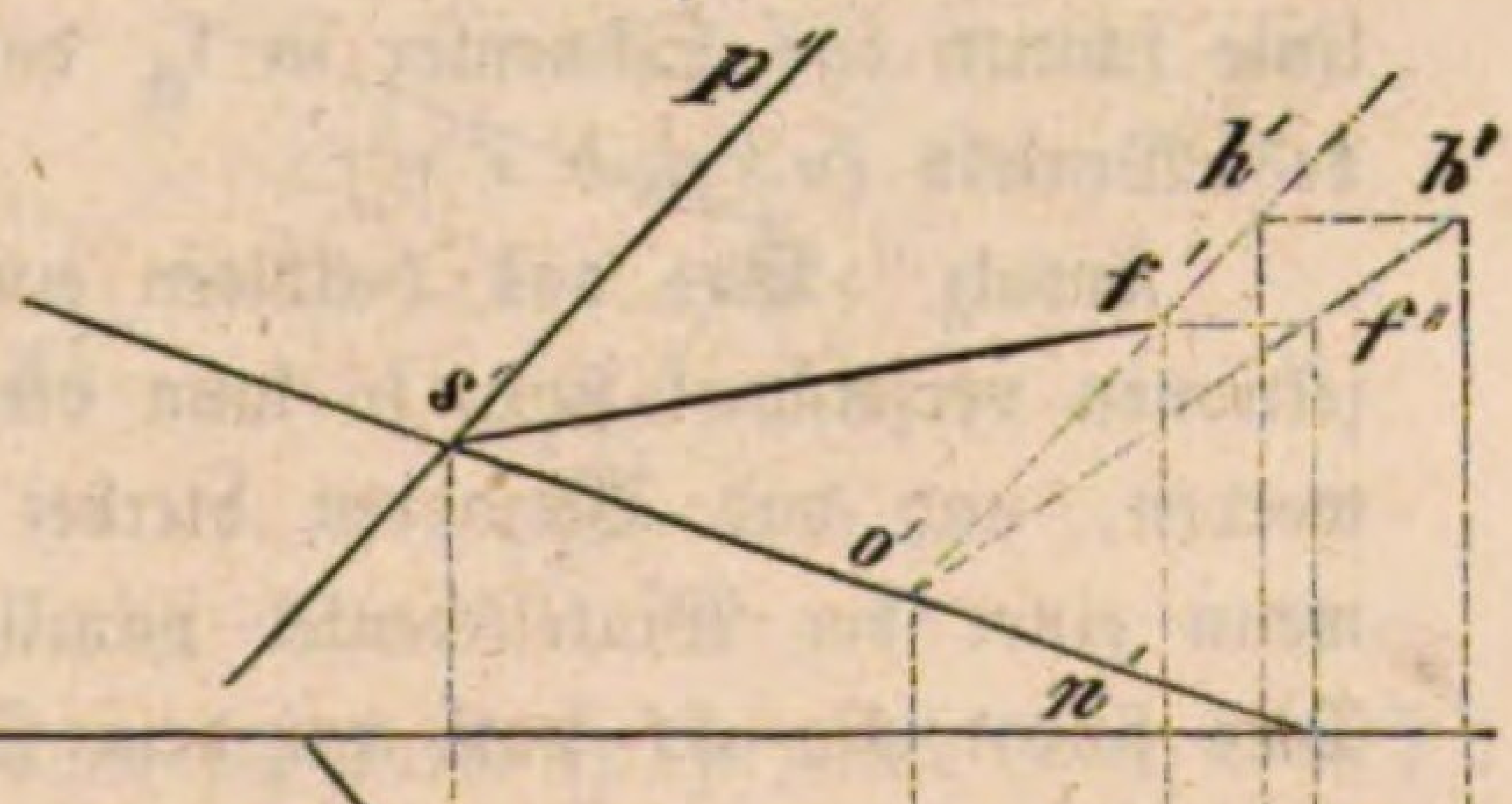


Fig. *51.*



Vorbemerkung. Gerade Linien, welche nicht in derselben Ebene liegen, können weder parallel unter sich sein, noch sich durchschneiden. Die in Fig. *50* gegebenen

geraden Linien sind nun weder parallel, noch schneiden sie sich. Das erstere lehrt schon der Anblick; das zweite ergiebt sich daraus, daß, wenn aus dem Kreuzungspunkte s der Horizontalprojektionen eine Gerade senkrecht gegen die Grundlinie errichtet wird, diese die eine Vertikalprojektion in s′, die andere in σ′ durchschneidet, so daß beide Linien über s in einer Höhe gleich s′ σ′ über einander weggehen.

Von einem Winkel kann bei solchen geraden Linien nur in so ferne die Rede sein, als es sich um die Verschiedenheit ihrer Richtungen handelt. Diese aber bestimmt sich damit, daß man durch einen Punkt der einen von beiden eine Parallele zur andern zieht, und den Winkel dieser zwei Geraden mißt oder verzeichnet.

Als Punkt auf *(a b, a′ b′)* ward derjenige gewählt, der sich nach s projicirt, also vertikal nach s′. Zog man durch letzteren s′ v′ gleichlaufend mit c′ d, so war *(s d, s′ v′)* die Parallele.

Eine wagerechte Ebene b′ v′ schnitt die Ebene der zwei Linien *(a b, a′ b′)* und *(c d, s′ v′)* nach einer Geraden, deren Horizontalprojektion o d ist. Diese diente als Scharnier, um den gesuchten Winkel bis in die horizontale Lage zu drehen; er kam dadurch nach o s″ d, wobei er sich in wahrer Größe zeigte *(s i s″* senkrecht auf *o d*; in dem rechtwinkligen Dreieck *i s t* $s\,t = r'\,s'$; $i\,s'' = i\,t$*)*.

Als Zugabe hat man den Winkel o s″ d noch halbirt. Die Halbirungslinie schnitt das Scharnier in f, daher war *(s f, s′ f′)* die Halbirungslinie des Winkels *(o s d, b′ s′ v′)*.

Zusatz. Was das Halbiren eines schiefen Winkels betrifft, dessen Projektionen verzeichnet sind, so kann dies ohne Umlegung desselben bewerkstelligt werden, und das Verfahren hierbei empfiehlt sich besonders für den Fall, wenn einer der Winkelschenkel parallel steht zu einer der Projektionsebenen. Dies findet Fig. *51* statt mit dem Schenkel *(s n, s′ n′)* des Winkels *(n s p, n′ s′ p′)*. Diesen zu halbiren hat man auf *(s n, s′ n′)* einen beliebigen Punkt *(o, o′)* genommen; durch ihn eine Parallele *(o h, o′ h′)* zu dem Schenkel *(s p, s′ p′)* gezogen, auf diesen die Länge s′ o′ von *(o, o′)* nach *(f, f′)* getragen und dann die Halbirungslinie *(s′ f′, s f)* gezogen.

(o′ h″) Umdrehung von *(o h, o′ h′)*; o f″ = o′ s′; f″ zurückgebracht nach *(f′, f)*. Was die Statthaftigkeit der Konstruktion betrifft, so denke man sich durch *(f, f′)* nur eine Parallele zu *(s o, s′ o′)* gezogen, und man wird erkennen, daß alsdann *(s f, s′ f′)* als Diagonale einer Raute auftrete, welche bekanntlich die Winkel derselben halbirt.

38. **Fünfte Aufgabe.** Aus einem Punkte *(p, p')* Fig. *52* und *53* soll ein Perpendikel *(v w, v' w')* gefällt werden.

Erste Lösung. Man lege durch *(p, p')* Fig. *53* eine Ebene rechtwinklig gegen *(v w, v' w')*, bestimme deren gemeinsamen Durchschnittspunkt *(q, q')* und verbinde diesen mit *(p, p')*.

p r steht rechtwinklig zu v w und p' r' parallel zur Grundlinie, beides sind die Projektionen einer Parallelen zu dem Horizontalriß der durch *(p, p')* zu legenden Ebene. — p' s' steht rechtwinklig gegen v' w' und p s parallel zur Grundlinie; beides sind die Projektionen einer Parallelen zu dem Vertikalriß derselben Ebene. Die projicirende Ebene v w schneidet die Ebene *(r p s, r' p' s')* nach einer Geraden, deren Vertikalprojektion t' s' ist, diese bestimmt q' 2c.

Fig. 52.

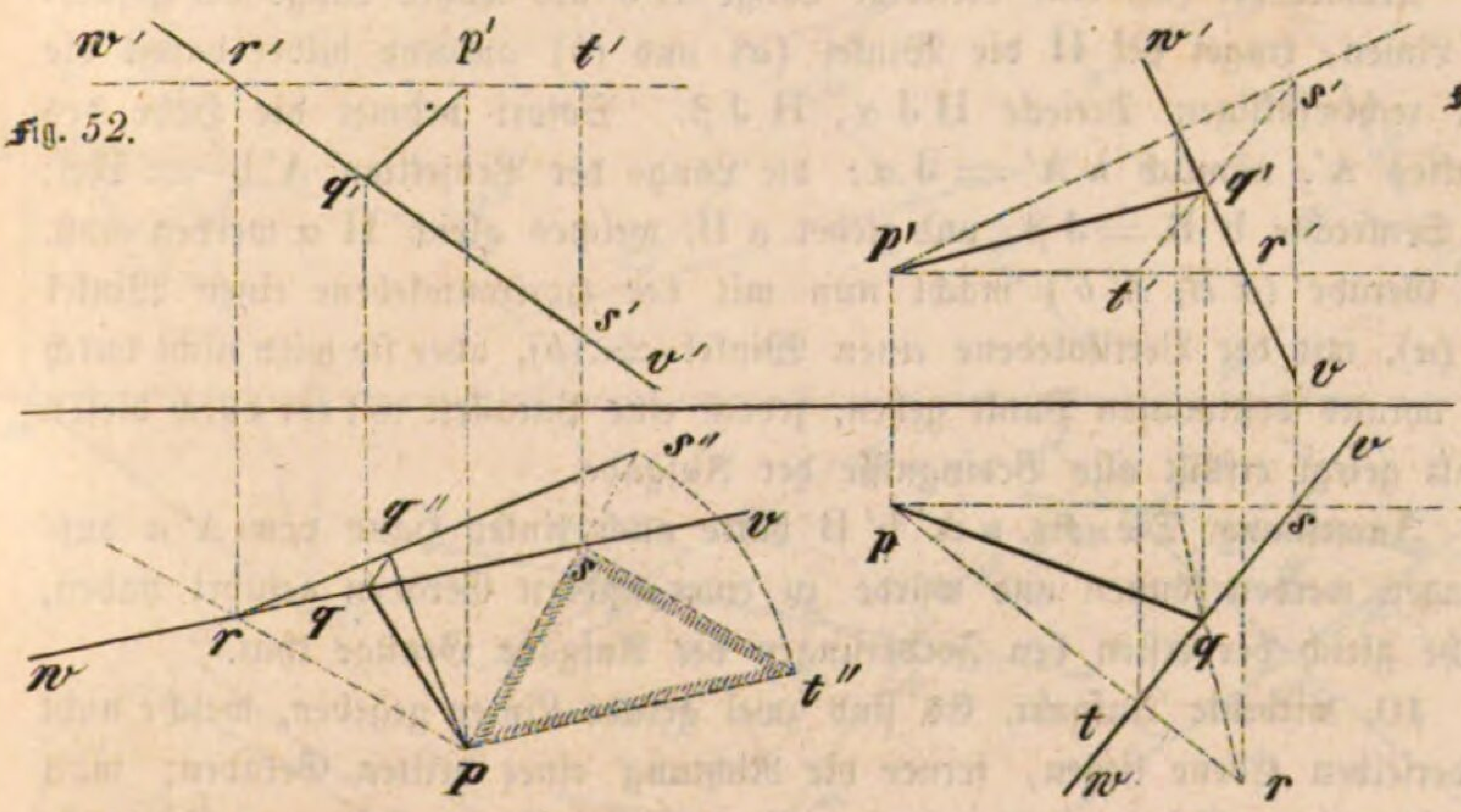


Fig. 53.

Zweite Lösung. Fig. *52*. Man dachte sich durch *(p, p')* und *(v w, v' w')* eine Ebene gelegt; *(r' p', r p)* ist eine wagerechte Linie in dieser Ebene. Um dies *(r p, r' p')* als um ein Scharnier ward die Ebene gedreht, und sammt der *(v w, v' w')* in wagerechte Lage gebracht, wobei die Gerade nach r s'' fiel (*p s s''* rechtwinklig auf *r p*; in dem rechtwinkligen Dreiecke *p s t'' s t''* $=$ *t' s'*; *p s''* $=$ *p t''*). Nun fällte man p q'' senkrecht auf r s'' und brachte den Fußpunkt q'' zurück nach q (*q'' q* senkrecht auf *r p*) 2c.

39. **Sechste Aufgabe.** Durch einen bestimmten Punkt soll eine gerade Linie so gelegt werden, daß sie mit jeder Projektionsebene einen gegebenen Winkel bildet.

Fig. 54. Angenommen $(a\,B,\ A'\,b)$ sei die verlangte Gerade. Erproben wir die Richtigkeit ihrer Stellung. — Die Gerade mit ihrer projicirenden Ebene a B auf die Horizontalebene niedergelegt fällt nach B A″ $(a\,A'' = a\,A')$. A″ B a ist ihr Winkel mit der Horizontalebene und dieser Winkel muß der Bedingung gemäß dem (bei (n) gegebenen) Winkel (a) gleich sein. Sofort werde die Gerade mit ihrer projicirenden Ebene A′ b′ auf die Vertikalebene niedergelegt, wobei sie nach A′ B″ fällt $(b'\,B'' = b'\,B)$ und B″A′ b′ ihr Winkel mit der Vertikalebene ist, welcher, nach Bedingniß gleich (b), Fig. (n) sein muß. — Beachtet man nun, daß in den beiden rechtwinkligen Dreiecken a B A″ und A′ b′ B″ die Hypotenusen gleich sein müssen, weil jede die wahre Größe von $(a\,B,\ A'\,b')$ ausdrückt, so führt dies rückwärts schließend zu folgender Konstruktion.

Nehmet bei (m) eine beliebige Länge H J als wahre Länge der gesuchten Linien, traget bei H die Winkel (a) und (b) an und bildet damit die zwei rechtwinkligen Dreiecke $H\,J\,\alpha$, $H\,J\,\beta$. Sofort nehmet die Höhe des Punktes A′, nämlich $a\,A' = J\,\alpha$; die Länge der Projektion $A'\,b' = H\beta$; die Senkrechte $b'\,B = J\,\beta$, und ziehet a B, welches gleich $H\,\alpha$ werden muß. Die Gerade $(a\,B,\ A'\,b')$ macht nun mit der Horizontalebene einen Winkel $= (a)$, mit der Vertikalebene einen Winkel $= (b)$, aber sie wird nicht durch den voraus bestimmten Punkt gehen, jedoch eine Parallele mit ihr durch diesen Punkt gelegt erfüllt alle Bedingnisse der Aufgabe.

Anmerkung. Die Fig. a A′ b′ B hätte auch linker Hand von A′ a aufgetragen werden können und würde zu einer andern Geraden geführt haben, welche gleich der ersten den Forderungen der Aufgabe Genüge thut.

40. **Siebente Aufgabe.** Es sind zwei gerade Linien gegeben, welche nicht in derselben Ebene liegen, ferner die Richtung einer dritten Geraden; man soll eine vierte Gerade bestimmen, welche parallel ist zur dritten, während sie die beiden ersten durchschneidet.

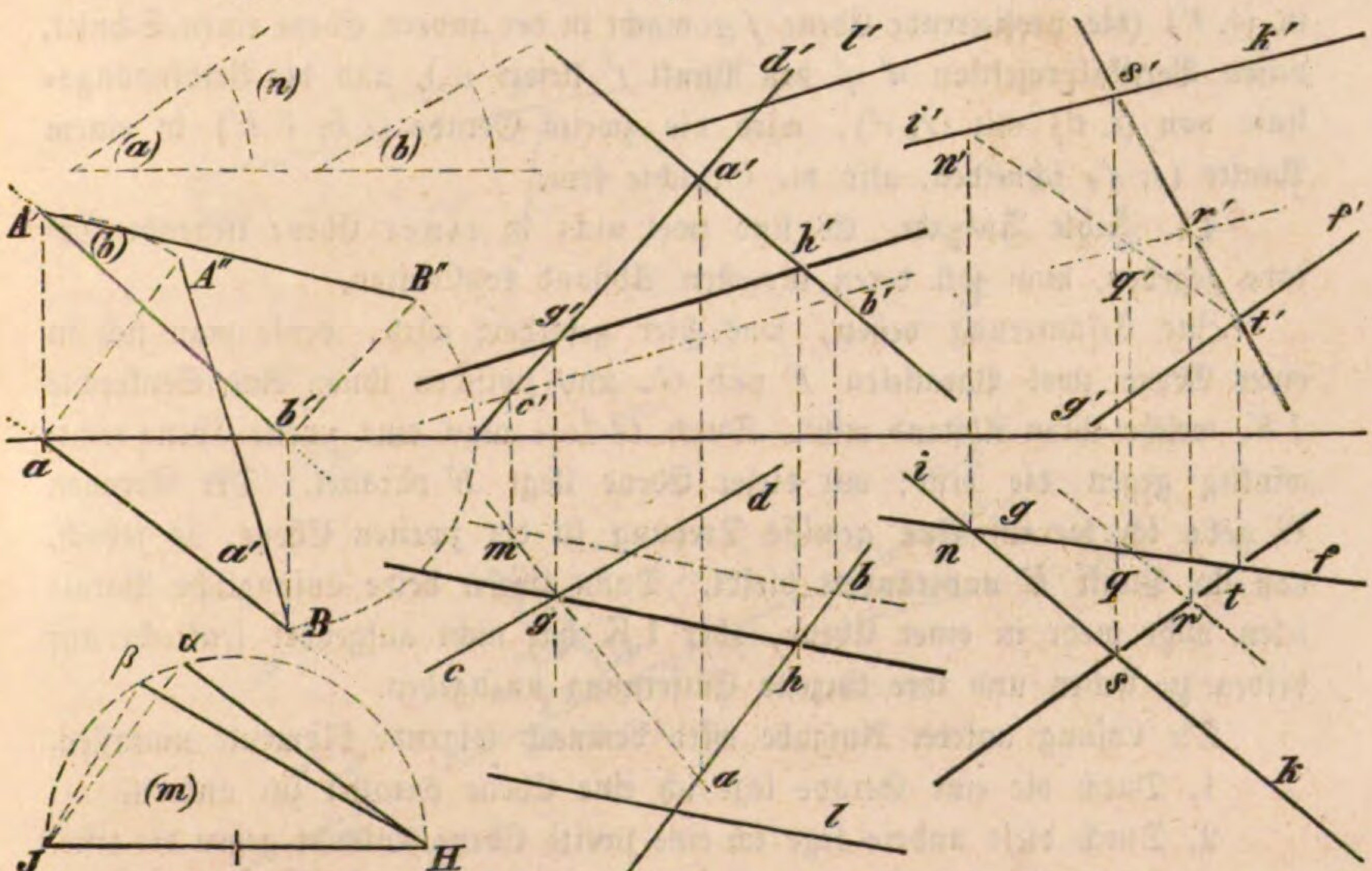
Zur Lösung wird folgender Ideengang führen: Man denke sich durch irgend einen Punkt der ersten Geraden eine Parallele zur dritten gelegt, und lasse sie, stets parallel zu dieser dritten längs der ersten hingleiten, bis sie die zweite Gerade einmal trifft. In dieser Stellung entspricht sie den Bedingnissen der Aufgabe.

Während ihrer Bewegung erzeugt die Gerade eine Ebene, welche durch die erste Gerade geht, während sie mit der dritten parallel ist, und irgend wo in dieser Ebene muß die gesuchte vierte Gerade liegen. Man hätte die Parallele aber auch durch einen beliebigen Punkt der zweiten Geraden legen, und

sie dann längs dieser fortgleiten lassen können. Dies würde eine andere Ebene erzeugt haben, welche durch die zweite Gerade geht und parallel zur dritten ist. Auch diese andere Ebene ist ein geometrischer Ort für die gesuchte vierte Gerade, welche somit keine andere sein kann, als die Durchschnittslinie der zwei Ebenen.

Die graphische Ausführung dieser Konstruktion wird etwas vereinfacht, wenn man nur die erste der genannten Ebenen anordnet, ihren Durchschnittspunkt mit der zweiten Geraden festsetzt und durch diesen Punkt eine Parallele zur dritten Geraden legt, welche, da sie die erste als in einer Ebene mit ihr liegend durchschneiden muß, die verlangte sein wird.

Fig. 54. Fig. 55. Fig. 56.



Ausführung in Fig. 55. $(a\,b,\ a'\,b')$ die erste Gerade, $(c\,d,\ c'\,d')$ die zweite, $(l,\ l')$ die dritte. Durch den Punkt $(b,\ b')$ der ersten zog man $(b\,m,\ b'\,c')$ parallel zu $(l,\ l')$, und dachte sich durch diese und die erste Gerade eine Ebene gelegt. Die zweite Gerade durchschnitt diese Ebene in $(g,\ g')$ (die projicirende Ebene $c'\,d'$ macht in der gedachten einen Schnitt, dessen Horizontalprojektion $a\,m$ auf $c\,d$ den Punkt g abschneidet ꝛc.), durch $(g,\ g')$ zog man eine neue Parallele zu $(l,\ l')$, sie durchschnitt die erste Gerade in $(h,\ h')$ und war die verlangte vierte Gerade.

Zusatz. Verändert man die Aufgabe dahin, daß die gesuchte Gerade immer noch die beiden ersten durchschneiden, dabei aber durch einen bestimmten Punkt im Raume gehen soll, anstatt zu einer gewissen Richtung parallel zu sein, so bringt dies keine wesentliche Veränderung in die Lösung.

In Fig. 56 ist dieser Fall behandelt. $(f g, f' g')$ und $(i k, i' k)$ sind hier die zwei ersten Geraden, welche nicht in einer Ebene liegen, (r, r') der Punkt im Raume, durch welchen die gesuchte Gerade gehen soll.

Man dachte sich eine Ebene durch (r, r') und die Gerade $(i k, i' k')$ gelegt, und um diese konstruktiv zugängig zu machen, führte man durch (r, r') eine Parallele $(r q, r' q')$ zu $(i k, i' k')$, welche Parallele ganz in der genannten Ebene liegen mußte. Die Gerade $(f g, f' g')$ schneidet die Ebene in (t, t') (die projicirende Ebene $f g$ macht in der andern Ebene einen Schnitt, dessen Vertikalprojektion $n' q'$ den Punkt t' liefert 2c.), und die Verbindungslinie von (t, t') mit (r, r'), wird die zweite Gerade $(i k, i' k')$ in einem Punkte (s, s') schneiden, also die Gesuchte sein.

41. Achte Aufgabe. Es sind zwei nicht in einer Ebene liegende Gerade gegeben, man soll deren kürzesten Abstand konstruiren.

Zur Erläuterung dessen, was hier gefordert wird, denke man sich in einer Ebene zwei Parallelen F und G, und zwischen ihnen eine Senkrechte IK, welche ihren Abstand mißt. Durch G lege man eine zweite Ebene rechtwinklig gegen die erste; mit dieser Ebene liegt F parallel. Der Geraden G gebe ich hierauf eine gewisse Drehung in der zweiten Ebene, so jedoch, daß ihr Punkt K unverändert bleibt. Dann liegen beide anfängliche Parallelen nicht mehr in einer Ebene, aber IK hat nicht aufgehört senkrecht auf beiden zu stehen und ihre kürzeste Entfernung anzugeben.

Die Lösung unserer Aufgabe wird demnach folgende Momente umfassen.

1. Durch die eine Gerade lege ich eine Ebene parallel zur andern.

2. Durch diese andere lege ich eine zweite Ebene senkrecht gegen die erste.

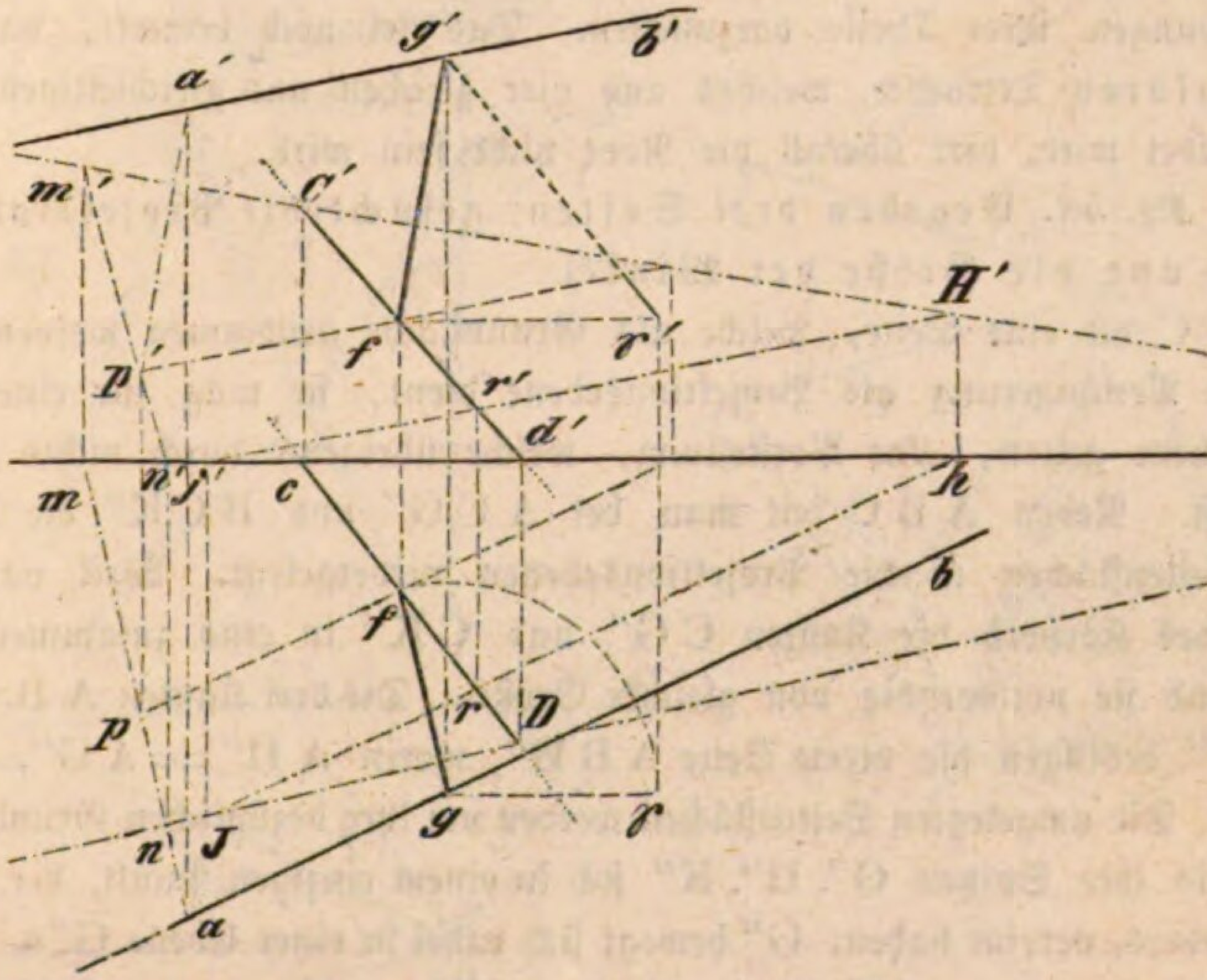
3. Ich suche den Durchschnitt der zwei Ebenen, welcher der zweiten Geraden parallel sein muß.

4. Da wo die erste Gerade und die Durchschnittslinie sich kreuzen, errichte ich eine Senkrechte auf die erste Ebene; diese Linie steht senkrecht auf der ersten und auf dem Durchschnitte, also auch senkrecht auf der zweiten Geraden, welche dem Durchschnitte parallel ist, sie muß endlich die zweite Gerade auch durchschneiden, weil sie mit ihr in der zweiten Ebene liegt.

5. Ich messe das Stück der Senkrechten zwischen den zwei Geraden, welcher ihr kürzester Abstand sein wird.

Ausführung in Fig. 57. $(a\,b, a'\,b')$ die erste Gerade, $(c\,D, C'\,d')$ die zweite. Durch einen Punkt (r, r') auf ihr zog man eine Parallele $(h\,J, H'\,j')$ zur ersten. — Man bestimmte die Durchschnittspunkte D und J, so wie C′ und H′ der zweiten Geraden und der Parallelen mit den beiden Projektionsebenen: man zog die zwei Linien J D und C′ H′. Dies sind die Risse einer Ebene, welche durch die zweite Gerade parallel zur ersten gelegt wird. — Man nahm auf der ersten Geraden einen Punkt (a, a') an, und fällte aus ihm eine Senkrechte $(a\,p, a'\,p')$ auf die Ebene (a p senkrecht auf D J, a′ p′ senkrecht auf C′ D′; $(m\,n, m'\,n')$ Durchschnitt der Ebene D J, C H mit der projicirenden Ebene a p m; daraus $(p'\,p)$ Fußpunkt der Senkrechten $(a\,p, a'\,p')$). — Man dachte sich durch $(a\,b, a'\,b')$ und $(a\,p, a'\,p')$ eine

Fig. 57.



Ebene gelegt, welche auf der D J, C′ H′ senkrecht stehen, und dieselbe nach einer Parallele zu $(a\,b, a'\,b')$ durchschneiden wird, p f, p′ f′ Projektionen dieses Durchschnittes. — In dem Kreuzungspunkt (f, f') errichtete man einen Perpendikel $(f\,g, f'\,g')$ auf die Ebene D J, C′ H′ (f g senkrecht auf D J, f′ g′ senkrecht auf C′ H′). Der Perpendikel schneidet die erste Gerade in (g, g'). — Durch Umdrehung bestimmte man bei $(g\,\gamma, g'\,\gamma')$ die wahre Größe von $(g\,f, g'\,f')$, oder den kürzesten Abstand der zwei Geraden $(a\,b, a'\,b')$ und $(c\,d, c'\,d')$.

Polyedrische Formen.

42. Polyeder, Vielflächner, sind jene körperlichen Formen, welche aus ebenen Seitenflächen gebildet werden. Der einfachste derselben ist das Tetraeder, der Vierflächner, auch dreieckige Pyramide genannt, zugleich auch diejenige, welcher unter den Polyedern eine ähnliche Bedeutung hat, wie das Dreieck unter den Polygonen.

Das Tetraeder wird gebildet aus vier dreieckigen Seitenflächen und hat somit vier dreikantige Ecken und im Ganzen sechs Kanten. Die Seiten, welche an einer Kante zusammenstoßen, bilden hier einen Flächenwinkel, deren also auch sechs an dem Körper vorkommen. Die Aufgaben, welche über das Tetraeder folgen, bestehen darin, aus gegebenen Seiten und Flächenwinkeln, welche wir schlechthin Winkel nennen werden, die Körperform zu bilden und die Beziehungen ihrer Theile darzustellen. Das sei noch bemerkt, daß von dem regulären Tetraeder, welches aus vier gleichen und gleichseitigen Dreiecken gebildet wird, hier überall die Rede nicht sein wird.

43. Fig. *58*. Gegeben drei Seiten; gesucht die Projektion des Körpers und die Größe der Winkel.

A B C die eine Seite, welche als Grundfläche genommen werden kann und deren Verlängerung als Projektionsebene dient, sie mag für eine horizontale Ebene gelten, eine Vorstellung, welche übrigens durch nichts weiter bedingt ist. Neben A B C hat man bei A C G″ und B C K″ die beiden andern Seitenflächen in die Projektionsebenen niedergelegt. Weil nach der Bildung des Körpers die Kanten C G″ und C K″ in eins zusammenfallen müssen, sind sie nothwendig von gleicher Größe. Die drei Kanten A B, A G″ und A K″ bedingen die vierte Seite A B H″, worin A H″ = A G″, B H″ = B K″. Die umgelegten Seitenflächen werden um ihre bezüglichen Grundlinien gedreht, bis ihre Spitzen G″, H″, K″ sich in einem einzigen Punkt, der Spitze des Tetraeders, vereint haben. G″ bewegt sich dabei in einer Ebene G″s, welche auf A C senkrecht steht, H″ in einer Ebene H″ s, welche auf A B senkrecht steht, und K″ in einer auf B C senkrechten Ebene K″ s. Daraus ergiebt sich s als Projektion der Spitze 2c. — Die Höhe der Spitze über der Grundfläche zu erhalten nahm man eine Hülfsprojektion an, deren Grundlinie g′ A b′ rechtwinklig auf A C steht, zog s v′ s′ senkrecht auf die Grundlinie nnd machte A s′ = G″ Y. v′ s drückt die gesuchte Höhe aus.

Weil A b′ zugleich die Projektion der Grundfläche A B C, und A s′ die Projektion derselben Seitenfläche wie s A C, muß b′ A s′ das Maß des Flächenwinkels an der Kante A C sein.

Fig. 58.

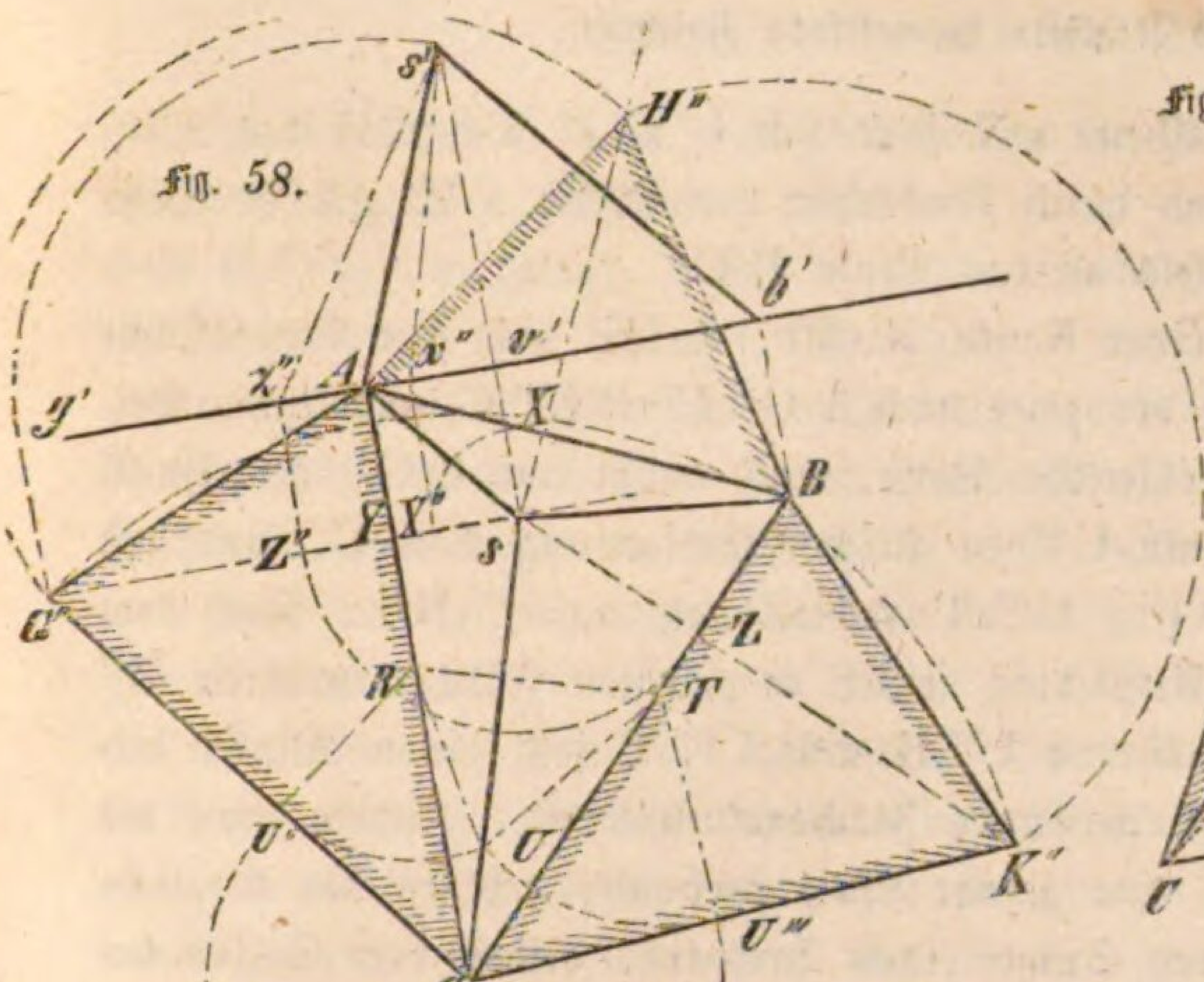


Fig. 59.

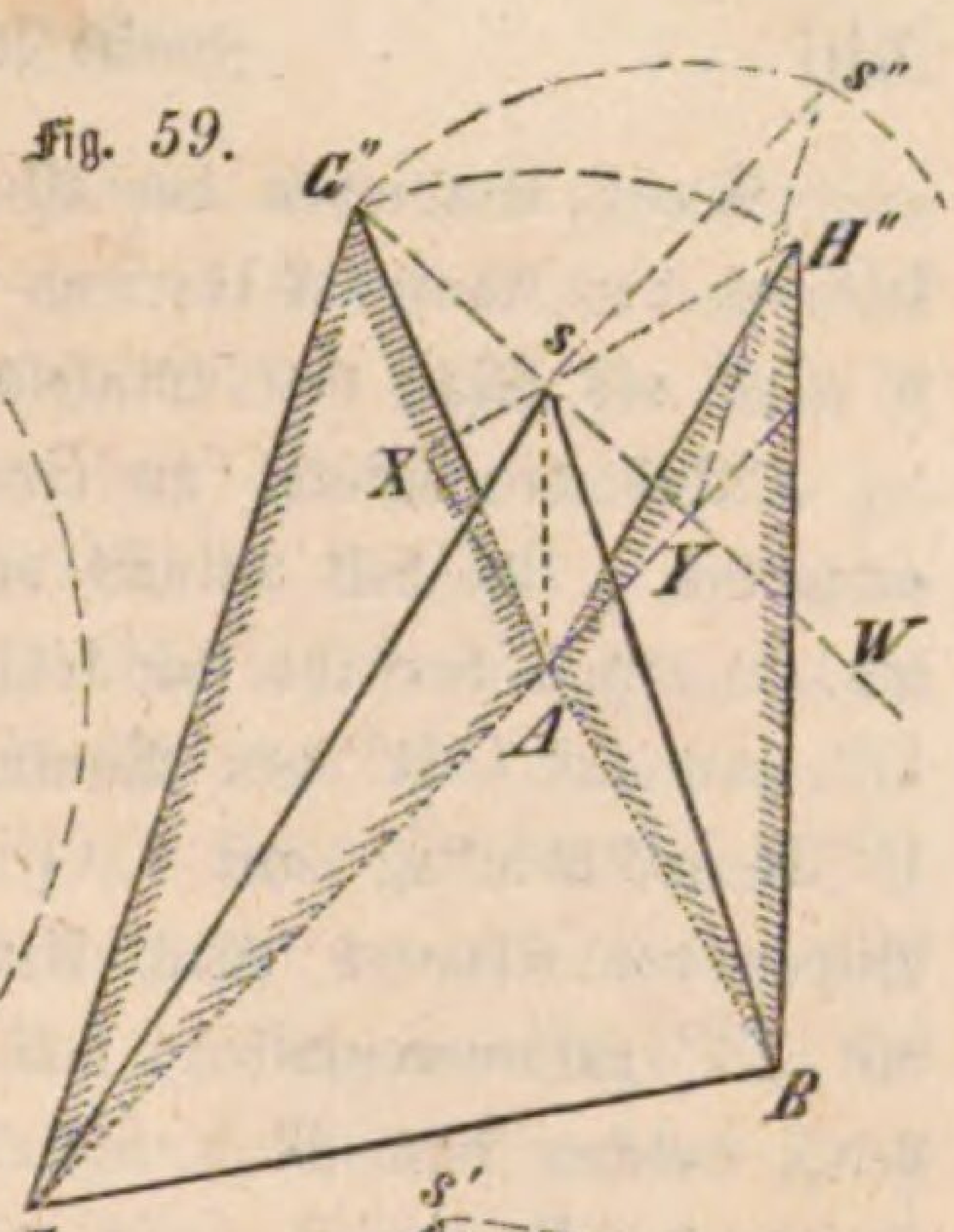


Fig. 60.

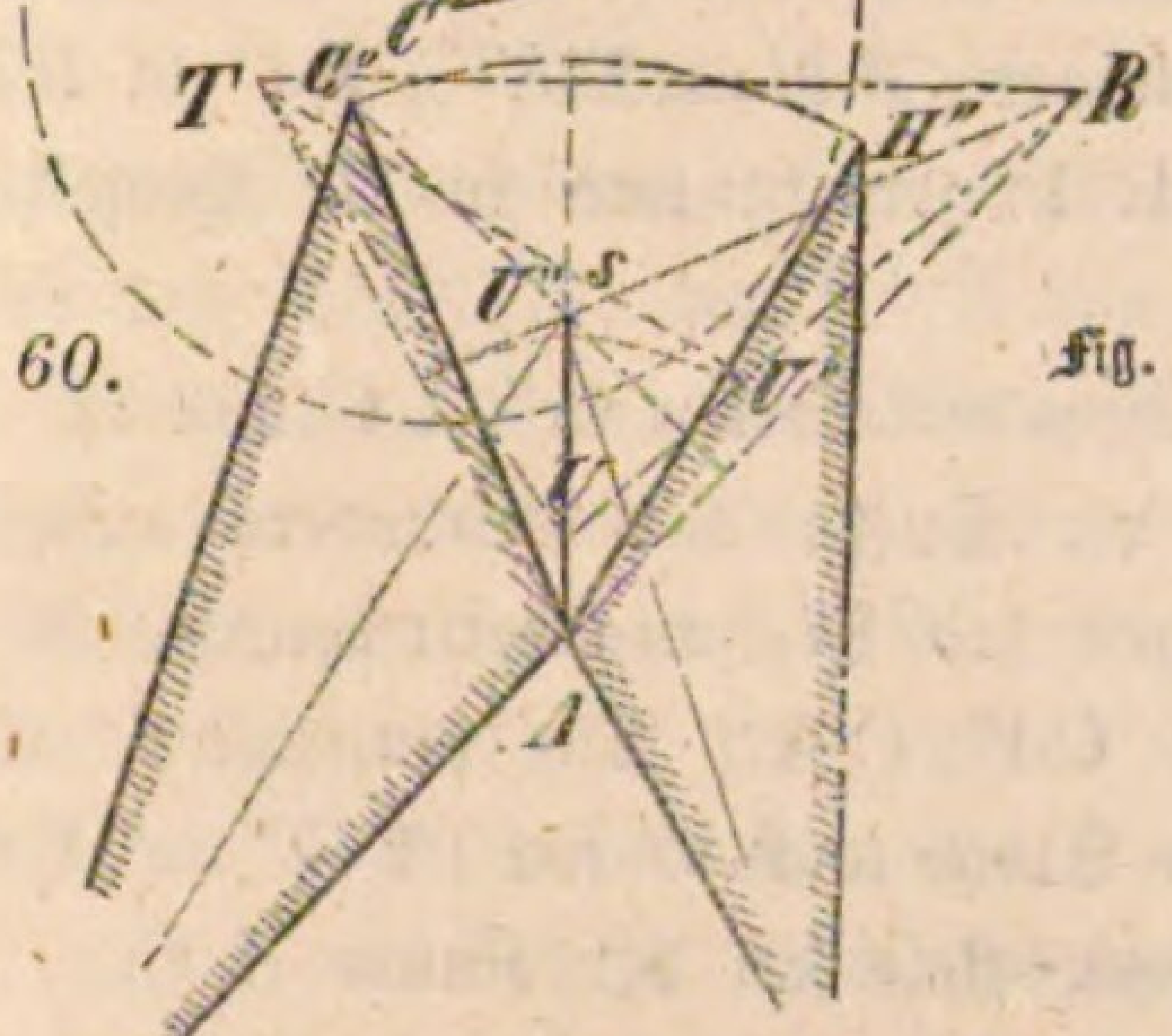


Fig. 61.

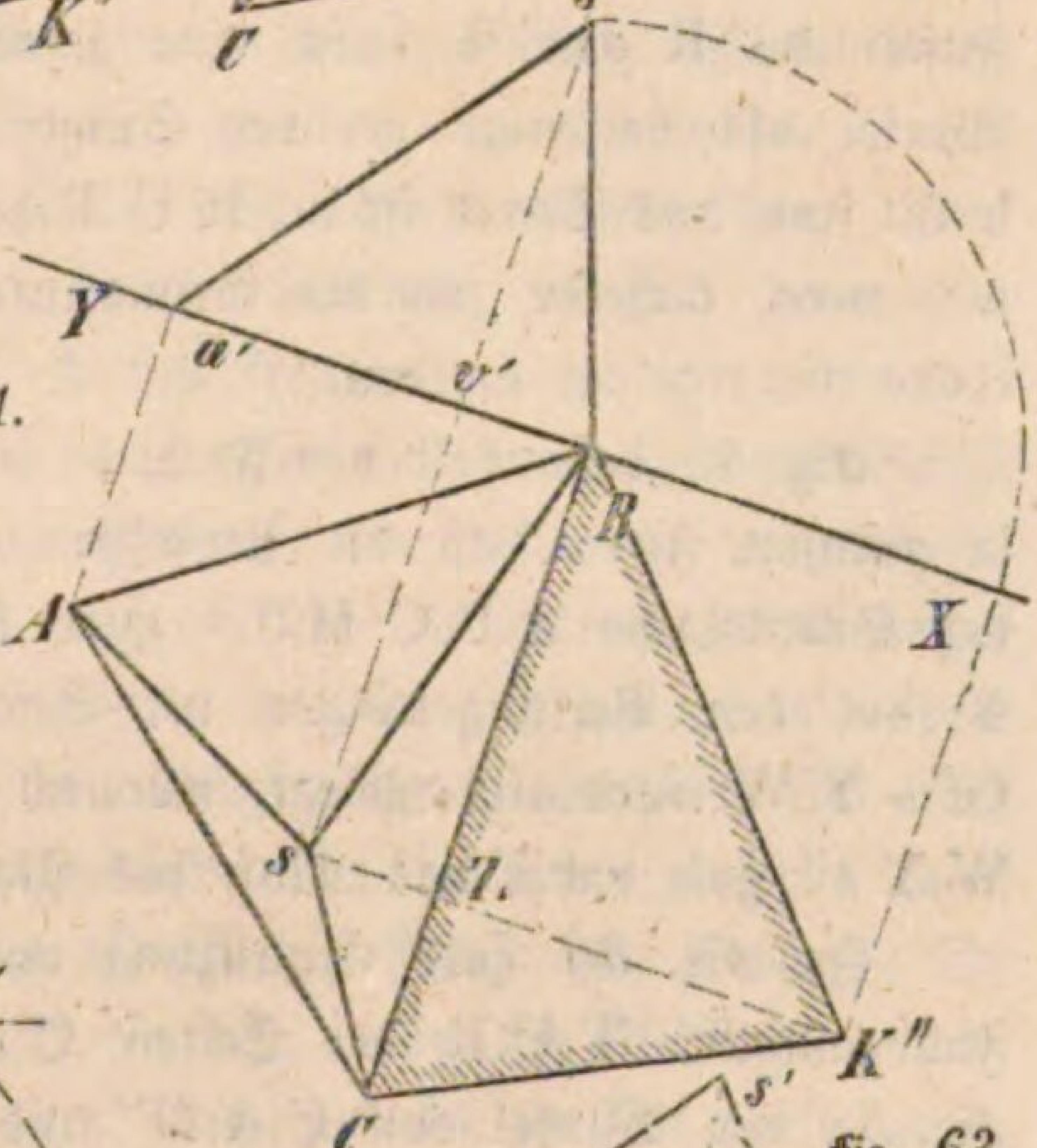


Fig. 62.

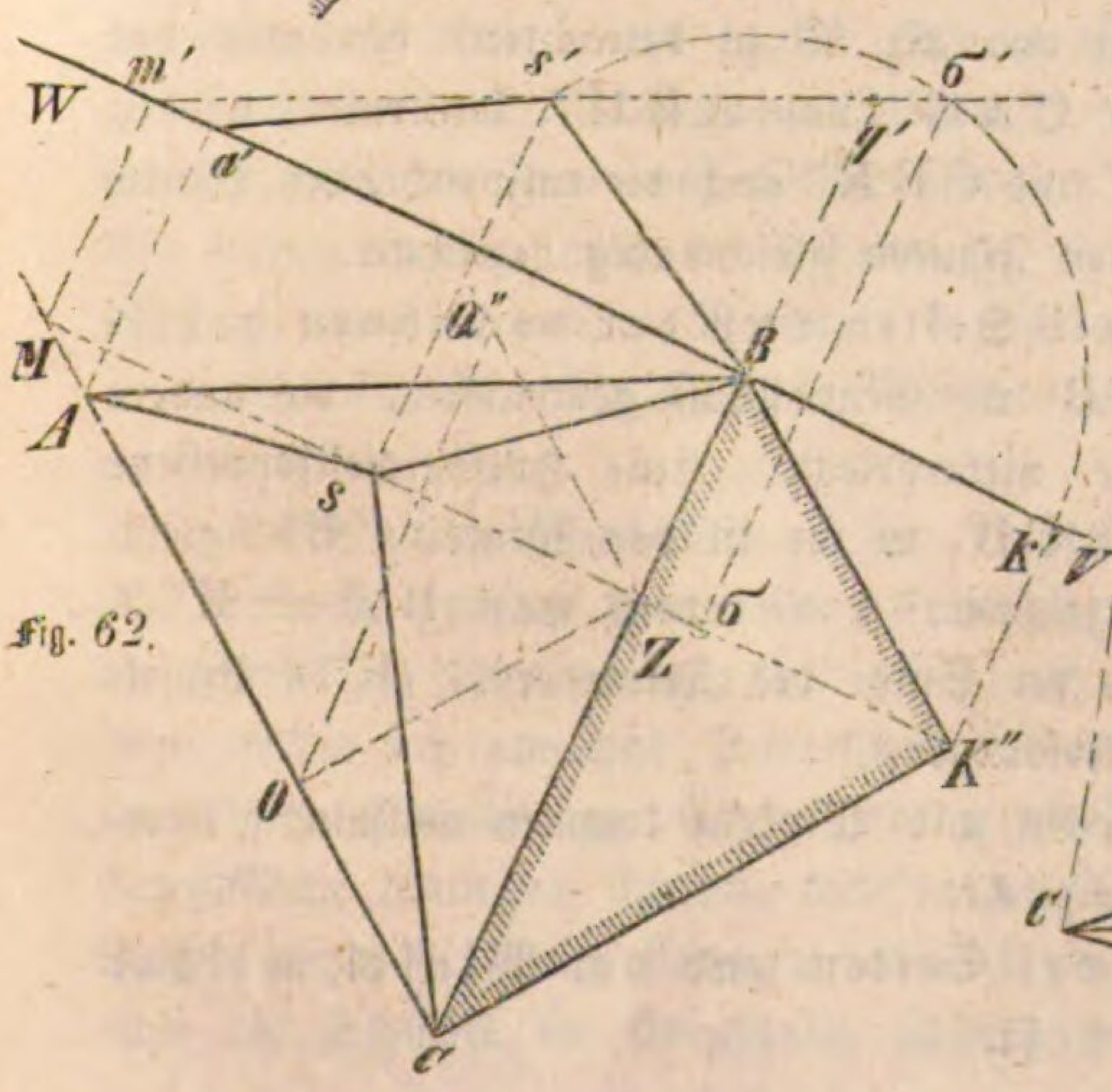
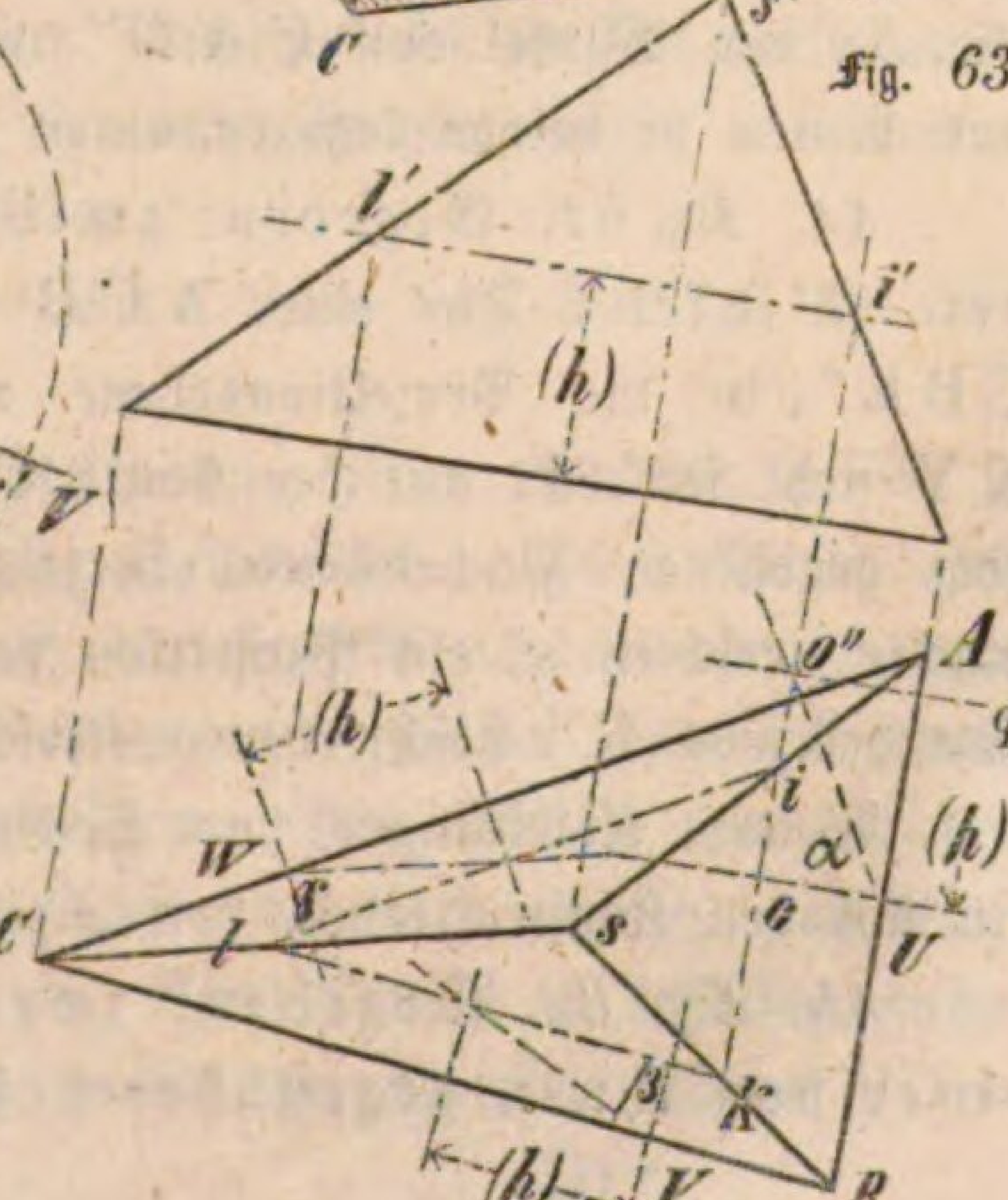


Fig. 63.



Durch Umdrehen der Ebene s X fand sich b′ x″ s′ als Maß des Winkels an der Kante A B; und durch Umdrehen der Ebene s Z gleicher Weise b′ z″ s′ als Maß des Winkels an der Kante B C.

Was die Winkel an einer Kante betrifft, welche nicht der Grundfläche angehört, z. B. den Winkel der zwei nach A G″ C, B K″ C umgelegten Seiten, so ergab derselbe sich folgender Weise: man nahm auf C G″ den Punkt U″ und auf C B″ den Punkt U‴ in gleicher Entfernung von C, und zog U″ R rechtwinklig auf C G″, U‴ T rechtwinklig auf C B″. Nach dem Bilden des Körpers durch Aufrichten seiner umgelegten Flächen mußten U″ mit U‴ zusammenfallen, während U″ R und U‴ T jetzt einen Winkel bilden, welcher das Maß des 'gesuchten Flächenwinkels ist. Indem man die Fußpunkte R und T durch eine gerade Linie verband, erschien der fragliche Winkel als derjenige an der Spitze eines Dreieckes, dessen drei Seiten bekannt sind, das Dreieck ist bei R U T gezeichnet $(T\,U = T\,U''', R\,U = R\,U'')$, als wenn dasselbe um die Grundlinie R T gedreht und in die Projektionsebene niedergelegt worden.

Fig. *59* behandelt den Fall, in welchem die Seiten G″ A C und H″ A B so gestaltet sind, daß die Projektion s der Spitze des Tetraeders außerhalb der Grundfläche A B C fällt. Hier liegen die Drehungsmittelpunkte X und Y auf den Verlängerungen der Seiten C B, C A. Die projicirende Ebene G″ s Y W ward niedergelegt, wodurch die Spitze nach s″ fiel $(Y\,s'' = Y\,G'')$. W Y s″ gab dabei das Maß des Flächenwinkels an der Kante A C.

In Fig. *60* (als Ergänzung von Fig. *59* zu betrachten) hat man den Flächenwinkel T U R der Seiten C A G″ und A B H″, konstruirt, wie in Fig. *58* den Winkel von C A G″ und C B K″ auch die entsprechenden Punkte und Linien in beiden letztgenannten Figuren gleichmäßig bezeichnet.

44. Fig. *61*. Gegeben: zwei Seiten und der von ihnen gebildete Winkel. Die eine A C B als Grundfläche genommen, die andere C B K″ in die Projektionsebene niedergelegt. Eine Hülfsprojektionsebene X Y steht senkrecht auf der Kante C B; in ihr ist der Winkel a′ B s′ gleich dem gegebenen Flächenwinkel verzeichnet, und indem man B s′ = K″ Z machte, erschien s′ als Projektion der Spitze des Tetraeders. (K″ s Projektion des von K″ beschriebenen Kreisbogens.)

Weitere Ableitungen von Seiten und Winkeln kommen vollständig überein mit den Konstruktionen von Fig. *43*.

45. Fig. *62*. Gegeben: zwei Seiten und der Winkel, welcher einer von ihnen gegenüber steht.

A B C und C B K″ die zwei Seiten in gleicher Bedeutung genommen wie auf *Fig. 61.* Gegebener Winkel ist jener an der Kante C A; er ward nach Z O Q″ umgelegt, wobei man die Winkelebene Z O durch den Fuß Z des Perpendikels aus K″ auf C B legte. Wird Z Q″ senkrecht auf O Z gezogen und den Winkel wieder aufgerichtet, so erhält der Schenkel O Q″ über Z eine Höhe gleich Z Q″. Durch diesen Punkt über Z, dessen Höhe gleich Z Q″ ist, und durch die Kante C A denkt man sich nun eine Ebene gelegt, und dann besteht die weitere Aufgabe darin, daß die Seite C B K″ um C B gedreht werde, bis die Kante C K″ in jene Ebene fällt; denn alsdann sind die vier Ecken des Polyeders bestimmt. Bei dieser Drehung der Seite CBK″ beschreibt K″ in vertikaler Ebene einen Kreisbogen, dessen Centrum Z ist und es fragt sich somit, wo dieser Kreisbogen die genannte schiefe Ebene durchschneide. Dies kann aber nur in der geraden Linie geschehen, nach welcher die schiefe Ebene und die Kreisebene sich selbst durchschneiden. Von dem letzteren Durchschnitt nun sind zwei Punkte bekannt, nämlich jener über Z und der Punkt M, wo K″ Z und C A sich kreuzen.

Man kann sofort die Ebene K″ M mit allen in ihr genannten Linien umlegen, den gesuchten Punkt dadurch zu erhalten; wir haben es vorgezogen, die Hülfsprojektionsebene V W parallel mit K″ M zu diesem Zweck anzuwenden. Der von K″ beschriebene Kreisbogen projicirt sich darauf in wahrer Gestalt, der Schnitt der Kreisebene und der schiefen Ebene projicirt sich nach m′ q′ $(B q' = Z Q'')$. Die Begegnungspunkte σ σ′ und s′ projicirt man herab nach σ oder s und (σ, σ′) oder (*s, s′*) ist die Spitze des Körpers. Es giebt nämlich zwei verschiedene Tetraeder, welche beide der Bedingung entsprechen, daß die gegebenen Seiten und der Flächenwinkel an ihm vorkommen. Wir haben angenommen, der Scheitel (*s, s′*) entspreche demjenigen von beiden Körpern, welchen weitere Merkmale bezeichnen.

46. *Fig. 63.* Es ist die Grundfläche und die Winkel an ihr gegeben.

A B C die Grundfläche. Die Winkelebenen stehen bei U, V, W je eine senkrecht auf der betreffenden Kante der Grundfläche. Diese Ebenen und die Winkel in ihnen wurden bei α β γ auf die Projektionsebene niedergelegt. Man dachte sich nun das Tetraeder gebildet und in gewisser Höhe (*h*) durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten. Der Schnitt war ein der Grundfläche ähnliches Dreieck, welches sich nach i k l so projicirte, daß seine Seiten denen der Grundfläche parallel liegen. Dies Dreieck zu erhalten mußte man die Schnitte in Erwägung ziehen, welche die parallele Ebene in den

drei Winkelebenen hervorbrachte. Bei der Ebene U o war dieser Schnitt der Projektion U o parallel und hatte einen Abstand von ihr gleich der Höhe (h). Bei umgelegter Winkelebene fiel derselbe Schnitt nach q″ o″ parallel zu U o und in einem Abstande von ihr gleich (h); er traf hier den umgelegten Schenkel des Winkels α in o″. Nach dem Wiederaufrichten der Winkelebene projicirte o″ sich nach o, welcher Punkt der Dreiecksseite k i angehört. Aehnlich wurde bei den Winkeln β und γ gearbeitet. Mit den Punkten k, i, l waren die Richtungen der Projektionen der drei oberen Kanten des Tetraeders bestimmt ꝛc.

Anmerkung. In so ferne es sich lediglich um die Bildung eines der dreikantigen Ecke des Tetraeders handelt, sind hier noch folgende zwei Aufgaben in Betracht zu ziehen.

1. Es sind gegeben eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberstehender Winkel; z. B. in Fig. *61* die Seite A B C, der Winkel an der Kante C B und derjenige an der Kante (Cs, Bs'). Nachdem man hier durch C B eine Ebene unter dem bestimmten Winkel gelegt, bleibt durch C A eine zweite Ebene unter dem gleichfalls bestimmten Winkel mit der ersten zu legen. Die Aufgabe ist gleichlautend mit derjenigen von §. 35, indem hier nur die gerade Linie wagerecht, die dortige Horizontalebene aber jetzt schief gestellt ist.

2. Es sind die drei Winkel an einem Ecke gegeben: die Aufgabe ist nur eine Verallgemeinerung derjenigen von §. 34, und ihre Lösung erfordert nur eine leichte Aenderung des dort eingehaltenen Verfahrens.

Beziehen die letzten zwei Aufgaben sich auf ein Tetraeder, so bleibt ergänzend noch das Nöthige über die Lage seiner vierten Fläche beizufügen.

Einige Dachzerlegungen.

47. Dachzerlegung nennt man in der Zimmerwerkskunst das Anordnen der verschiedenen Außenflächen eines Daches, dessen wagerechter Umfang oder Traufe gegeben ist. Rein geometrisch genommen handelt es sich dabei um Aufgaben, wie deren in den vorigen §§. bezüglich des Tetraeders vorgelegt waren. In der Praxis steht die Dachzerlegung in Verbindung mit denjenigen Arbeiten, welche die Zimmerleute das „Schiften“ nennen, deren Zweck ist, denjenigen Holzstücken, woraus das Sparrenwerk eines Daches besteht, die gehörige Form zu geben.

Fig. *64* ein Walmdach.

Die horizontale Ebene der Dachtraufe ist hier als Projektionsebene ge-

nommen und darin das Viereck F G J H als äußerer Umfang der Dachung gegeben. Die Langseiten H F, J G sind parallel, bei H und J rechte, bei F und G schiefe Winkel. Der Querschnitt des Daches durch eine Ebene wie M N, welche auf den Langseiten senkrecht steht, hat die Gestalt eines gleichschenkligen Dreieckes h′ k′ j′ (Fig. *m*), dessen Höhe w′ k′ häufig der halben Grundlinie h′ j′ gleich, bei modernen Bauten aber meist geringer genommen wird. Die zwei Langseiten des Daches schneiden sich nach einer Parallelen $(l\,k,\ k')$ zu F H, welche der First des Daches heißt. Die Dach-

Fig. 64.

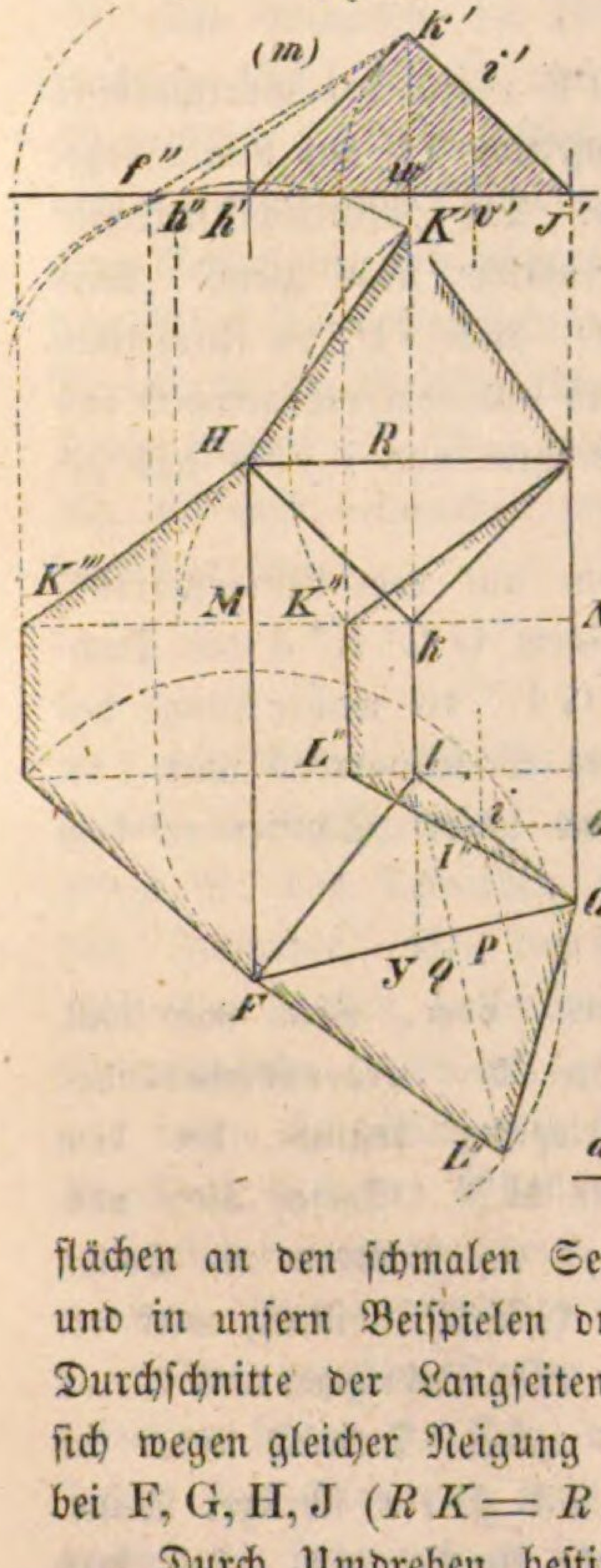
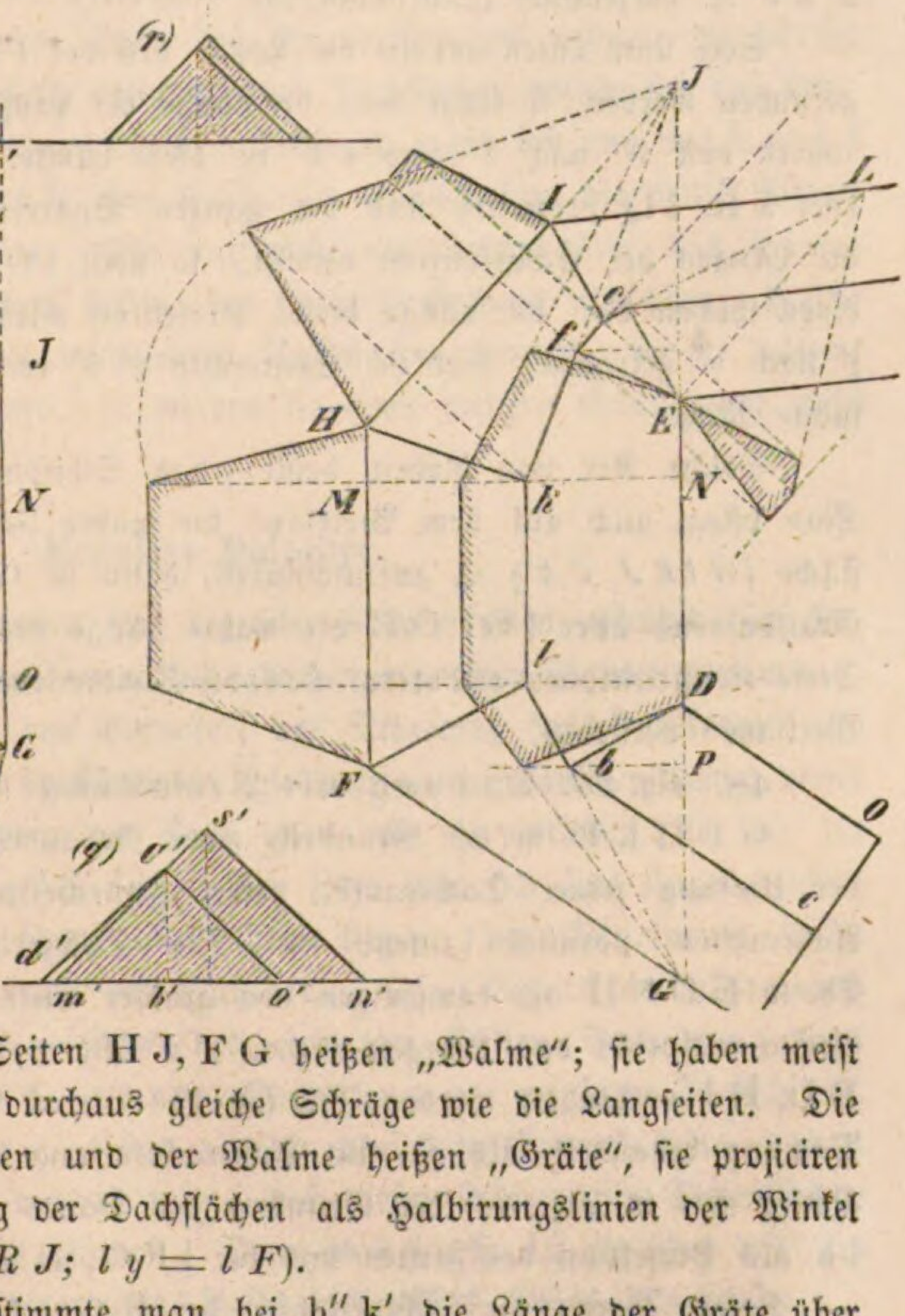


Fig. 65.



flächen an den schmalen Seiten H J, F G heißen „Walme"; sie haben meist und in unsern Beispielen durchaus gleiche Schräge wie die Langseiten. Die Durchschnitte der Langseiten und der Walme heißen „Gräte", sie projiciren sich wegen gleicher Neigung der Dachflächen als Halbirungslinien der Winkel bei F, G, H, J $(R\,K = R\,J;\ l\,y = l\,F)$.

Durch Umdrehen bestimmte man bei h″ k′ die Länge der Gräte über H K, J K, bei f″ k′ des Grates über F l 2c.

Die Dachfläche an der Traufe J G hat man auf die Grundrißebene

nach J K″ L″ G umgelegt; die gegenüberstehende Fläche nach links auswärts; die Walmflächen nach oben und unten; dabei sind R K″, N K″, M K″, Q L″ sämmtlich gleich k′ j′ oder k′ h′ ꝛc.

In der Praxis der Zimmerwerkskunst wird unter dem Namen „Lehrgespärre" aus Sparren und Balken eine Figur zusammengefügt, ähnlich unserm Durchschnitte Fig. (*m*). Dies Lehrgespärre dient auch als gleichsam verkörperter Durchschnitt. Seine Ergänzung bildet ein ähnlich verkörperter Grundriß, welche „Werksatz" genannt wird. Dieser Werksatz besteht aus dem zusammengefügten Bodengebälke, auf welchen man die Projektionen l F, l G, k, k J ꝛc. verzeichnet („aufschnürt").

Soll nun unter andern die Länge des bei l F projicirten Gratsparrens gefunden werden, so trägt man die Länge der Projektion l F auf dem Lehrgespärre von w′ nach f″ und s′ f″ ist diese Länge. Die „Mittelschiftsparren" (bei k R, l Q projicirt) sind der ganzen Sparrenlänge h′ k′ gleich. Was die Längen der Schiftsparren betrifft, so stellt i O, auch i P, die Projektion eines solchen dar, die Länge dieser Projektion wird auf dem Lehrgespärre von j′ nach v′ getragen, hier die Senkrechte v′ i′ errichtet und i′ j′ ist das gesuchte Maß.

Solche Art von Arbeit heißt „das Schiften auf dem Lehrgespärre". Man pflegt auch auf dem Werksatze die wahre Form G L″ K″ J der Dachfläche (*G l k J, i′ k′*) ꝛc. aufzuschnüren, dann ist G L″ die wahre Länge des Gratsparrens über l G; O i″ die wahre Länge des Schiftsparrens über i O. Diese Konstruktionen erläutern, was die Zimmerleute unter „Schiften auf dem Werksatze" verstehen.

48. Fig. *65*. Dachung mit Verfallungen.

G F H L D ist der Grundriß eines Gebäudes, oder, wenn man will, der Umfang seiner Dachtraufe, deren Innenseiten den gegenüberstehenden Außenseiten parallel laufen. — Die Dachzerlegung beginnt bei dem Theile E D F H als demjenigen von größter Tiefe M N. Dieser Tiefe oder Breite entspricht das Lehrgespärre m′ s′ n′ Fig. (*q*). — Nachdem die Seiten E D, H I verlängert worden, bis sich das Viereck G F H J bildete, wird die Dachung behandelt, als ob, mit Außerachtlassung alles Uebrigen, dies Viereck ähnlich wie in Fig. *64* der Grundriß des Baues wäre. Dadurch findet sich l k als Projektion des Firstes und bei l F G, H k J je ein schräger Walm. — Sofort kommt die „Widerkehr" bei F G c D in Betracht. Der First projicirt sich als die Parallele d c zu F G oder D O, welche ihren Zwischenraum halbirt. Indem die doppelte Breite c O in Fig. (*q*) von m′ nach o′

getragen und das dem größeren Dreiecke m′ n′ s′ ähnliche Dreieck m o′ c′ gezeichnet wird, hat man somit das Lehrgespärre dieser Widerkehr. Der First und der Grat über l G schneiden sich in einem Punkte, wovon b′ die Projektion. Dieser Punkt hat die Höhe von c′, Fig. (*q*), daher findet von l nach b eine „Verfallung" statt in einem Betrage gleich dem Höhenunterschied von s′ und c′ Fig. (*q*). Ueber D b macht somit die Dachfläche einen einspringenden Winkel. Will man die Länge des in b D projicirten Kehlsparrens auf dem Lehrgespärre finden, bleibt nur b D in Fig. (*q*) von b′ nach d′ zu tragen und c′ d′ zu entnehmen.

Die Widerkehr bei H I betreffend zog man E L parallel zu H I, betrachtete H I L E als oberes Ende des Grundrisses und ordnete die schräge Walmfläche I e L an. Auf die entsprechenden Dachflächen bezieht sich das Lehrgespärre Fig. (*r*). In Verbindung mit dem Früheren ergab sich nun von k nach f eine Verfallung und über f E eine Kehle. — Endlich kam die dritte Widerkehr bei I L in Bearbeitung. Ihr entspricht als Lehrgespärre das kleinere Dreieck in Fig. (*r*): sie führte bei e eine kleine Verfallung und über e E eine Kehle herbei 2c. Was die umgelegten Dachflächen betrifft, welche unserer Fig. *65* noch beigegeben sind, so werden sie einer weitern Erläuterung nicht benöthigt sein.

Reguläre Polyeder.

49. Bekanntlich hat man fünf reguläre Körperformen, nämlich fünf Polyeder, deren Oberfläche aus unter sich gleichen regulären Figuren zusammengesetzt ist: das Tetraeder, das Hexaeder, das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder. Bei der vollkommen gleichartigen Zusammensetzung dieser Gestalten müssen nothwendig an einer jeden alle körperlichen, so wie die Flächenwinkel unter sich gleich sein. Bei jeder läßt sich eine Kugel denken, auf deren Oberfläche die sämmtlichen Ecken liegen; der Mittelpunkt dieser Kugel ist auch der Mittelpunkt des Polyeders. Diese Eigenthümlichkeiten und noch einige andere, deren wir bei den einzelnen Fällen Erwähnung thun werden, leiten in einfacher Weise zu den Projektionen der regulären Vielflächner.

Das reguläre Tetraeder hat regulär dreieckige Seitenflächen; je drei derselben bilden ein Eck; daraus folgt, daß dieser Körper vier Seitenflächen habe, vier Ecken und sechs Kanten. Dem, was in §. 42 2c. über das Tetraeder im Allgemeinen vorgetragen, bleibt hier nichts Neues beizufügen.

50. Das reguläre Hexaeder hat quadratische Seitenflächen, deren je drei ein Eck bilden. Somit hat der Körper sechs Flächen, acht Ecken und

zwölf Kanten, mit einem Worte es ist der Würfel. Wie derselbe in beliebiger Stellung zu zeichnen, erhellt aus dem Seite 68 bis 77 Vorgetragenen. Nur der besondere Fall soll hier berührt werden, wenn nämlich eine der Diagonalen oder ein Durchmesser des Körpers senkrecht steht. Daß hierbei der Umfang seiner Horizontalprojektion ein reguläres Sechseck sei, ist Seite 42 entwickelt worden. Mit Hülfe des Sechseckes ward auch die Horizontalprojektion Fig. *66* gezeichnet. Hier nun müssen die drei Ecken, welche sich nach d, e, f projiciren, gleich hoch sein; deshalb giebt e d die wahre Größe der Diagonalen einer Quadratseite des Körpers. In dem rechtwinkligen Dreiecke c o i, dessen Hypotenuse c i $= \frac{1}{2}$ e d, darum ist die Seite i o gleich der Höhe der drei in e, d, f projicirten Ecken oder gleich einem Drittheil der Höhe des ganzen Körpers, womit alles zum Entwurf der Vertikalprojektion bestimmt wird.

51. Das reguläre Oktaeder hat gleichseitig dreieckige Flächen und vierkantige Ecken, dies führt auf acht Seitenflächen, sechs Ecken und zwölf Kanten der Körperform. Vier von den Dreiecken, welche mit ihren Spitzen an einem Eck zusammen stoßen, bilden mit ihren Grundlinien ein Quadrat, insgesammt also eine quadratische Pyramide und damit die Hälfte des Oktaeders. Nimmt man jenes Quadrat als parallel zu einer Projektionsebene, so folgt daraus in einfachster Weise eine Projektion des Körpers als doppelte auf der Spitze stehende Pyramide, woraus andere Stellungen abzuleiten sind.

Fig. *67* behandelt in unmittelbarer Weise den Fall, wenn eine der Seiten in der horizontalen Projektionsebene liegt. s t u ist diese Seite; die an t s stoßende Seite nach t v'' s umgelegt. s als Spitze der vierkantigen Pyramide genommen und die quadratische Basis, welcher t u angehört, nach t p'' q'' u umgelegt. Nach dem Wiederaufrichten werden v'' und p'' zusammentreffen und sich nach v projiciren, q'' nach w (v w gleich und parallel mit t u). — An dem Oktaeder sind je zwei gegenüberstehende Flächen parallel, deshalb das gleichseitige Dreieck v z w Projektion der oberen Seite &c. In dem rechtwinkligen Dreieck s v y, dessen Hypotenuse s y = s r'', giebt v y die Höhen der drei in v, w, z projicirten Punkte. — Fig. *67* (*b*) Vertikalprojektion des Oktaeders auf einer Ebene X Z, welche zu t u parallel steht.

Anmerkung. Beachtet man die Stellung des obersten und untersten Dreieckes in Fig. *67*, so wird ersichtlich, daß der Umfang der Horizontalprojektion des Körpers ein reguläres Sechseck sei. Dies Verhältniß wäre von vorn herein zu erkennen gewesen und hätte unmittelbar zum Entwurfe unserer Zeichnung geführt. Indem wir aber durch Umlegen und Wiederaufrichten der Seiten die Flächen- und Körperwinkel bildeten, gab uns dies Gelegenheit,

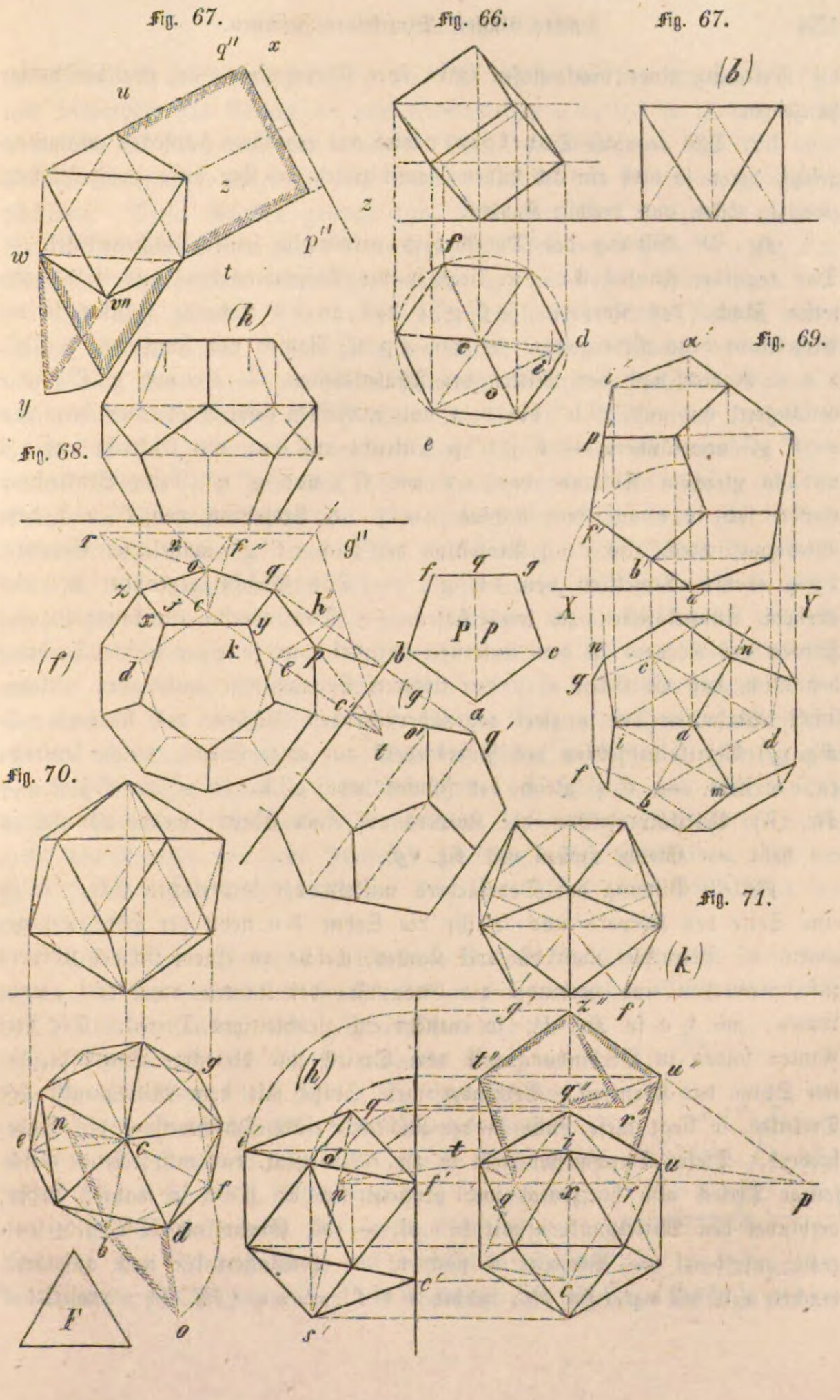


Fig. 67. Fig. 66. Fig. 67. Fig. 68. Fig. 69. Fig. 70. Fig. 71.

die Zerlegung eines vierkantigen Eckes oder Körperwinkels in zwei dreikantige zu zeigen.

52. Das reguläre Dodekaeder wird aus regulären Fünfecken zusammengesetzt, deren je drei ein Eck bilden; somit treten an ihm auf: zwölf Flächen, zwanzig Ecken und dreißig Kanten.

Fig. *68* Bildung des Dodekaeders vermittelst seiner Flächenwinkel. — Das reguläre Fünfeck d c e ꝛc. liegt in der Projektionsebene und ist die unterste Fläche des Körpers. c f″ g″ e das an c e stoßende Fünfeck in die Projektionsebene niedergelegt. — c o, e p ꝛc. Radien des Fünfeckes; y q g″, x z ꝛc. Radien nach den Mitten der Fünfecksseiten. — e c und g″ f″ bis r verlängert, c e und g″ h″ bis t; t und z bleiben beim Wiederaufrichten von e c f″ g″ unverändert — f″ j, h″ p senkrecht auf c e; n o senkrecht auf c d und in gleichem Abstande von x z wie f″ j und g″ q, beide Senkrechten treffen sich in o auf dem Radius c o — o Projektion von f″ nach dem Wiederaufrichten, also r o q Projektion der nach r f″ g″ umgelegten Geraden. t p q ebenso Projektion von t h″ g″. — Das Gleiche gegenüber der vier übrigen Fünfecksseiten zu wiederholen. — Das oberste (starkausgezogene) Fünfeck des Körpers ist dem untersten parallel, nur in einer zehntel Drehung befindlich, daß die Ecken x, y den unteren Seitenmitten entsprechen. Aehnliches Verhalten bei je zwei gegenüberstehenden Flächen des Körpers. — Fig. (*g*) Vertikalprojektion des Dodekaeders auf einer Ebene, welche senkrecht zu c e steht. — c′ q′ gleich der Fünfeckshöhe g″ k. c′ o′ = f″ j ꝛc. — Fig. (*h*) Vertikalprojektion des Körpers auf einer Ebene, welche parallel zu c e steht. — Gleiche Höhen mit Fig. (*g*).

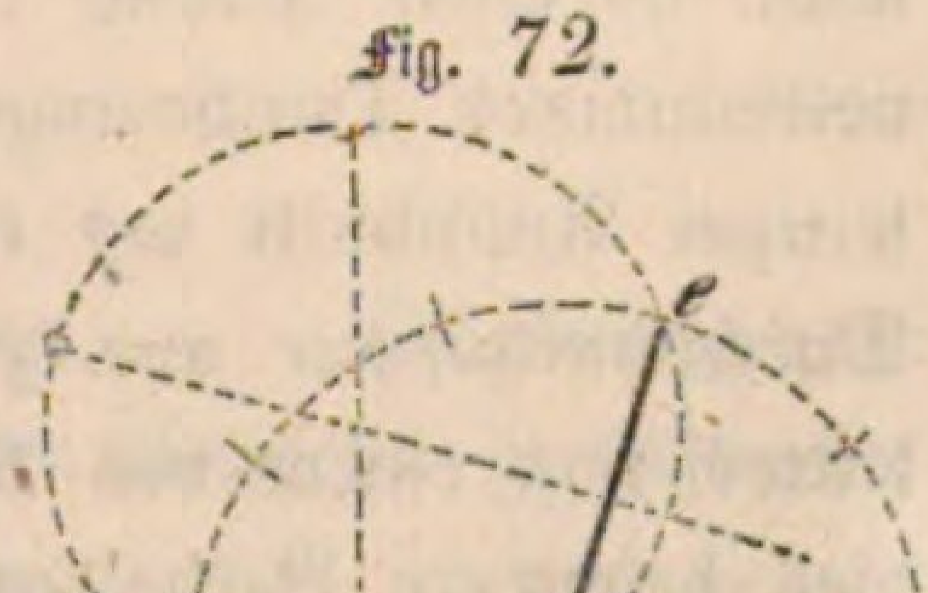
Fig. *69* Bildung des Dodekaeders mittelst der körperlichen Ecke. *P* ist eine Seite des Körpers und in ihr die Sehne b c nebst der Höhe a q gezogen. — Betrachtet man die drei Kanten, welche an einem Eck des Körpers zusammenstoßen und verbindet die Endpunkte der Kanten durch drei gerade Linien, wie b c in Fig. *P*, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck. Die drei Kanten bilden in Verbindung mit dem Dreieck eine dreieckige Pyramide, deren Spitze das Körpereck. Verbindet diese Spitze mit dem Mittelpunkte des Dreieckes, so liegt diese Linie in der Richtung eines Durchmessers des Dodekaeders. Dieser Durchmesser steht in Fig. *69* vertikal, das entsprechende gleichseitige Dreieck also horizontal und projicirt sich bei b c d in wahrer Größe, verbindet den Mittelpunkt a mit b, c, d, — die Grundlinie X Y steht senkrecht auf b c. — Projicirt a nach a′ — verlängert b c nach aufwärts, machet a′ b′ = a p (Fig. *P*), ziehet a′ b′ f″ = a q (Fig. *P*); projicirt f″

herab nach f und g ($fg = fg$ Fig. P). Vollendet das Fünfeck a b f g c und wiederholt das Gleiche an den Dreiecksseiten c d, b d so ist das untere körperliche Eck nebst den drei bildenden Seiten entworfen. — Die drei obersten Flächen sind je einer der drei unteren parallel und haben entgegengesetzte Richtung. Diese Angabe genügt zum Vollenden der Horizontalprojektion. In der Vertikalprojektion muß $f' i' = q a$ Fig. P sein und $f' p' = q p$ Fig. P ꝛc. Diese Vertikalprojektion kommt der in Fig. (g) an Gestalt völlig gleich.

53. Das reguläre Ikosaeder hat gleichseitig-dreieckige Flächen wovon je fünf ein Eck bilden; daher zählt der Körper zwanzig Flächen, zwölf Ecken und dreißig Kanten — (an jedem Polyeder beträgt die Zahl der Kanten 2 weniger als die Summe der Flächen und Ecken). — Die fünf Dreiecke an einem Ecke des Ikosaeders bilden mit ihren Grundlinien ein reguläres Fünfeck, die Dreiecke selbst also eine fünfkantige Pyramide. Eine Gerade aus der Spitze der Pyramide nach dem Mittelpunkte der Grundfläche hat in dem Ikosaeder die Richtung eines seiner Durchmesser. Ein solcher Durchmesser ward in Fig. 70 als vertikal stehend angenommen, das untere Ende desselben in der Horizontalebene. Die zwei Fünfecke, welche dem oberen und unteren Ecke entsprechen, stehen horizontal, projiciren sich nach wahrer Gestalt nur in umgekehrter Stellung, die Ecken nämlich des einen gegenüber den Seitenmitten des andern, daher zeigt sich der Umfang der Horizontalprojektion als ein reguläres Zehneck ꝛc. — Was die Höhen anbetrifft, so giebt m c in dem rechtwinkligen Dreiecke b c n die Höhe der unteren und oberen fünfeckigen Pyramide; die Seite o d in dem rechtwinkligen Dreiecke b d o die Höhe des Kranzes von zehn Fünfecken zwischen beiden Pyramiden. In den zwei Dreiecken sind die Hypotenusen b n, b o gleich einer Dreiecksseite b e oder b f.

Anmerkung. War das gleichseitige Dreieck F als Seite des Ikosaeders gegeben, so handelte es sich ein Fünfeck zu zeichnen, dessen Seiten b e, b f ꝛc. den Dreiecksseiten gleich sind. Dabei kann also verfahren werden: f b Fig. 72 die gegebene Seite. — Der Fünfeckswinkel f b e beträgt $^6/_5$ eines Rechten oder $^3/_5$ von zwei rechten Winkeln. Daher beschreibet mit f b einen Halbkreis und theilet ihn in 5 gleiche Theile (Bd. I. S. 107). Die Gerade aus b nach dem dritten Theilpunkt e wird die zweite Fünfecksseite sein und zwei Perpendikel je auf die Mitte von b f und b e kreuzen sich im Centrum des Fünfeckes. — Ein Siebeneck auf gegebener Seite zu zeichnen

Fig. 72.



hätte der Halbkreis in 7 gleiche Theile zerlegt und der Bogen f e = $^5/_7$ des halben Umkreises genommen werden müssen ꝛc.

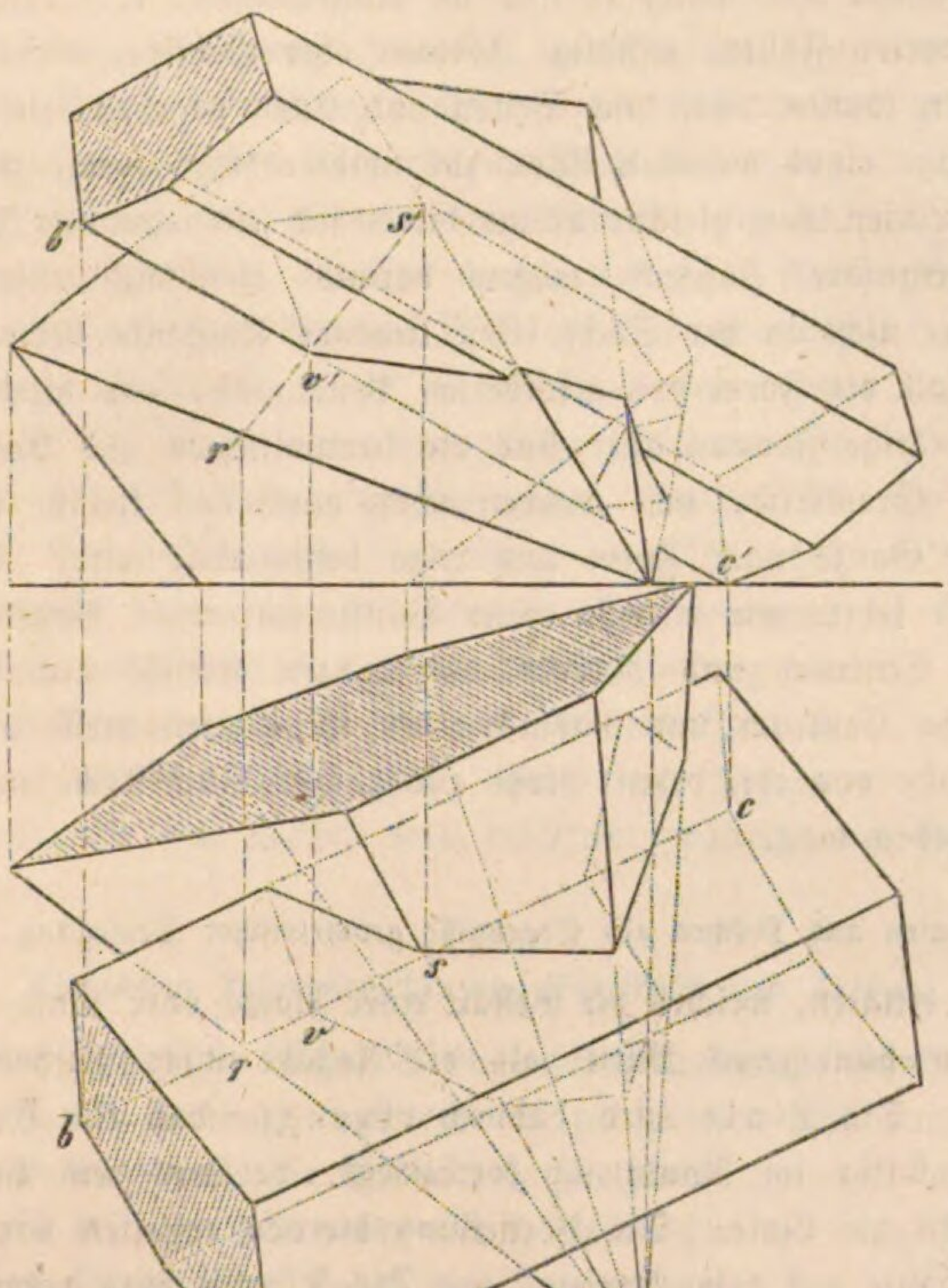
53. Fg. *71* zeigt das Ikosaeder mit seiner Seite c f g auf der Horizontalebene ruhend. War Fig. *70* entworfen, so genügte eine einfache Drehung und eine Vertikalprojektion, welche dort auf f g senkrecht stand, um zu Fig. *71* überzugehen. Allein die Betrachtung der vorhin genannten fünfkantigen Eckpyramide führt leicht zu einem Entwurfe der Fig. *71*. Die Pyramide, welche an die Kante f g stößt, ward niedergelegt, daß das Fünfeck nach g t'' z'' u'' f in die Horizontalebene fiel. Nun zeigt sich das oberste Dreieck gleichfalls in wahrer Gestalt und entgegengesetzter Lage zu dem unteren (seine Spitze i der Seitenmitte x gegenüber). Nachdem z'' t'' nach n, z'' u'' nach p auf der Scharnierlinie f g verlängert waren, richtete man die Pyramide wieder auf. Dabei mußte z'' nach i fallen, z'' t'' n nach i t n, z'' u'' p nach i u p. — Man stellte eine Hülfsprojektion nach (*h*) senkrecht auf f g. i' senkrecht über i; f' i' = x z''; f' o' = x q''. — In dem rechtwinkligen Dreiecke z'' q'' r'', worin z'' r'' = z'' u'', ist q'' r'' das Maß der Höhe o' q' der Pyramide — s' o' q' senkrecht auf f' i'. q' projicirt sich herab auf die Mittellinie c i ꝛc. — Der Vertikalprojektion (*k*) entsprechen für die gleichnamigen Punkte gleiche Höhen mit Fig. (*h*).

Verbindung von Polyedern.

54. Diese betrachten wir hier lediglich in Bezug auf gegenseitiges Durchdringen oder Durchschneiden zweier solcher Körperformen; auch genügt uns das einzige Beispiel Fig. *72*, welches das Durchdringen eines unregelmäßig fünfseitigen Prisma's und einer eben solchen sechsseitigen Pyramide darstellt. Durch die gegenseitige Stellung beider Körper bedingt sich die Form ihres Durchschnittes. Dieser bildet hier ein geschlossenes Polygon, dessen Seiten nicht in einer Ebene liegen. Es findet nämlich im vorliegenden Falle kein vollständiges Durchdringen des einen Körpers statt, sondern nur ein gegenseitiger Ausschnitt des einen durch den andern. Im ersten Falle mußte die Durchschnittsfigur aus zwei getrennten Polygonen bestehen, einem des Eintrittes und einem des Austrittes der einen Körperform in die andere. Wie dies besondere Verhalten sich gestalten möge, die Ecken der Durchschnittslinie sind immer jene Punkte, in welchen die Kanten des einen Körpers die Flächen des andern durchdringen. Die Prismenkante (b c, b' c') z. B. durchdringt eine Pyramidenfläche in (*v*, *v'*) (r' s' Vertikalprojektion des Durch-

schnittes der Pyramidenfläche und der projicirenden Ebene b c ꝛc.). (Daß sich ganz nahe an s noch ein Punkt der Durchschnittslinie projicirt, ist rein zufällig.) Von da aus folgen zu beiden Seiten die Durchschnitte zweier andern Prismakanten mit derselben Pyramidenfläche, sodann zwei Durchschnitts-

Fig. 73.



punkte einer Pyramidenkante mit zwei Prismenflächen ꝛc. So besteht die ganze Arbeit in einer zu wiederholenden Lösung der Aufgabe §. 29, der wir Neues nicht beizusetzen wüßten.

Zweites Buch.

Krumme Flächen.

Von stätigen und unstätigen Formen.

55. Polygone und Polyeder sind im Allgemeinen, d. i. abgesehen von gewissen besonderen Fällen, unstätige Formen oder Gebilde, denn von irgend einem derselben können vier, fünf Seiten und Ecken gegeben sein, ohne daß daraus die Lage eines weiteren Eckes zur nothwendigen Folge würde. Aus fünf geraden Linien von gleicher Länge bildet sich ein reguläres Fünfeck, aber unzählige unreguläre Fünfecke mögen daraus gleichfalls zusammengesetzt werden; äußere nicht in der Sache selbst liegende Umstände bedingen in jeglichem Einzelfall die Form des geforderten Pentagons, und hierin liegt das Unstätige. Stätige Formen aber sind die krummlinigen und krummflächigen Gestalten der Geometrie, von welchen schon durch das kleinste ihrer Stücke jedesmal das Ganze nach Form und Lage bestimmbar wird. Die elementare Geometrie lehrt, wie mittelst dreier Punkte auf einen Bogen von beliebiger Größe Centrum und Radius des ganzen Kreises gefunden werden können, ebenso Centrum und Radius einer Kugel vermittelst vier Punkten auf einer Haube von ihr, deren Größe zur ganzen Kugelfläche in beliebigem Verhältnisse stehen mag.

Linien und Flächen als Ergebnisse geometrischer Bewegung.

56. Zu erklären, welches die Gestalt einer Fläche oder Linie sei, hat die Geometrie kein bündigeres Mittel als die Angabe ihrer Entstehung, ihrer Erzeugung. Die Linie wird dadurch erzeugt, daß ein Punkt gesetzmäßig, d. i. stätig im Raum sich fortbewegt: der von dem Punkte durchlaufene Weg ist die Linie. Die Vorstellung hiervon erhalten wir schon beim Ziehen einer Linie auf dem Papiere. — Die Fläche wird dadurch erzeugt, daß eine Linie nach irgend einem Gesetze stätig sich im Raume bewegt. Beim Mähen liegen, nach jedem Hiebe, die Köpfe der Stoppeln in einer Fläche, welche von der Schärfe der Sense durchlaufen wird. Aus der Gesammtheit aller Punkte des Raumes, welche eine Linie in Folge ihrer Bewegung eingenommen hat oder einnehmen konnte, besteht die erzeugte Fläche. In anderer Vorstellungsweise sagt man von der Fläche auch, sie sei der geometrische Ort für alle Stellungen der beweglichen Linie, gleichwie im ersten Falle die erzeugte Linie der geometrische Ort ist für den beschreibenden Punkt.

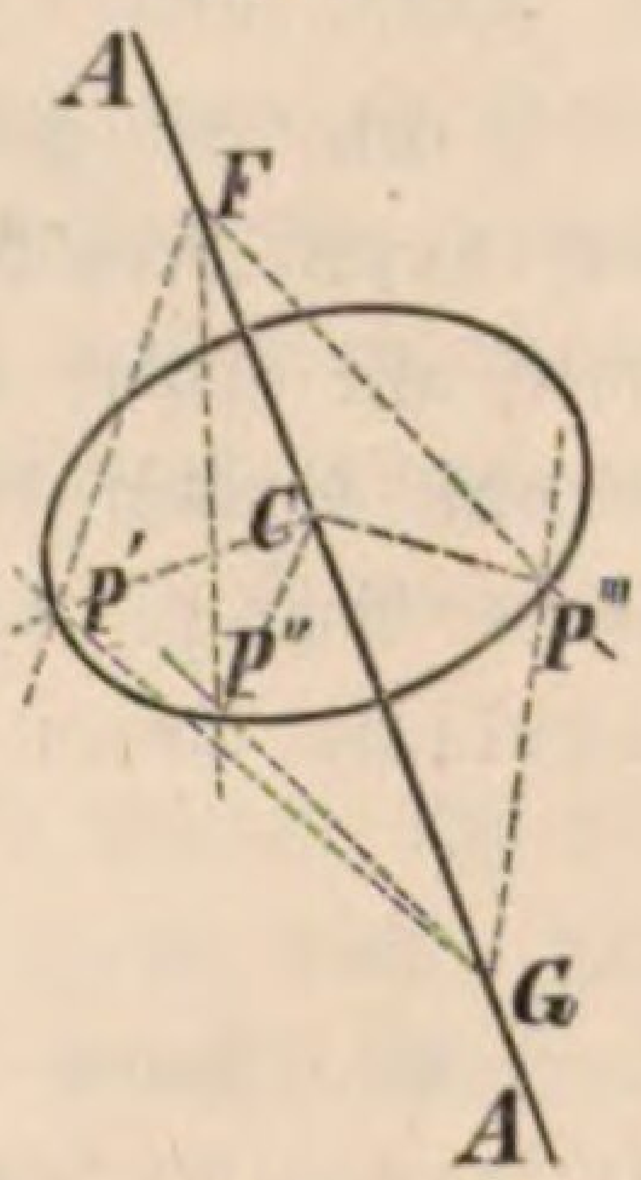
Geometrische Grundbewegungen.

57. Für den Punkt giebt es deren zwei: die fortschreitende und die drehende; aus beiden lassen alle übrigen Bewegungsarten des Punktes sich zusammensetzen.

Zufolge der fortschreitenden Bewegung erzeugt der Punkt eine gerade Linie.

Die drehende Bewegung (rotatio, *révolution*) setzt eine Axe voraus, um welche der Punkt sich bewegt, ohne seinen Abstand von der Axe zu ändern oder parallel derselben fortzurücken. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit jener andern: der Punkt P′, Fig. 74, bewegt sich dergestalt um die Axe A A, daß seine Abstände von zwei beliebigen Punkten F, G der Axe unveränderlich bleiben. Stellen P′ F, P″ F, P‴ F ꝛc. und dann wieder P′ G, P″ G, P‴ G unter sich gleiche Entfernungen dar, so sind P″, P‴ Oerter des rotirenden Punktes P′ und die von ihm beschriebene Linie ist ein Kreis. Bei solcher Entstehung des Kreises ist überall keine Rede von einer Ebene, in welcher er liegt, aber die Vorstellung davon dringt sogleich heran, so wie aus P′ ein Perpendikel P′ C auf die Axe gefällt wird, denn dieser Perpendikel ist ein Radius des Kreises und beschreibt während der Umdrehung die Kreisfläche.

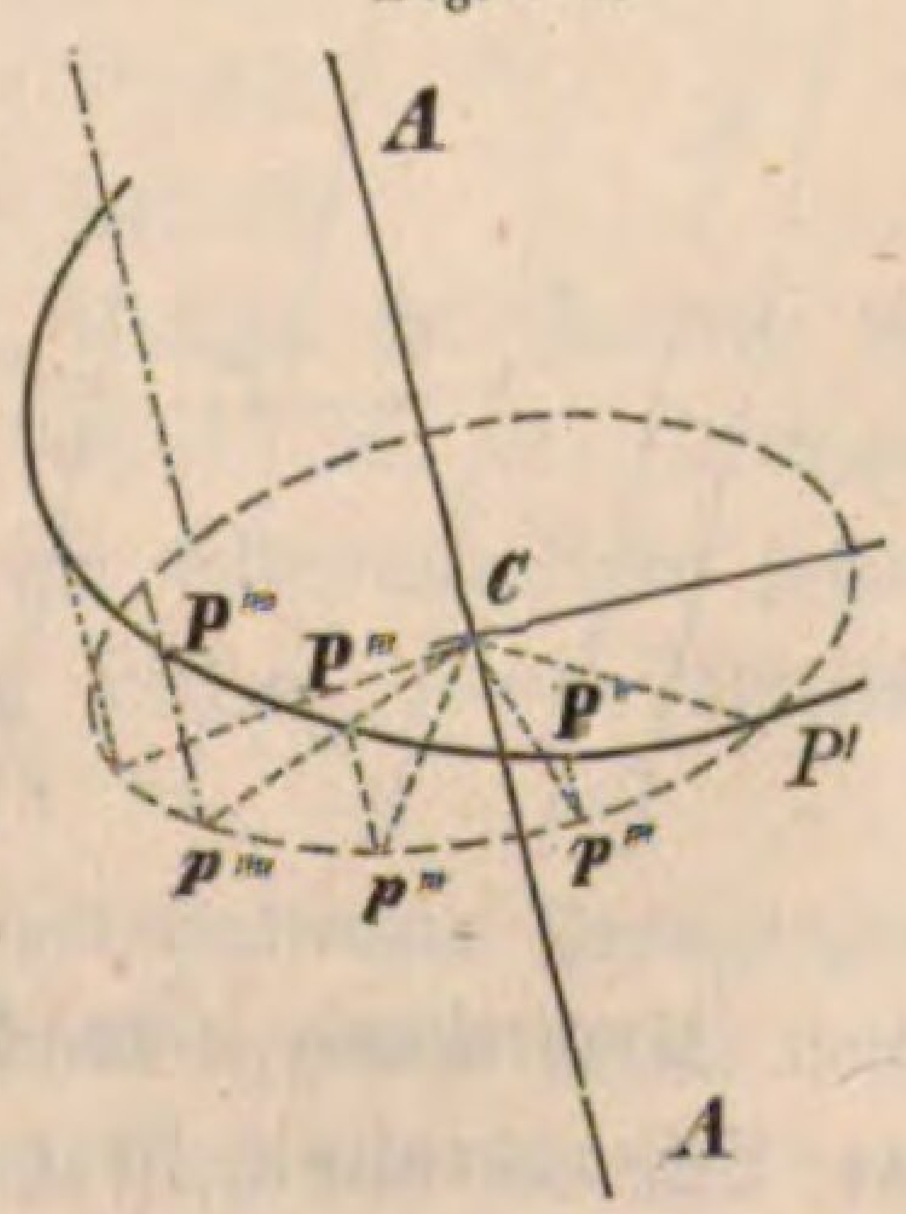
Fig. 74.



Einfachstes Zusammensetzen von Fortschritt und Drehung.

58. Dies geschieht in solcher Weise, daß der bewegliche Punkt P′, Fig. 75, sich um die Axe A A dreht, während er zu gleicher Zeit parallel zur Axe fortschreitet, wobei jedoch die Größe des Fortschrittes p″ P″, p‴ P‴ ꝛc. stets proportionel bleibt den Drehungsbögen P′ p″, P′ p‴ oder stets proportionel den Drehungswinkeln P′ C p″, P′ C p‴ ꝛc. Die von P′ erzeugte Linie ist die Schraubenlinie. Einer vollständigen Umdrehung von P′ entspricht ein Umgang der Linie, und der Fortschritt parallel zur Axe am Ende eines Umganges ist die Gangweite. Das Verhältniß aber der Gangweite zum Umfang ist der Gang der Schraubenlinie.

Fig. 75.



Gerade Linie, Kreis und Schraubenlinie sind die drei einfachsten Linien.

59. Denn sie haben gemeinsam das geometrische Merkmal der einfachen Form, daß die Theile einer jeden vollkommen gleichartig gebildet sind, so daß ein jedes ihrer Stücke mit einem andern Stücke derselben Linie von gleicher Länge zur völligen Deckung gebracht werden kann. Hieraus erklärt sich das mechanische Gleiten einer geraden Linie auf der andern, das Drehen eines Kreises in oder auf sich selber, das Bohren einer Schraubenlinie auf ihrer eigenen Spur.

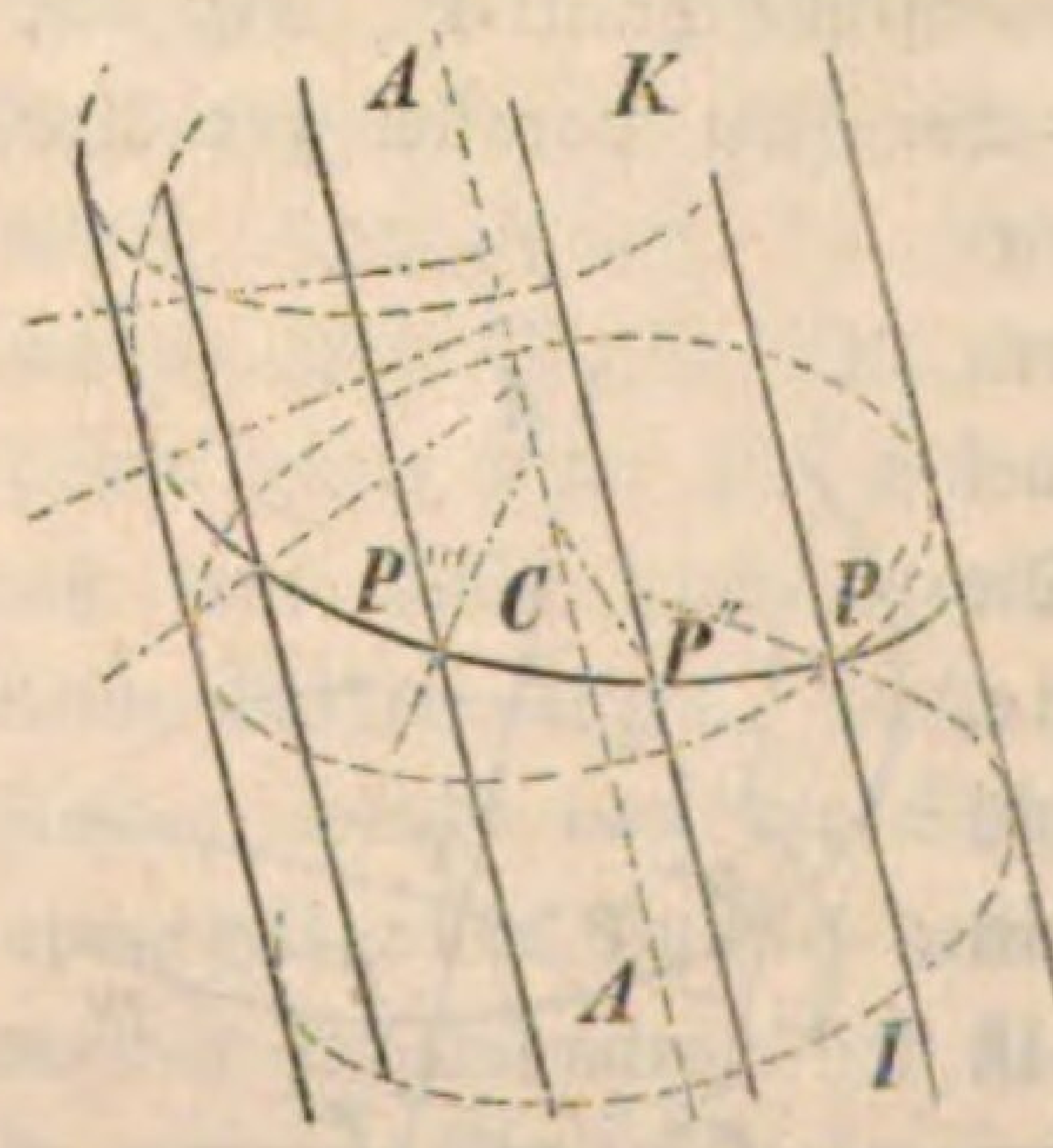
Worin die drei Linienarten sich unterscheiden.

60. Es giebt nur eine Art der geraden Linie. Kreise unterscheiden sich durch ihren Radius, d. i. durch ihre Größe, aber nur durch diese, weshalb alle Kreise ähnliche Linien sind. Bei der Schraubenlinie aber ist die Gestalt bedingt durch das Verhältniß der Gangweite zum Umfang, d. i. durch ihren Gang: darum sind nur Schraubenlinien von gleichem Gang auch ähnliche Linien.

Einige weitere Beziehungen der Schraubenlinie.

61. Durch drei benachbarte Punkte einer Schraubenlinie, wie P′, P″, P‴, Fig. 75, denkt man sich eine Ebene gelegt. Diese Ebene wird die Axe A A unter schiefem Winkel durchschneiden, ein folgender vierter Punkt, P⁗, nun wird vermöge seiner Drehung sowohl wie seines Fortschrittes aus der Ebene herausgetreten sein. Die verschiedenen Bogen der Schraubenlinie liegen also nicht in einer Ebene; sie ist keine ebene Linie, allein gleich wie bei andern krummen Linien solcher Art lassen sich verschiedene krumme Flächen denken, in denen sie liegt.

Fig. 76.



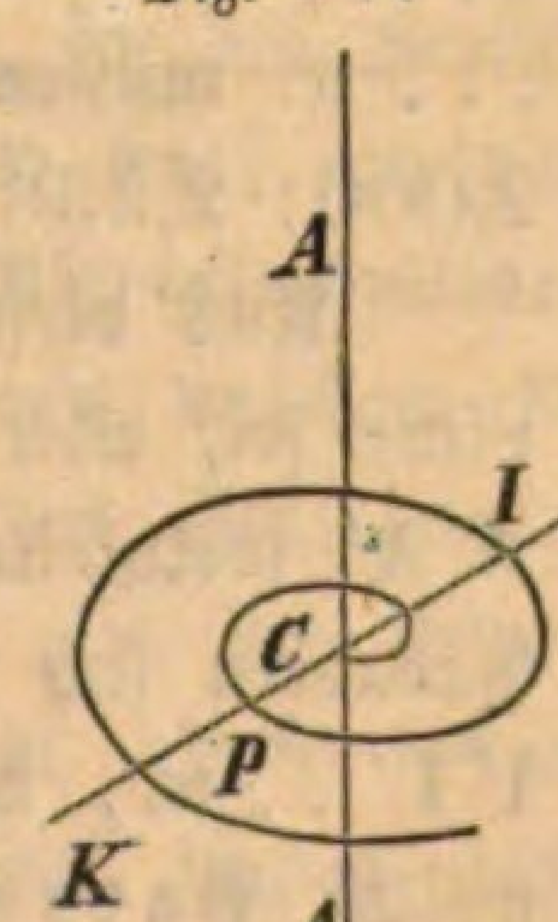
Man mache sich noch folgende Vorstellung vom Entstehen der Schraubenlinie: eine Gerade I K, Fig. 76, dreht sich um die ihr parallele Axe A A, während ein Punkt P′ auf ihr proportional zur Größe der Drehung fortrückt und so die Schraubenlinie P′, P″, P‴ 2c. erzeugt. Aber die Gerade I K wird nach einer Umdrehung eine Cylinderfläche erzeugt haben, auf oder in welcher die Schraubenlinie liegt (Seite 82).

Stellt man sich vor, der Radius P′ C werde gleichzeitig mit der Linie und dem Punkte um die Axe herum geführt, so wird dabei einmal das Centrum C auf der Axe in gleichem Grade fortrücken wie P′ auf I K. In unserer Fig. 76 sind nur einige dieser nach außen verlängerten Radien angegeben, welche den Stellungen P″ P‴ ꝛc. des erzeugenden Punktes entsprechen. Denkt man sich aber diese Radien in stetiger Aufeinanderfolge, dann gewinnt man die Vorstellung einer Gewindfläche (Seite 85), welcher die Schraubenlinie gleichfalls angehört. Diese Krumme erscheint somit als die Durchschnittslinie der Gewindfläche mit der erstgenannten Cylinderfläche.

Man halte die Gewindfläche in der Vorstellung fest, und bringe sie in Verbindung mit noch mehreren Cylinderflächen von verschiedenem Halbmesser, welche jedoch sämmtlich die Gerade A A zur gemeinsamen Axe haben, dann wird jede dieser Cylinderflächen von der Gewindfläche nach einer neuen Schraubenlinie durchschnitten werden. Alle diese Schraubenlinien haben die gleiche Ganghöhe, jedoch um so flachern Gang, je größer der Radius des Cylinders ist, auf welchem sie entstanden.

62. Geometrische Gesetze haben oft eine allgemeinere Natur als der erste Anblick zu erkennen giebt. So zeigt es sich unter Anderem bald, daß die Schraubenlinie und die archimedische Spirale zu einer Familie gehören. Man stelle nur die Gerade I K, Fig. 77, welche vorhin mit der Axe parallel war, jetzt rechtwinklig gegen dieselbe, so daß beide sich in einem Punkte C durchschneiden und lasse sie um die Axe sich drehen, so wird der auf I K proportional zur Drehung fortrückende Punkt P die archimedische oder gemeine Spirallinie beschreiben. Diese ist eine ebene Linie, weil die Gerade I K bei ihrer Umdrehung eine Ebene erzeugen muß. Nun lassen sich aber noch beliebige andere Stellungen der Geraden I K gegen die Axe denken, und indem P während der Umdrehung einer solchen Geraden auf ihr fortrückt, entsteht eine neue spirische d. i. gewundene Linie, welche zur Familie der vorhin genannten gehört, so lange der Fortschritt von P mit der Drehung in unveränderlichem Verhältnisse bleibt. Aber nur die Schraubenlinie gehört unter dieser zahllosen Sippe zu den drei einfachen Linien, deren einzelne Theile oder Stücke gleichmäßig gebildet sind.

Fig. 77.



Die Bewegung eines Punktes, zusammengesetzt aus zwei fortschreitenden Bewegungen.

Man denkt sich zwei Gerade, welche einen Punkt gemein haben, die eine soll im Raume fest, die andere aber so beweglich sein, daß sie mit dem=

selben Punkt längs der ersten hingleitet und dabei parallel bleibt zu ihrer ursprünglichen Richtung. Rückt nun während dieser Bewegung der zweiten Geraden ein Punkt P auf ihr stätig fort, so beschreibt er dabei eine Linie, deren Beschaffenheit abhängt von dem Verhältnisse zwischen dem Fortschritt der zweiten Linie und des Punktes auf ihr. Ist A A′, *Fig. 78*, die feste Gerade, I′ P′ die bewegliche, P′ der Punkt auf ihr und bleiben die Verhältnisse $\frac{I'P'}{AI'}$, $\frac{I''P''}{AI''}$ 2c. stets einander gleich, dann beschreibt P′ eine gerade Linie.

Setzt man fest, daß die Fortschritte I′ P′, *Fig. 79*, I″ P″ 2c. stets gleich sein sollen den Quadratwurzeln aus den Fortschritten A I′, A I″, A I‴ 2c., so beschreibt P′ eine Parabel. Sind auf A A′ von A aus nach I′, I″ 2c. gleiche Theile genommen, so können die Längen A I′, A I″, A I‴ 2c. durch die Reihenfolge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 .... vorgestellt werden und die Ordinaten I′ P′, I″ P″, I‴ P‴ ... 2c. müssen der Reihe nach gleich sein den Zahlenwerthen 1; 1,414; 1,732; 2,000; 2,236 als den Quadratwurzeln aus den Gliedern der vorigen Reihe.

Fig. 78.

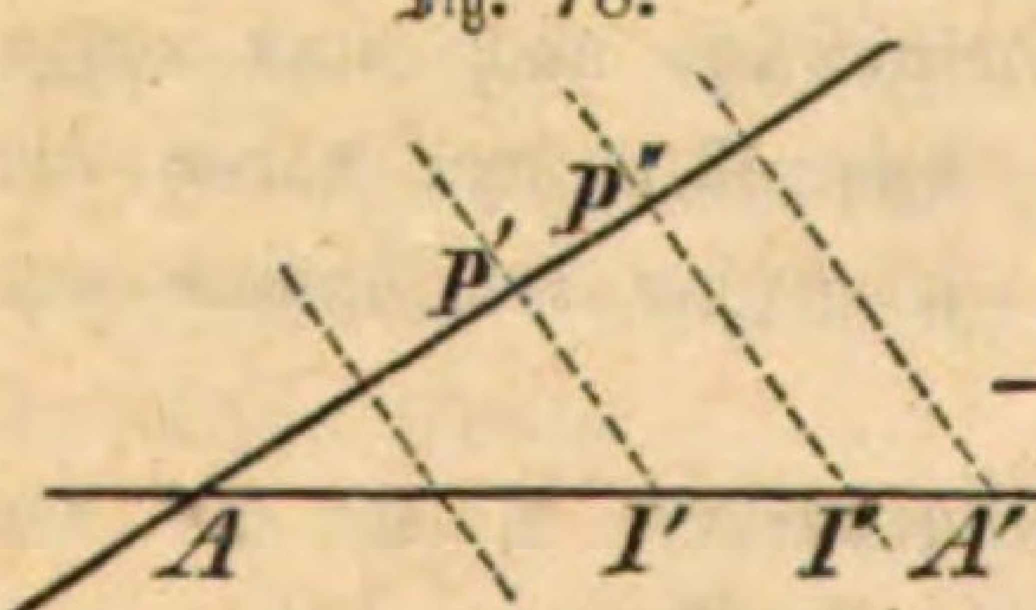
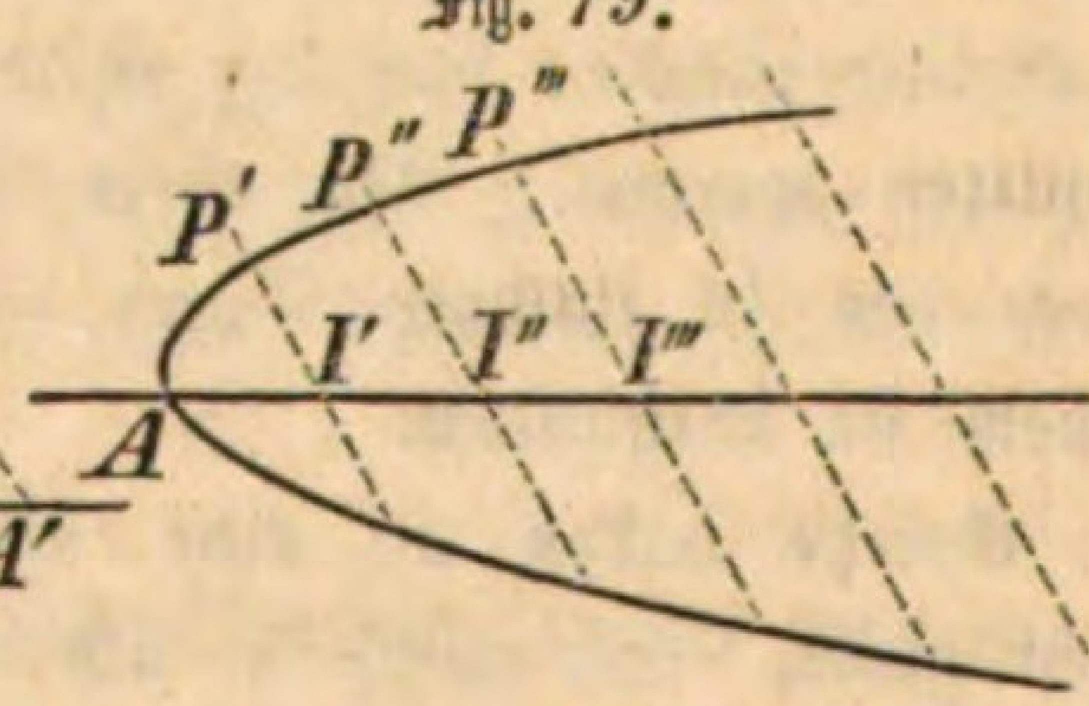


Fig. 79.



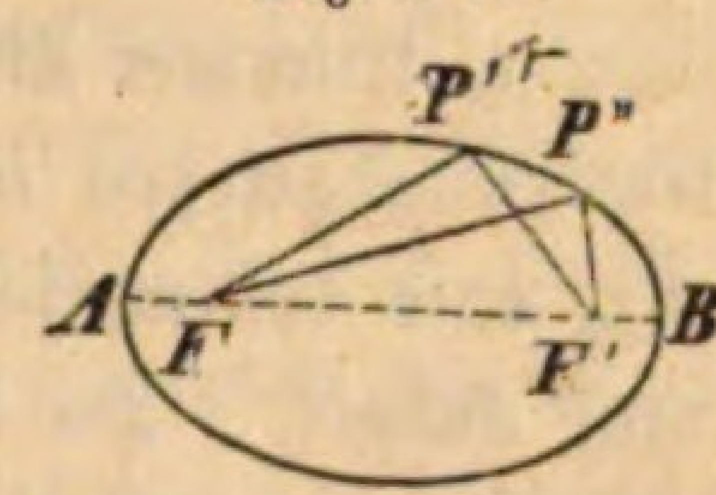
Aus diesem Entstehungsgesetze folgt erstlich, daß die Parabel eine ebene Linie sei, weil die bewegliche Gerade I′ P′, welche parallel zu sich selbst längs A A′ fortgleitet, dabei eine ebene Fläche erzeugen muß. Zweitens: daß die Parabeln sich nur unterscheiden können durch die Größe der Abschnitte A I′, I′ I″ . . 2c., d. i. durch die Einheit, welche man ihnen zu Grunde legt und welche Parameter der Linien genannt wird, weshalb alle Parabeln ähnliche Linien sind.

Zusammengesetzte Drehung eines Punktes.

63. Diese zeigt sich in einfachstem Vorkommen bei Erzeugung der Ellipse, indem hier ein Punkt P′, *Fig. 80,* sich derart um die beiden Brennpunkte F, F′ bewegt, daß die Summe der Abstände P′ F und P′ F′, P″ F und P″ F′ unveränderlich bleibt. Man denke nur an das mechanische Aufreißen der Ellipse vermittelst eines Stiftes, welcher einen in F und F′ befestigten Faden von einer Länge gleich der großen Axe A B angespannt um die Brenn-

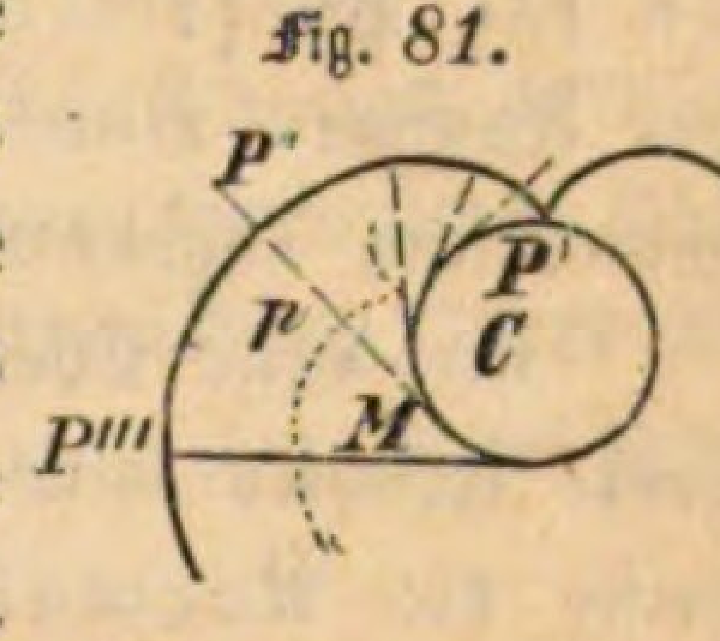
punkte herumführt und man hat die Vorstellung eines gleichzeitigen Drehens um zwei Mittelpunkte. Das aber bleibt hervorzuheben, daß eine Ebene zum voraus festgesetzt sein muß, worin die Figur zu entstehen hat, denn sonst liegen alle Punkte des Raumes, welche P′ vermöge der beiden Größen F F′ und A B einnehmen kann, auf einer Fläche, welche auch erzeugt wird durch die Umdrehung der Ellipse um ihre große Axe A B. Aehnliche Bewandtniß hat es, wenn die Entstehung des Kreises erklärt wird durch die Umdrehung eines Punktes um einen festen Mittelpunkt. Hier muß auch die Ebene des Kreises besonders festgestellt werden, sonst kann der bewegliche Punkt jeden Ort auf der Kugelfläche einnehmen, welche gleiches Centrum und gleichen Radius hat.

Fig. 80.



64. Ein zweites Beispiel zusammengesetzter Drehung bietet die Kreisabwicklungslinie P′ P″ P‴ ꝛc., Fig. 81. Man denkt sich um oder in den Kreis vom Centrum C einen Faden gelegt, dessen Ende in P′ sein soll. Der Faden wird hier gefaßt und stets gespannt vom Kreise abgewickelt, wodurch jenes Ende die Abwicklungslinie beschreibt. Das Anspannen des Fadens ist so zu verstehen, daß derselbe immer in der Kreisebene bleibt, also stets die Richtung einer Kreistangente hat. Daraus folgt fürs Erste, daß die Abwicklungslinie gleichfalls in der Kreisebene liege. Es sei P‴ ein beliebiger Punkt der Linie, er liegt auf der Kreistangente P‴ M, deren Berührungspunkt M ist. Die Abwicklungslinie hat darum in P‴ dieselbe Richtung wie ein Kreisbogen, von welchem M das Centrum und M P‴ der Radius ist. Aber während des Fortrückens von P‴ dreht M sich selber um das Centrum C, so daß also die Bewegung von P‴ zusammengesetzt ist aus einer Drehung um einen festen Mittelpunkt und aus einer gleichzeitigen zweiten Drehung um einen beweglichen Mittelpunkt.

Fig. 81.



Würde in ähnlicher Weise eine andere als die Kreislinie abgewickelt, dann hätte das Centrum M selbst wieder eine zusammengesetzte Bewegung.

Zusatz. Bei Abwicklung des Kreises wird jeder auf einer von den Tangenten wie M P‴ genommene weitere Punkt p eine der ersten völlig gleiche Evolvente beschreiben. Aber bei andern als Kreislinien sind die von Nachbarpunkten P″, p beschriebenen Evolventen unter sich ungleich, obwohl sie sich periodisch wiederholen können.

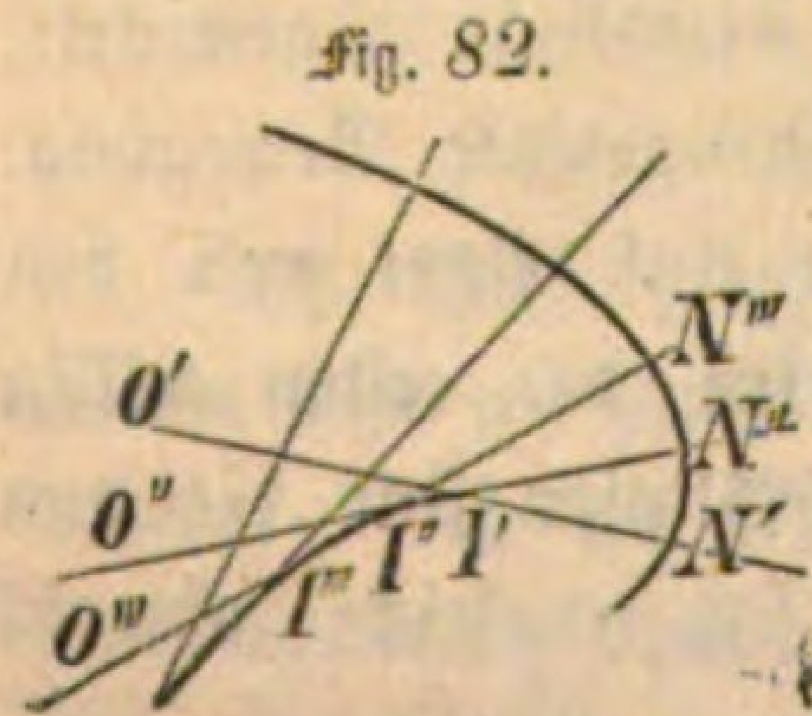
Begriff von Tangenten und Normalebenen krummer Linien.

Die letzten oder kleinsten Theile einer krummen Linie sind geradlinig. Die Vorstellung hiervon entspringt dem Begriffe von der Erzeugung krummer Linien durch einen beweglichen Punkt; denn vermöge seines Bewegungsgesetzes erhält der Punkt an jedem Orte, den er einzunehmen vermag, eine bestimmte Richtung, welche Richtung er während seines Fortrückens stätig ändert. Die Bewegung nach einer Richtung ist aber eine geradlinige. Diese letzten, nicht mehr zu zerlegenden geradlinigen Theile einer Linie sind ihre Elemente. Jedem angebbaren Punkt einer Linie entspricht ein solches „unendlich kleines“ Element; die Verlängerung des Elementes zur geraden Linie ist die Tangente der Linie an demselben Punkte. Dieser wird zum „Berührungspunkt“ in Bezug auf die gedachte oder geforderte Tangente. Projicirt man eine krumme Linie und eine ihrer Tangenten in irgend eine Ebene, so bleibt die Projektion der Tangente wiederum Tangente an die Projektion der krummen Linie, weil das Berührungselement der krummen Linie und ihrer Tangente auch in der Projektion beiden Linien gemeinsam angehört.

65. Eine Ebene, welche im Berührungspunkt rechtwinklig auf die Tangente errichtet wird, steht hier auch rechtwinklig gegen die Linie selbst und heißt die Normalebene der Linie am Berührungspunkt. Bei ebenen krummen Linien nennt man die Durchschnitte der Linienebene mit den verschiedenen Normalebenen der Linie Normalen der Linie. Nicht ebene krumme Linien haben an ihren verschiedenen Punkten keine bestimmten Normalen, denn jede in der Normalebene eines Punktes gezogene, und durch diesen Punkt gehende Gerade steht normal, d. i. rechtwinklig zur Linie, aber unter ihnen allen ist einzeln genommen keine, welche durch ein besonderes Merkmal sich auszeichnete.

Fig. 82. N′ N″ N‴ ... soll irgend eine krumme Linie sein, welche in der Zeichnungsfläche liegt, und N′ O′, N″ O″ 2c. seien verschiedene Normalen zu dieser Linie. Angenommen jetzt, die erste Normale N′ O′ werde beweglich und rücke stetig so fort, daß sie immer normal zu N′ N″ N‴ bleibt, daß sie also nach einander auch die Stellungen N″ O″, N‴ O‴ 2c. einnimmt; dann wird die zweite dieser Normalen von der ersten in einem Punkte I′ geschnitten und von der dritten in einem Punkte I″; die dritte wird von der vierten in einem Punkte I‴ geschnitten u. s. f. Die kleinen Stücke

Fig. 82.



einer jeden Normalen zwischen ihren Durchschnittspunkten mit der vorhergehenden und der nachfolgenden Normalen, diese kleinen Stücke bilden ein Polygon, dessen Seiten Tangenten sind an eine krumme Linie, durch deren Abwicklung (§. 64) wiederum die Linie N′N″N‴ hervorgebracht werden kann. In unserer Figur sind die Punkte N′, N″ in endlichen Abständen von einander genommen; denkt man sich dieselben unendlich nahe, so daß zwischen je zweien kein dritter mehr angegeben werden kann, dann werden die Punkte I′, I″, I‴ auch unendlich nahe auf einander folgen, so daß die Theile zwischen ihnen die Elemente der Linie I′I″I‴ sind. Diese Linie ist also entstanden nicht durch die Bewegung eines Punktes, sondern durch die aufeinander folgenden Durchschnitte einer sich bewegenden geraden Linie, welche stets normal bleibt zu ihrer Evolvente. Erzeugungsweisen ähnlicher Art werden wir bei den krummen Flächen wieder antreffen.

66. Linien wie N′N″N‴, *Fig. 82*, welche durch Abwicklung einer andern I′I″I‴ entstehen, heißen, wie bereits erwähnt, Evolventen der letzten. Diese selbst sind die Evoluten von jenen. Da sich nun vermittelst der Normalen zu einer jeden ebenen Linie die Evolute konstruiren läßt, so folgt daraus, daß dieselben ohne Ausnahme durch Abwicklung hervorgebracht werden können. Wir werden alsobald nochmals auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Die Konstruktion von Tangenten und Normalen krummer Linien, abgeleitet aus der Zusammensetzung der Bewegungen.

67. Aus der Vergleichung zweier Bewegungen fließt der Begriff von Geschwindigkeit. Werden anstatt der Bewegungen oder deren Geschwindigkeiten die Kräfte gesetzt, welche beides verursachen und deren Macht ihren Wirkungen proportional sein muß, so betritt man mit dieser Vorstellung das Gränzgebiet zwischen Geometrie und Mechanik. In dies Gebiet gehören nun folgende rein elementare Anschauungen: jede Kraft, welche eine Bewegung hervorzubringen geeignet ist, kann repräsentirt werden durch eine gerade Linie von gleicher Richtung wie die Kraft, und von einer Länge, welche nach angenommenem Maßstabe im Verhältniß steht zu der von ihr bewirkten Geschwindigkeit.

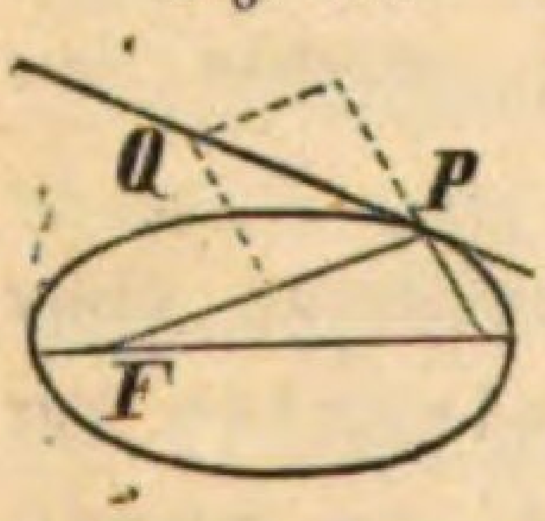
Wirken gleichzeitig zwei solcher Kräfte auf einen Punkt, dann bestimmt sich für jeden gegebenen Augenblick seiner Bewegung die Geschwindigkeit und Richtung desselben in folgender Weise: durch den Punkt zieht man zwei gerade Linien nach den Richtungen der einwirkenden Kräfte und jede von einer

Länge, welche der entsprechenden Kraft proportional ist; mit den beiden Linien bildet man ein Parallelogramm, dessen durch den Punkt gehende Diagonale die von beiden Kräften bewirkte Geschwindigkeit des Punktes nach Richtung und verhältnißmäßiger Größe darstellen wird.

Wenn der Punkt vermöge der ihn treibenden Ursachen eine krumme Linie beschreibt, dann ist an einem gegebenen Orte seines Weges durch die Diagonale „des Parallelogrammes der Kräfte" auch die Richtung der Tangente an diesem Orte festgesetzt.

68. **Beispiel.** Bei der Ellipse (Fig. 83) ist an jedem Punkte P ihres Umfanges die Summe der zwei hier zusammentreffenden Fahrstrahlen gleich der großen Axe, also eine unveränderliche Größe. Dreht P sich rechts herum, so wächst der Fahrstrahl links genau um so viel, als der Fahrstrahl rechts abnimmt, und umgekehrt, wenn die Drehung von P links herum geschieht. Daraus ist zu schließen, daß die Geschwindigkeiten des beschreibenden Punktes P auf beiden Fahrstrahlen gemessen einander gleich, aber von entgegengesetzter Richtung sein müssen. Somit das Parallelogramm der Geschwindigkeiten oder Kräfte für den Punkt P zu bilden, trägt man von diesem Punkt aus auf den einen Fahrstrahl und auf die Verlängerung des andern eine gleiche Größe, bildet aus diesen zwei Stücken ein Parallelogramm und zieht dessen Diagonale P Q, durch deren Verlängerung die Ellipstangente in P entsteht.

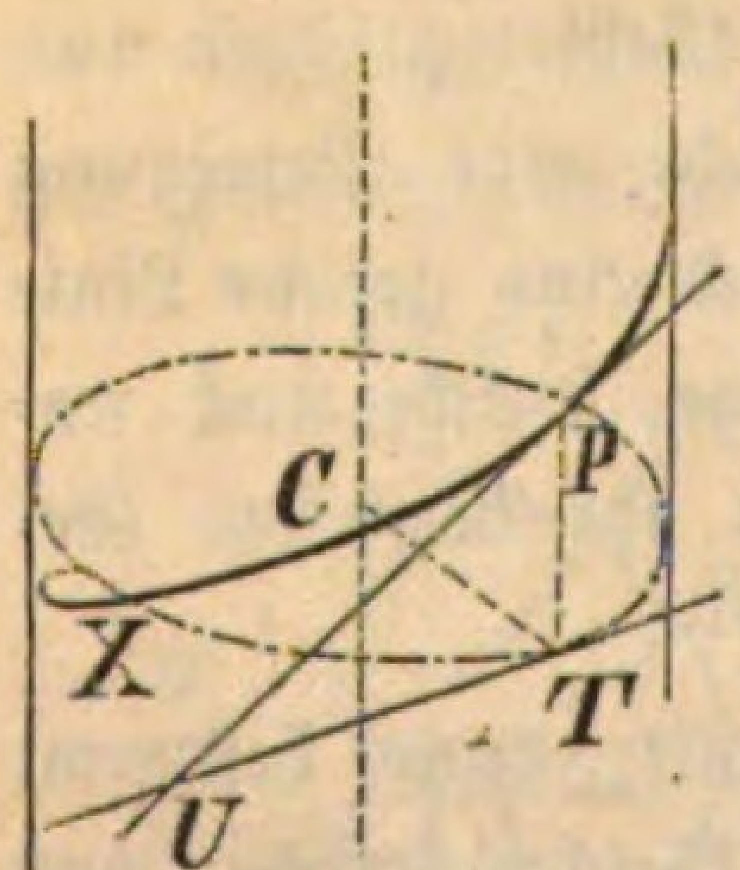
Fig. 83.



Das Parallelogramm der Geschwindigkeiten ist bei der Ellipse gleichseitig, also eine Raute, deren Diagonale bekanntlich die entsprechenden Winkel halbirt. Hieraus folgt, daß die Ellipstangente mit den beiden Fahrstrahlen gleiche Winkel bilde.

Gleichmäßig verhält sich's bei der Hyperbel und auch bei der Parabel, wenn man nämlich die Parallelen zur Axe, welche durch einen Parabelpunkt geht, als zweiten Fahrstrahl dieses Punktes ansieht.

Fig. 84.



Den Kreis als eine Abart der Ellipse betrachtet, so haben sich hier die beiden Brennpunkte im Centrum vereinigt und je zwei zusammengehörige Fahrstrahlen zu einem Radius. Diese Radien müssen also gleiche Winkel mit den Tangenten an ihren Endpunkten machen, d. h. sie müssen auf diesen Tangenten normal stehen.

69. X P, Fig. 84, sei ein Bogen einer Schraubenspirale; C T Radius des von X beschriebenen Bogens; P ein Punkt, an welchem die Tangente

verlangt wird. Dem Drehungsbogen X T entspricht die Parallele zur Axe T P als verhältnißmäßiger Fortschritt des beschreibenden Punktes P. Zieht man in T die Kreistangente und giebt ihr eine Länge T U gleich dem abgewickelten Bogen T X, so sind T U und T P die zwei Seiten, womit das Parallelogramm der Geschwindigkeiten zusammenzusetzen ist, welche aber für sich schon genügen zur Bestimmung der Diagonalen wie Tangente U P.

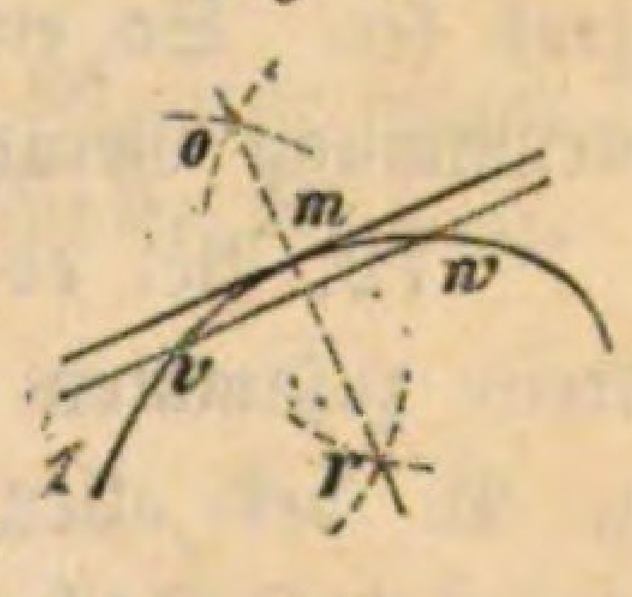
Zusatz. Leicht wird man erkennen, wie die Bestimmung der Tangente an die archimedische Spirale, welche wir Band I, Seite 180 gegeben, auf ganz verwandter Anschauung beruhe.

Besondere Fälle bei der Konstruktion von Tangenten.

70. Bei Lösung von Aufgaben der darstellenden Geometrie kommt es vor, daß Tangenten zu ziehen sind an krumme Linien, deren Natur nicht näher bekannt ist. Nun kennt man allerdings verschiedene Verfahrungsarten, welche zur Lösung solcher Aufgaben geeignet sein sollen, allein schon ihrer Umständlichkeit wegen sind sie praktisch nicht brauchbar. Den zuverlässigsten Weg findet man im vorliegenden Fall durch die Anschauung, daß jeder sehr kleine Bogen einer krummen Linie praktisch als ein Kreisbogen behandelt werden könne.

Es sei v m w, Fig. 85, eine krumme Linie von unbekanntem Gesetze, an deren Punkt m die Tangente verlangt wird. — In gleichen Abständen links und rechts von m nimmt man auf der Linie zwei weitere Punkte v und w so weit von m entfernt an, als die Krümmung der Linie für gleichmäßig erachtet wird, und benimmt sich sofort, als ob in m an einen Kreisbogen v w die Tangente zu ziehen sei.

Fig. 85.



Wäre die Tangente bereits vorhanden, jedoch ihr Berührungspunkt noch zu finden, so hätte man nahe bei der Tangente eine ihr parallele Sehne v w zu ziehen und auf deren Mitte eine Senkrechte o m r zu errichten 2c.

Von der Krümmung der Linien.

71. Hat man den ganzen Umfang eines Kreises durchlaufen, so ist damit auch gleichmäßig eine Drehung von 360° vollbracht worden. Durch das Verhältniß dieser Drehung zur Länge des Umfanges wird die Krümmung des Kreises bedingt: sie ist für alle Punkte oder Theile eines Kreises gleich,

steht aber bei verschiedenen Kreisen im umgekehrten Verhältniß ihrer Radien. Denn sind r und r′ diese Radien, K und K′ aber die Krümmungen der entsprechenden Kreise, so hat man $K = \frac{360^\circ}{2\,r\,\pi}$; $K' = \frac{360^\circ}{2\,r'\,\pi}$; daher

$$\frac{K}{K'} = \frac{360^\circ}{2\,r\,\pi} : \frac{360^\circ}{2\,r'\,\pi} = \frac{r'}{r}.$$

Der Kreis dient als Maß der Krümmung aller übrigen Linien, wie aus folgendem Ideengang erhellen wird. An dem Orte einer Linie, wo von ihrer Krümmung die Rede ist, denkt man sich drei aufeinander folgende Punkte, d. h. drei so nahe beisammen liegende Punkte, daß zwischen ihnen auf der Linie kein anderer mehr angegeben werden kann, und durch diese drei Punkte einen Kreis gelegt. Dieser Kreis hat dieselbe Krümmung wie die Linie an dem betrachteten Orte, und ihn, seinen Mittelpunkt wie seinen Radius, nennt man den Krümmungskreis, Krümmungsmittelpunkt Krümmungsradius der Linie an eben diesem Orte oder Punkte. Dem Nachbarpunkte der Linie entspricht in der Regel ein anderer Krümmungskreis, weil bei fast allen Linien die Krümmung von einem Punkte zum nächsten sich ändert, obwoh die gleiche Krümmung periodisch sich wiederholen kann. Nur die Schraubenlinie macht hiervon eine Ausnahme, denn wie sie überhaupt in ihrem ganzen Laufe gleichmäßig gebildet erscheint, so hat sie auch überall die gleiche Krümmung. Von der geraden Linie kann man sagen, daß ihre Krümmung gleich Null und ihr Krümmungsradius unendlich groß sei. So erscheinen wieder, auch in Bezug auf die Gleichmäßigkeit der Krümmung Gerade, Kreis und Schraubenspirale als die einfachsten Linien.

72. Bei ebenen krummen Linien fallen die Flächen ihrer Krümmungskreise zusammen mit der Ebene der Linie, während bei nicht ebenen Kurven, z. B. bei allen Kegel- oder Cylinderspiralen Nachbarpunkte verschiedene Krümmungsflächen haben.

Man nannte früher Linien von doppelter Krümmung solche Kurven, deren Theile nicht in derselben Ebene liegen, wodurch im Gegensatze die ebenen Kurven als solche von einfacher Krümmung angesehen erschienen. Das Ungeeignete solcher Bezeichnung erhellt aus dem Vorgetragenen, weil alle Linien ohne Unterschied an jedem ihrer Orte nur die einfache Krümmung eines Kreisbogens haben und eine doppelte Krümmung hier überall nicht vorkommen kann.

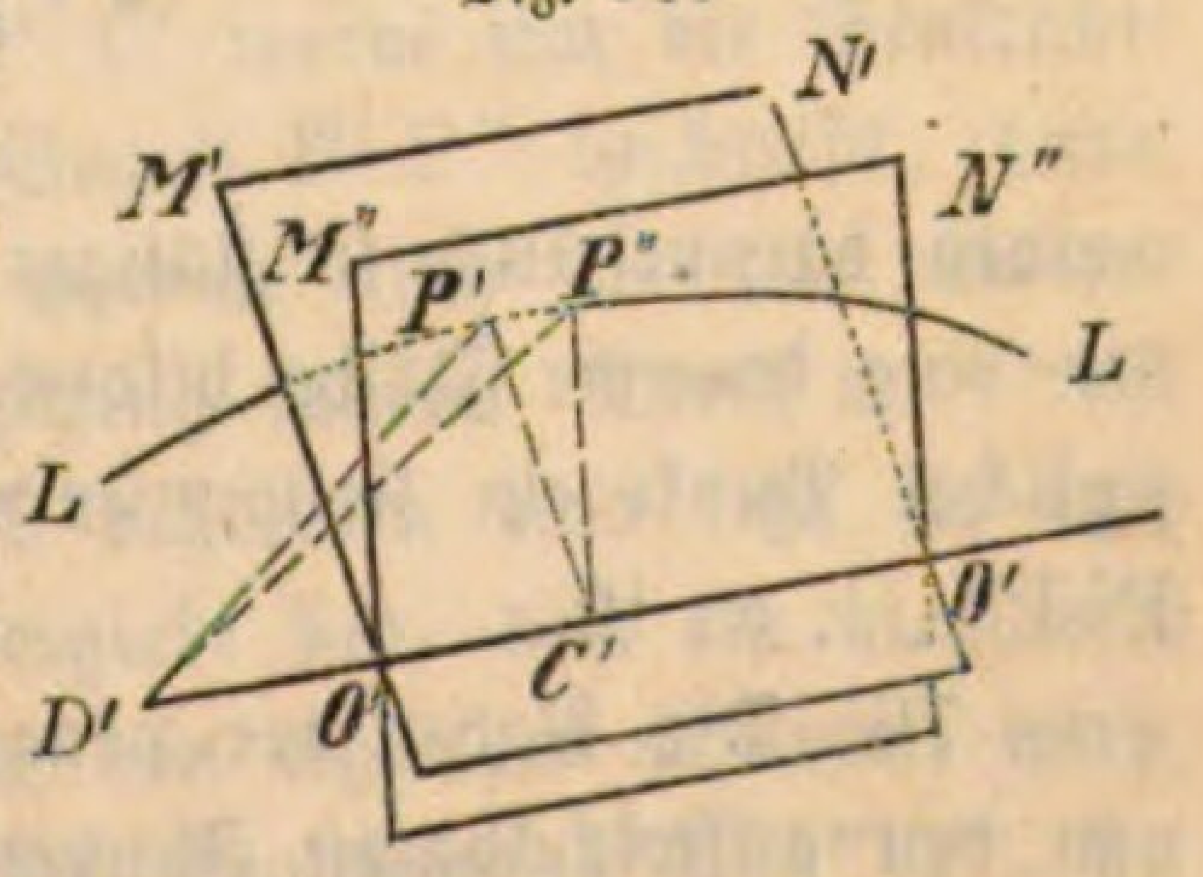
Es ist schon bemerkt worden, daß die Vorstellung irgend einer Linie unabhängig besteht von jener einer gewissen Fläche, in welcher die Linie

liegt. Ist diese Fläche eine ebene Fläche oder kann sie es sein, wie beim Kreise, der Parabel ꝛc., so erscheint sie zweifelsohne bedeutsam für die Ausführung geometrischer Konstruktionen, welche auf die Linie Bezug haben. Daneben muß jedoch hervorgehoben werden, daß für alle Linien ohne irgend welche Ausnahme und für eine jede insbesondere beliebig viele krumme Flächen anzugeben sind, welchen die Linie mit allen ihren Punkten angehört und deren gemeinsamen gegenseitigen Durchschnitt sie bildet, wenn diese Flächen gleichzeitig vorhanden sind. Auch kann jede derselben theoretisch wenigstens mit der Linie in konstruktive Beziehungen gebracht werden.

73. Es ist gesagt worden, daß der Krümmungskreis an jedwedem Orte einer krummen Linie durch drei hier aufeinander folgende Punkte derselben gehe. Solche drei Punkte aber bestimmen zwei aufeinander folgende Linienelemente, deren Verlängerungen hinwieder zwei aufeinander folgende Tangenten der krummen Linie, wie ihres Krümmungskreises an demselben Orte geben. Der Winkel dieser zwei Tangenten, welcher übrigens allezeit als unendlich klein zu betrachten, wird Contingenzwinkel genannt, und auch durch ihn findet sich die Krümmung der Linien bedingt. Allein weder die Betrachtung solcher Winkel, noch der unendlich kleinen Linienelemente, welche ihm die Entstehung geben, erscheint geeignet, auf den Weg zu einer geometrischen Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte zu leiten, wohl aber geschieht dies durch Vertauschen der Tangenten mit den entsprechenden Normalebenen und Entwickeln der hieraus entspringenden Begriffe.

74. Es sei (in schräger Projektion gezeichnet) L P′ L, Fig. *86*, eine irgend im Raume gedachte nicht ebene krumme Linie. In einem Punkte P′ dieser Linie sei eine Normalebene M′ N′ O′ O′ zu ihr angeordnet (d. i. eine Ebene, welche auf der Tangente in P′ senkrecht steht); und in dem unendlich nahe auf P′ folgenden Punkte P″ wiederum die Normalebene M″ N″ O′ O′. Beide Ebenen schneiden sich nach einer Geraden O′ O′, welche als die Axe eines Kreises zu betrachten, dem der unendlich kleine Bogen P′ P″ angehört, und welcher also der Krümmungskreis unserer Kurve in P′ ist.

Fig. *86*.

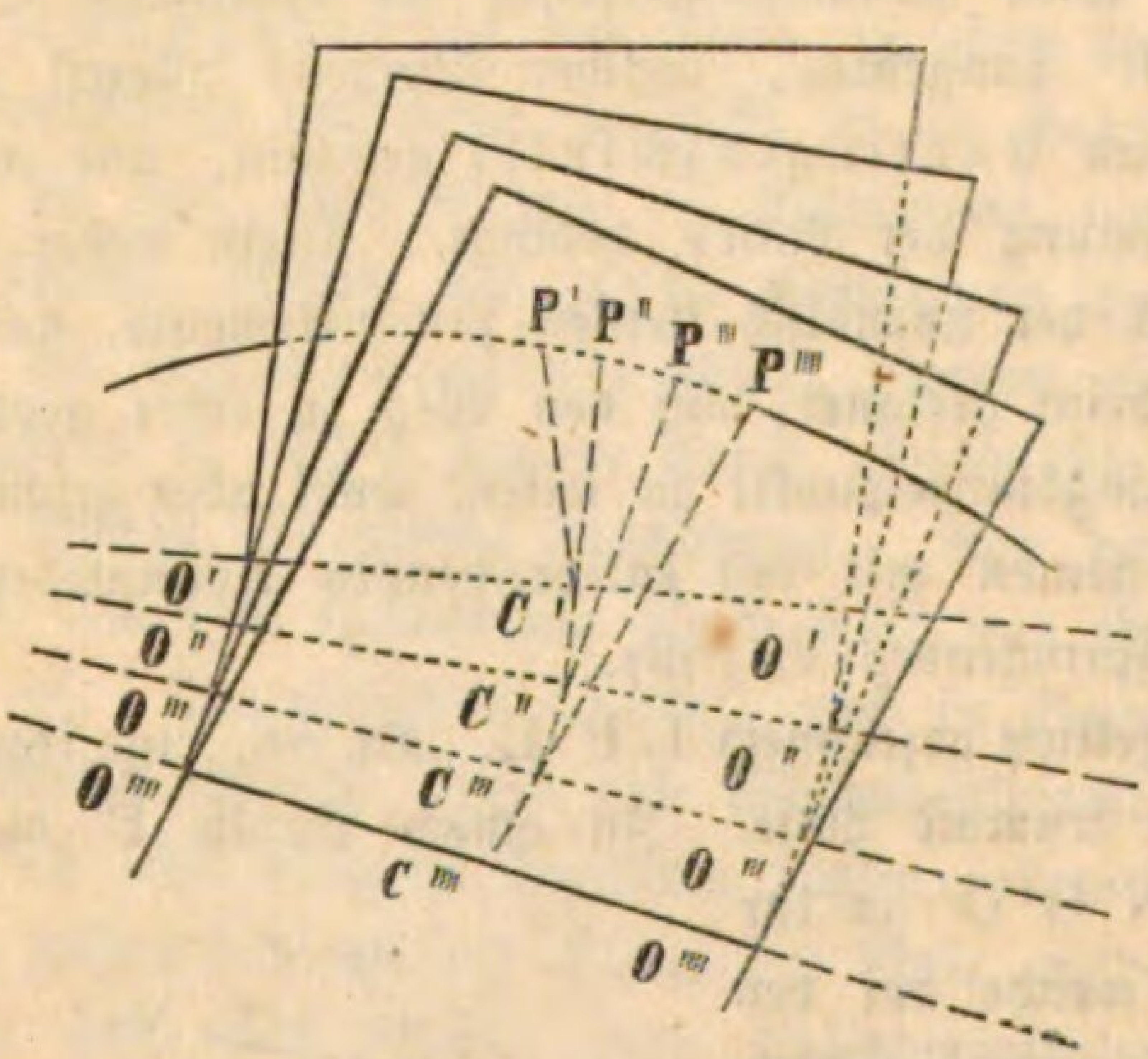


Eine Senkrechte aus P′ in der ersten Normalebene auf O′ O′ gefällt oder eine solche aus P″ in der zweiten Ebene trifft die Axe in C′, dem Krümmungsmittelpunkte des Elementes P′ P″. Irgend ein anderer Punkt D′ auf der Axe ist gleichweit von P′ und P″ entfernt,

dergestalt, daß der Bogen zwischen den zwei Punkten beschrieben werden kann durch die Umdrehung des Radius P′ C′, oder auch durch die Umdrehung der schrägen Linie P′ D′. Denkt man sich auf der krummen Linie einen drittfolgenden Punkt P‴ unendlich nahe bei P″ und auch in diesem Punkte wieder eine Normalebene gelegt, so wird von derselben die Ebene M″ N″ O′ O′ nach einer im Allgemeinen mit O′ O′ nicht parallelen Linie geschnitten, welche durch O″ O″ bezeichnet werden soll. Dies O″ O″ liegt also mit O′ O′ in der zweiten Ebene; und in Bezug auf O″ O″ und das Linienelement P″ P‴ wird wieder in entsprechender Weise alles gelten, was so eben bezüglich des Elementes P′ P″ und seiner Axe O′ O′ gesagt worden.

75. Werden diese Betrachtungen ausgedehnt auf eine ganze Reihe von Punkten P′ 2c. der krummen Linie, wie es Fig. 87 versinnlicht, und erwägt man, daß diese Punkte nach stätigem Gesetze aufeinander folgen, so wird man zu dem Schlusse kommen, daß solche stätige Folge auch stattfinden müsse bei den entsprechenden Normalebenen, deren Gesammtheit zu betrachten ist, als seien es die aufeinander folgenden Stellungen einer beweglichen Ebene, welche während ihres Fortrückens stets normal bleibt zur Kurve P′ P″ . . . 2c. Die Durchschnitte O′ O′, O″ O″ . . . 2c. werden darum auch in stätiger Folge zum Vorschein kommen, d. h. sie werden eine krumme Fläche bilden, auf welcher die Linie C′ C″ . . . 2c. liegt, deren jeglicher Punkt ein Krümmungscentrum des entsprechenden Punktes der Linie P′ P″ . . . 2c. ist.

Fig. 87.

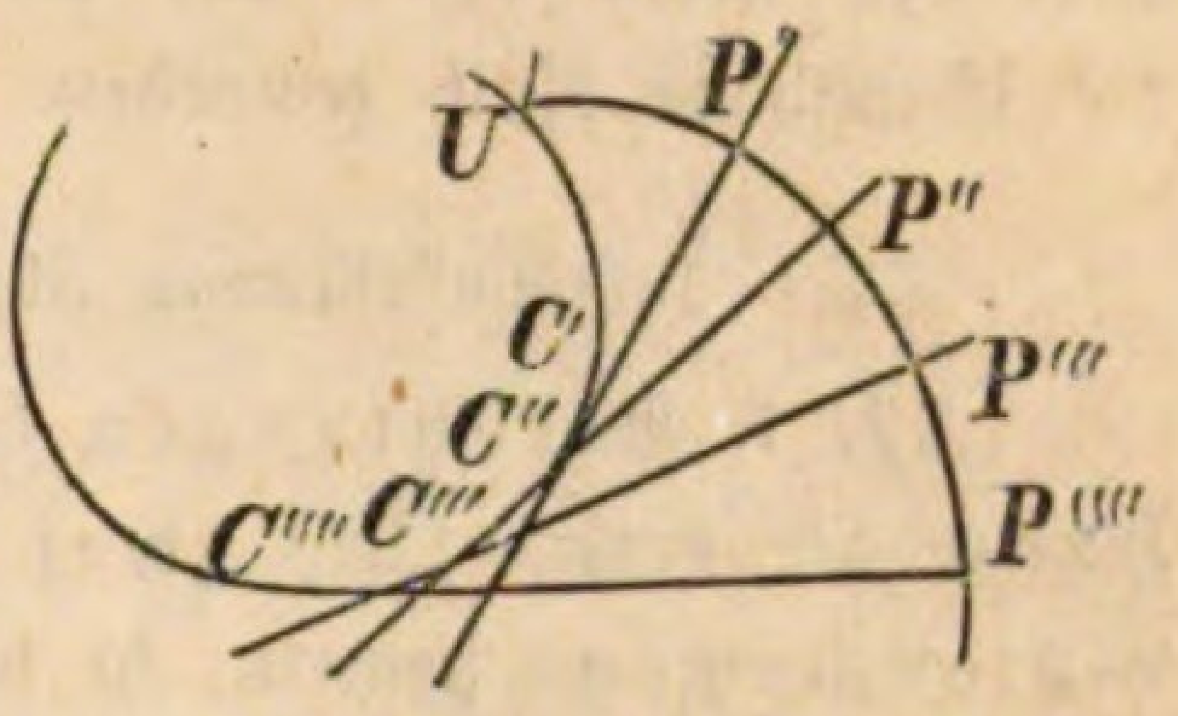


76. Die Natur der genannten krummen Fläche wird in dem Abschnitte von den aufwickelbaren Flächen weiterer Gegenstand unseres Studiums sein. Jedoch das gegenseitige Verhalten der Linien P′ P″ . . . 2c. und C′ C″ . . . 2c. wollen wir in einem Falle noch näher erläutern, mit welchem wir bereits bekannt sind.

P′ P″ . . . 2c., Fig. 88, sei eine Kreisevolvente, C′ C″ der abgewickelte

Kreis. Alle Normalebenen der Evolvente stehen auf der Kreisebene senkrecht und projiciren sich als die Tangenten P′ C′, P″ C″ . . . ꝛc. des Kreises. Je zwei benachbarte Normalebenen schneiden sich nach einer geraden Linie, welche wiederum auf der Kreisebene senkrecht steht, und sich darauf als Kreuzungspunkt an zwei Nachbartangenten projicirt. Wrrden die Punkte P′ P″ . . . ꝛc. unendlich nahe aufeinander folgend genommen, so sind die Berührungspunkte C′ C″ . . . ꝛc. zugleich die Projektionen der aufeinander folgenden Durchschnitte aller Normalbenen, d. h. diese Durchschnitte bilden eine Cylinderfläche, von welcher der Kreis die Grundlinie. Sofort denke man sich auf der Senkrechten über C′ in beliebiger Höhe einen Punkt, welcher D′ heißen soll, und stelle sich vor, er sei mit P″ durch eine gerade Linie verbunden, dann entsteht eine Figur, ähnlich wie T P U, Fig. *84*, wo P unserm jetzigen D′, und T U unserer Projektion C′ P′ entspricht; oder auch eine Figur von gleicher Bedeutung von P′ C′ D′, Fig. *86*. Unsere gedachte schiefe Linie P″ D′ nun wird die Senkrechte C″ in einem Punkte D″ unendlich nahe bei D′ durchschneiden. Dies D″ verbinde man durch eine neue schiefe Linie mit P‴; diese ihrerseits wird die Senkrechte C‴ in einem Punkte D‴ schneiden, welcher wiederum mit P^{IV} verbunden wird u. s. f. Die Punkte D′, D″, D‴ . . . ꝛc. bilden auf der Cylinderfläche eine Linie, deren unendlich kleine Bögen oder Elemente D′ D″, D″ D‴ . . . ꝛc. mit den Senkrechten C′, C″ . . . ꝛc. gleiche schiefe Winkel bilden. Dies ist also eine Schraubenlinie, deren Fortsetzung nach abwärts durch den Ursprung U der Evolvente geht. Man denke sich, die Ebene P′ C′ werde um die Senkrechte C′ gedreht, so daß P′ den unendlich kleinen Bogen P′ P″ beschreibt, dann wird P′ D′ sich auf P″ D′ D″ legen, also werden auch die zwei Linienelemente D′ D″ und D″ D‴ in eine Verlängerung fallen. Denkt man diese Drehungen der Normalebenen anfänglich bei U begonnen und setzt sie nach einander in der Richtung gegen P″ fort, so ergiebt sich, daß ein biegsamer Faden, welcher längs der Schraubenlinie um den Cylinder gespannt wird, durch seine Abwicklung von U aus wieder die Evolvente U P′ P″ . . . beschreiben würde, wie diese Linie schon durch die Abwicklung des Kreises beschrieben wurde. Nun war aber zu Anfang die Höhe C′ D′ willkürlich genommen; jede andere Höhe würde bei gleichem Behandeln wie die erste einer andern Schraubenlinie das Dasein gegeben haben und so zeigt sich denn,

Fig. *88*.



daß U P′ P″ ... die gemeinsame Abwicklungslinie aller Schraubenspiralen ist, welche auf dem Cylinder U C′ C″ ... gezeichnet werden können, insofern nur deren Umfang durch U geht. Nach dieser Anschauungsweise gehört der Kreis U C′ mit zur Reihe der Schraubenlinien, nur ist bei ihm die Ganghöhe Null geworden.

Zusammenstellung einiger Sätze über Berührung der Linien.

77. I. Berührungen des ersten Grades. Haben zwei oder mehrere Linien an einem Orte zwei aufeinander folgende Punkte oder ein Linienelement gemein, so berühren sie sich hier gegenseitig.

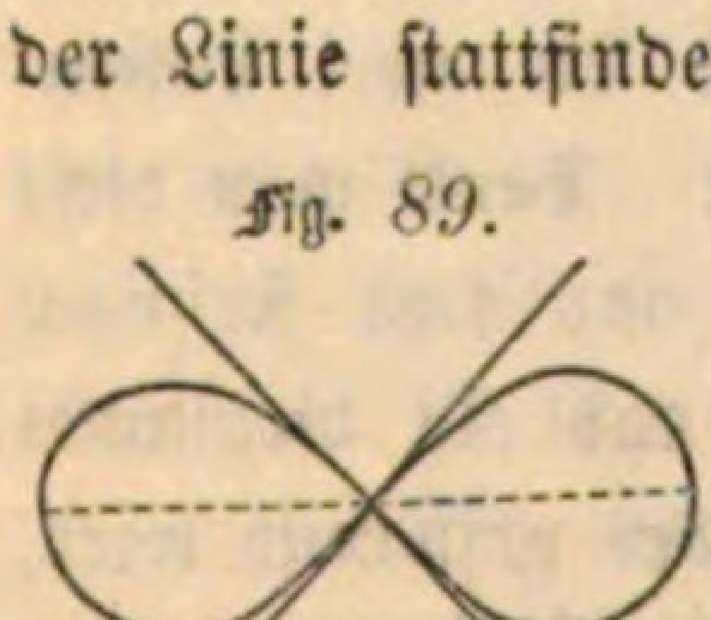
Befindet sich unter den Linien eine Gerade, so ist diese an dem Orte die gemeinsame Tangente der übrigen.

II. Berührungen zweiten Grades. Haben zwei oder mehrere Linien an einem Orte drei auf einander folgende Punkte oder zwei auf einander folgende Linienelemente gemein, so findet zwischen ihnen hier eine Berührung zweiten Grades (osculatio) statt. Befindet unter der Zahl sich ein Kreis, so ist dieser der gemeinsame Krümmungskreis der übrigen an genanntem Orte.

III. Eine Berührung höheren Grades findet statt, wenn zwei oder mehrere Linien an einem Orte drei oder mehr auf einander folgende Linienelemente gemeinsam haben, wobei jedoch die Summe dieser Elemente, gleichwie in den vorhergehenden Fällen, stets eine unendlich kleine Größe bleibt.

Anmerkung. Daß eine krumme Linie von einer Geraden in einem ihrer Punkte berührt, und in andern durchschnitten werden kann, zeigt schon der Anblick einer Spirale oder einer Kreisevolvente. Berührung und Schnitt kann aber auch in einem und demselben Punkte stattfinden, und dies geschieht, wenn z. B. im Berührungspunkte zugleich eine Beugung (inflexio) der Linie stattfindet, wo ihre Krümmung von links nach rechts sich wendet.

Fig. 89.



Ein Beispiel bietet die Lemniscate (Linie von der Form einer Schleife), Fig. 89. Die Schleife kreuzt sich in einem Punkte, welcher nach der Sprache der höheren Geometrie ein doppelter Punkt (punctum duplex) genannt wird. Hier findet zugleich eine Beugung des Linienzuges statt und jede daselbst gezogene Tangente ist zugleich auch Secante, d. i. schneidende Linie an demselben Ort. Ein anderer Fall kommt bei solchen Kurven vor, welche in ihrem Laufe einen „Schnabel" bilden wie die Evolventen. Der Punkt U (vergl. Fig. 88), die Spitze des Schnabels, wo

die Linie zurückspringt, um einen entgegengesetzten Lauf zu nehmen, wird ein *Rückkehrpunkt* (punctum regressus) genannt: an diesem Punkte ist der verlängerte Kreisradius zu gleicher Zeit Tangente wie Secante der Evolvente.

Rückblick.

78. Indem wir uns vorstehend in einige Entwicklung einließen über die Theorie der Kurven oder krummen Linien, geschah dies eben so sehr um der Sache selbst willen, als auch um die Gelegenheit zu nützen, gleich von vornherein unsern Leser in Mitte des Ideenkreises zu führen, in welchem wir uns fürder zu bewegen haben werden; sie bekannt zu machen mit den Formen der Anschauung und der Beweisführung, welche beim Vortrag der darstellenden Geometrie üblich. Denn alle diese Gegenstände sind nur durch die Vorstellungskraft zu fassen, und indem diese geistige Fähigkeit des Lernenden durch zweckgemäße Anleitung gebildet und geschärft wird, erwächst ihm damit gleichsam ein Nebengewinn, welchen er als „Techniker" minder hoch in Anschlag bringen dürfte denn als Zeichner.

Allgemeine Ansichten über die Erzeugung krummer Flächen.

79. Von der Vorstellung ausgehend, daß die Flächen erzeugt werden durch die gesetzmäßige Bewegung geometrischer Linien im Raume, kann man, zum Zwecke einer Eintheilung der Flächenarten, für die Ortsveränderung der Linie, gleichwie für jene des Punktes, zwei Grundbewegungen unterstellen, nämlich die gerade fortschreitende, und zweitens die drehende oder rotirende.

Rotirende Bewegung einer Linie.

Sie besteht in der gleichzeitigen Umdrehung aller ihrer Punkte um eine feste Axe, so daß nach geschehenem vollständigen Umlauf ein jeder dieser Punkte den Umfang eines Kreises zurückgelegt hat, dessen Centrum in der Axe liegt und dessen Ebene auf der Axe senkrecht steht.

Die Gesammtheit aller Punkte des Raumes, durch welche die rotirende oder erzeugende Linie während ihrer Umdrehung kam, gehört einer Fläche an, deren Gestalt in dem einzelnen Falle abhängt von der Gestalt der rotirenden Linie, sowie von deren ursprünglicher Stellung zur Axe. Im Allgemeinen nennen wir jede durch Rotation entstandene Fläche eine *Umdrehungsfläche*, *Rotationsfläche* (superficies rotationis, revolutionis), und die rotirende Linie ist die *Erzeugungslinie* (generatrix) derselben.

Man denke sich alle die Kreise, welche von den Punkten der rotirenden Erzeugungslinie beschrieben werden, als wirklich vorhanden, so besteht die Fläche gewissermaßen aus der Gesammtheit dieser Kreise, deren Ebenen alle unter sich parallel sind und welche man darum auch Parallelkreise der Umdrehungsfläche nennt, indem ein geographischer Begriff hier herüber gezogen wird.

Nun nehme man einen Parallelkreis der Umdrehungsfläche an, und denke sich, durch jeden seiner Punkte ginge eine Linie von der Gestalt und Stellung der rotirenden Linie bei ihrem Durchgang durch den Punkt, so sind dies fixirte Erzeugungslinien, aus deren Gesammtheit abermals die Vorstellung der Fläche hervorgeht. Wird unterstellt, dies System von Erzeugungslinien existire gleichzeitig mit jenem ersten Systeme der Parallelkreise, so hat man ein Netz von Linien, welches ganz der Fläche angehört und welches verdeutlicht, wie in jedem Punkte der Umdrehungsfläche einer ihrer Parallelkreise sich kreuzt mit einer ihrer Erzeugungslinien.

Die rotirende Erzeugungslinie der Umdrehungsfläche soll, wollen wir annehmen, eine Linie sein, deren Theile nicht in einer Ebene liegen, oder mindestens nicht in einer und derselben Ebene mit der Drehungsaxe.

Nun nennt man jede durch die Axe gehende Ebene, wiederum nach geographischer Anschauung, eine Meridianebene, und indem eine derartige Ebene als vorhanden angenommen wird, erkennt man, daß sie alle Parallelkreise der Umdrehungsfläche, jeglichen in zwei Punkten, durchschneiden müsse, welche zur Axe symmetrisch liegen. Diese Durchschnittspunkte gehören einer Linie an, welche der Meridian der Fläche heißt.

Durch die Rotation dieses Meridianes um die Axe entsteht wiederum die vorige Umdrehungsfläche, weil ein jeder Punkt des Meridianes während der Rotation nur den Parallelkreis durchlaufen kann, dem er ursprünglich schon angehörte.

Nebenbei sei hier bemerkt, daß alle Meridiane einer Umdrehungsfläche die gleiche Gestalt haben müssen, weil es eigentlich nur verschiedene Stellungen einer und derselben rotirenden Linie sind.

Auf unserer vorigen Umdrehungsfläche zeichne oder denke man sich jetzt eine Linie von ganz beliebiger Gestalt, nur der Art, daß sie sämmtliche Parallelkreise durchkreuzt; man lasse auch diese Linie wieder um die Axe rotiren, so wird man dadurch abermals dieselbe Umdrehungsfläche, weil dieselben Parallelkreise, erzeugen.

So ist also ersichtlich, wie für dieselbe Umdrehungsfläche verschiedene

Erzeugungsarten angegeben werden können, ja wie deren Zahl beliebig zu vermehren sei, und dabei war immer nur von rotirender Bewegung die Rede.

In den Parallelkreisen einer Umdrehungsfläche hat man deren eigentliches Kennzeichen zu erblicken, und sie sind es, welche der Fläche wesentlich den Charakter des „Runden" aufprägen. Durch die Betrachtung dieser Kreise begreift man auch die Möglichkeit, wie die Formen von Umdrehungsflächen mechanisch vermittelst der Drehbank hervorgebracht werden können.

Gerade fortschreitende Bewegung einer Linie.

80. Man wird sagen können, eine Linie befinde sich in gerade fortschreitender Bewegung, wenn alle ihre Punkte gleichzeitig in gleicher Richtung fortrücken. Folgende Einzelfälle mögen hierher zu zählen sein.

Erstens: Eine Erzeugungslinie C von irgend welcher Form bewegt sich der Art, daß jeder ihrer Punkte eine Parallele beschreibt zu einer gegebenen Geraden K. Die Fläche, welche durch die Gesammtheit der beschriebenen Parallelen gebildet wird, nennen wir eine cylindrische.

War C ein Kreis und K stand senkrecht auf der Kreisebene, so entstand die gerade kreisrunde Cylinderfläche; stand K unter schiefem Winkel gegen die Kreisebene geneigt, so ward eine schiefe kreisrunde Cylinderfläche hervorgebracht. War C ein Parabel, eine Hyperbel, so entstand durch ihre Bewegung eine parabolische, eine hyperbolische Cylinderfläche u. s. f. Die Ebenen all dieser Kurven blieben während der Bewegung stets parallel zur anfänglichen Stellung.

Alle projicirenden Flächen krummer Linien gehören zu dieser Gattung von cylindrischen Flächen.

Zweitens: Es ist irgend eine Linie C gegeben und ein fester Punkt Q außer ihr. Bewegt sich C der Art, daß jeder ihrer Punkte in der geraden Linie fortrückt, deren Richtung nach Q geht, so nennen wir die Fläche, welche durch diese Bewegung der Erzeugungslinie C hervorgebracht wird, eine konische oder Kegelfläche.

War C ein Kreis und Q lag in dessen Axe, so entstand die gerade kreisrunde Kegelfläche; lag Q außerhalb der Kreisaxe, so entstand die schiefe kreisrunde Kegelfläche. Während der Bewegung blieb die Kreisebene stets parallel mit ihrer Anfangsstellung, aber der Kreisumfang mußte in demselben Verhältniß kleiner werden, als die Ebene sich dem Punkt Q näherte. Erreichte sie Q, so ward in diesem Augenblick der Umfang Null, um jenseits wieder in demselben Verhältniß zu wachsen, wie er bis daher abgenommen.

Wo die kreisrunde Kegelfläche als Oberfläche eines Körpers auftritt, ist Q die Spitze oder der Scheitel des Körpers. Aber die geometrische Kegelfläche dehnt sich von Q nach entgegengesetzten Richtungen aus, wenn man will bis ins Unendliche, und so erscheint Q nicht als Scheitel, sondern als Mittelpunkt der Fläche.

War C etwa eine archimedische Spirale, dann entstand durch ihre Bewegung nach Q eine spirische Kegelfläche. Die Spiralebene blieb während der Bewegung stets sich selbst parallel, die Linie sich selbst ähnlich, aber ihr Umfang verkleinerte sich, indem die Fahrstrahlen in demselben Verhältnisse abnahmen, wie vorhin die Radien des Kreises. Beim Durchgang durch Q ward die Spirale Null und begann dann wieder in demselben Verhältniß sich auszudehnen.

81. Bei der erörterten Entstehung konischer Flächen tritt somit eine Erzeugungslinie auf, welche zu gleicher Zeit den Ort verändert und die Gestalt, weil den Umfang.

Ein ähnliches Verhalten kann auch bei allen Rotationsflächen nachgewiesen werden. Stellen wir uns nämlich eine solche Fläche F vor, deren Meridian jedoch nicht geradlinig ist, also eine beliebige Umdrehungsfläche mit Ausschluß der Kegel- oder Cylinderform. Von dieser Fläche seien vorhanden: die Axe, ein Meridian, und ein Parallelkreis, welcher den Meridian in einem Punkte P durchkreuzt. Axe und Meridian seien fest, der Parallelkreis aber mobil und bewege sich der Art, daß sein Centrum immer in der Axe bleibt, seine Ebene senkrecht zur Axe und sein Punkt P immer auf dem Meridian. In Folge dieser Bedingungen wird der mobile Kreis seinen Umfang nach Maßgabe des Meridianes verengern oder erweitern, und nach einander auf allen früheren Parallelkreisen der Fläche F überein fallen, also diese Fläche in fortschreitender Bewegung wieder erzeugen. Ich sage „in fortschreitender Bewegung", weil eine Spur von Drehung hier überall nicht zu finden ist; wohl aber hat man es hier mit einer fortschreitenden Bewegung zu thun, wobei die Bahnen der einzelnen Punkte des mobilen Kreises nicht mehr geradlinig sind. Es zeigt sich hierdurch, wie die Begriffe von Bewegung, wenn man sie auf „Linien" anwendet, keineswegs mehr zu so einfachen Folgerungen führen, als dies beim „Punkte" der Fall.

Modificirte Drehung.

82. In §. 63 haben wir die Ellipse betrachtet, als sei sie aus zusammengesetzter Drehung eines Punktes hervorgegangen. Die modificirte

oder elliptische Drehung läßt sich auch auf Flächen anwenden, wovon folgende Fälle hier hervorgehoben werden sollen.

Denkt euch, etwa in vertikaler Ebene, eine Ellipse A, deren eine Axe horizontal, die andere also vertikal liegen soll *); die erste habe eine Länge, welche mit 2α bezeichnet werde, die zweite eine Länge gleich 2β. Diese letztere nehmet als Rotationsaxe an und lasset die Ellipse A sich um dieselbe drehen. Dadurch entsteht eine Fläche, welche wir Umdrehungs- oder Rotations-Ellipsoid nennen und welche zur Sippe der Sphäroide oder kugelartigen Flächen gehört. Die Scheitel $S'S$ der Ellipse A, welche zugleich die Endpunkte der Rotationsaxe 2β bilden, sind während der Umdrehung fest geblieben und Scheitel oder Pole des Ellipsoides geworden. Die Scheitelpunkte Σ, Σ aber, welche zugleich die Endpunkte der Axe 2α sind, diese Scheitelpunkte haben in während der Rotation den größten Parallelkreis, oder den Aequator des Ellipsoides beschrieben.

War nun 2β die große Axe der Ellipse A, so ward durch ihre Umdrehung ein längliches oder überhobenes Ellipsoid hervorgebracht; ist hingegen 2β die kleine Axe gewesen, so wurde ein gedrücktes oder abgeplattetes Ellipsoid erzeugt.

Haltet die Vorstellung fest, daß 2α die große Axe der Ellipse A sei, verwandelt aber den von dieser Axe beschriebenen größten Parallelkreis in eine wagerechte Ellipse B, deren große Axe wiederum 2α, deren kleine Axe aber mit 2γ bezeichnet werden soll, und zwar sei γ kleiner als β. An den Enden von 2α haben somit die beiden Ellipsen A und B die gleichen Scheitelpunkte Σ, Σ. Sofort drehe A sich der Art um die an Größe unveränderliche Axe 2β, daß ihr Scheitel Σ den Umfang der Ellipse B durchläuft. Dabei wird die rotirende Ellipse A sich zugleich so ändern müssen, daß die anfängliche große Axe 2α abnimmt, bis sie nach einer Viertelsdrehung die Größe 2γ erreicht hat und somit zur kleinen Axe geworden ist. Diese veränderliche Axe fällt nach Richtung und Größe stets zusammen mit einem Durchmesser der Ellipse B, von welchen einer eine Größe gleich β haben muß. Wenn die mobile Ellipse die Stelle dieses Durchmessers erreicht hat, sind ihre beiden Axen gleich, und sie ist zum Kreise geworden. Von hier ab wird bei weiterer Drehung die große Axe zur kleinen, deren Minimum 2γ, wie schon gesagt, um $90°$ von 2α absteht. Nach vollendeter Umdrehung

*) Die Schüler mögen sich selbst eine Zeichnung entwerfen, wenn ihnen dies zu besserem Verständniß dienlich erscheinen sollte.

der Ellipse A wird jeder ihrer Punkte eine elliptische Bahn zurückgelegt haben, welche der Ellipse B ähnlich ist, und in Bezug auf die Axen ähnlich mit ihr liegt.

Die Fläche, welche durch solche modificirte Rotation der Ellipse A erzeugt worden, nennt man ein **Ellipsoid mit drei ungleichen Axen**. Die Geraden 2α, 2β, 2γ sind diese Axen; ihre Endpunkte sind die sechs Scheitel des Ellipsoides. **Haupt-Ellipsen** der Fläche heißen jene drei Linien A, B, C, welche die Geraden 2α und 2β, oder 2α und 2γ, oder drittens 2β und 2γ zu Axen haben.

83. **Lemma.** **Zweite, auch eingebildete** Axe einer Hyperbel nennt man eine gerade Linie, welche in der Ebene der Linie und in ihrem Mittelpunkt senkrecht zur ersten Axe errichtet worden, und deren Größe beiderseits vom Mittelpunkte dieselbe ist, wie jene des zweiten Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen erster Kathete gleich ist der halben ersten Axe, und die Hypothenuse gleich der Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkte. Diese zweite Axe kann kleiner oder größer sein als die erste, beide Axen sind gleich bei der **gleichseitigen** Hyperbel (Bd. I. S. 177).

84. Setzet jetzt an die Stelle der bisher genannten Ellipse A eine Hyperbel A, deren erste und zugleich wagerechte Axe die vorige Gerade 2α sei, und deren zweite vertikale Axe die Gerade 2β. Diese Gerade 2β diene als Drehungsaxe und A bewege sich um dieselbe in einfacher Rotation. Dabei nun werden die Endpunkte Σ, Σ der Axe 2α, welches die Scheitel der Hyperbel sind, den kleinsten Parallelkreis der erzeugten Fläche beschreiben, welchen wir den **Kehlkreis** nennen. Von hier aus wachsen die Parallelkreise auf beiden Seiten bis ins Unendliche, so daß die Fläche eine doppelt trichterartige Gestalt erhält, und **Umdrehungs-Hyperboloid von einem Netze** genannt wird, welche Benennung wir also gleich rechtfertigen werden.

Der Hyperbel A gebe man jetzt anstatt der einfach rotirenden eine elliptische Drehung um die Axe 2β unter der Bedingung, daß der Kehlkreis sich in eine wagerechte Ellipse B verwandle, deren beide Axen wie vorhin die Linien 2α und 2γ sind. Dadurch wird die Hyperbel A ähnlichen Formveränderungen unterworfen, wie in §. 95 die Ellipse A, und jeder ihrer Punkte wird eine der Ellipse B ähnliche und zur Axe 2β ähnlich liegende elliptische Bahn zu durchlaufen haben. Die erzeugte Fläche ist das **elliptische Hyperboloid von einem Netze.**

85. Wir fassen abermals die Hyperbel A ins Auge, geben ihr aber eine einfache Rotation um die **wagerechte** Axe 2α, wobei ihre Scheitel Σ

unveränderlich fest bleiben und zu Polen der erzeugten Fläche werden. Wie nun die Hyperbel selbst aus zwei getrennten Aesten besteht, so wird unsere Rotationsfläche jetzt zwei getrennte Theile haben, deren jedem wir den Namen eines Netzes beilegen*), und wir nennen die Fläche Umdrehungs-Hyperboloid von zwei Netzen.*)

Anstatt der vorigen einfachen Drehung der Hyberbel A modificire man diese Bewegung nach folgenden Bedingungen: über den Geraden 2β, 2γ konstruire man die in §. 95 mit C bezeichnete Ellipse und lege der Hyperbel die Bedingung auf, daß während ihrer Umdrehung ein jeder ihrer Punkte eine Ellipse durchlaufe, welche der Ellipse C ähnlich ist und zu ihr bezüglich der Rotationsaxe; 2α ähnlich liege, dann wird durch diese modificirte Drehung das elliptische Hyperboloid von zwei Netzen hervorgebracht werden.

86. Durch die Drehung einer Parabel um ihre Axe entsteht ein Umdrehungs-Paraboloid. Π sei ein Punkt der Parabel und K der Parallelkreis, welchen Π während der Rotation beschrieben. Man verwandle K in eine Ellipse, deren eine Axe dem Durchmesser von K gleich ist, während Ebene und Mittelpunkt der Linie unverändert bleibt, und lasse die Parabel sich dergestalt umdrehen und ändern, daß der Parabelpunkt Π den Umfang der Ellipse durchläuft; dann wird durch diese modificirte Drehung das elliptische Paraboloid erzeugt.

Ein Wort von den krummen Flächen zweiter Ordnung.

87. Die Kegelschnitte (Bd .I, §. 105) werden auch Linien zweiter Ordnung oder zweiten Grades genannt nach dem bezeichnenden Merkmale, daß sie von einer geraden Linie oder ebenen Fläche in nicht mehr als in zwei Punkten geschnitten werden können. Ueberhaupt pflegt man den Grad oder die Ordnung geometrischer Linien nach der möglichen Zahl solcher Durchschnittspunkte zu bezeichnen. Die Gerade z. B. ist eine Linie erster Ordnung und zwar die einzige dieses Grades.

Die Flächen zweiter Ordnung sind dadurch bezeichnet, daß sie von ebenen Flächen stets nach Linien der zweiten Ordnung durchschnitten werden.

*) Vor bereits langen Jahren hat der Verfasser für das französische „nappe“ das deutsche „Netz“ eingeführt, von der Vorstellung ausgehend, daß jeder der getrennten Flächentheile mit einem Netze umsponnen werden könnte. Eine treffendere Bezeichnung ist seitdem nicht gefunden worden, und da es sich schließlich doch nur um einen Namen handelt, lag kein Grund vor, hier den Versuch mit einem neuen zu machen.

Zu dieser Flächenordnung gehören die Kegel- und Cylinderflächen mit Grundlinien vom zweiten Grade. Die Ellipsoide mit Inbegriff der Kugel, die Hyperboloide und die Paraboloide. Von letzteren haben wir bis daher nur Gelegenheit gehabt, das Umdrehungs-Paraboloid und das elliptische Paraboloid anzuführen, und wir müssen diesen zur vollständigen Aufzählung aller Flächen zweiter Ordnung noch das hyperbolische Paraboloid beifügen.

88. Denkt euch eine Parabel, etwa in wagerechter Ebene. Σ sei ihr Scheitel. Durch die Axe der Linie leget eine vertikale Ebene und zeichnet in dieser eine zweite Parabel, welche denselben Scheitel Σ hat und deren Axe gleiche Richtung hat wie jene der ersten. Diese bleibe fest, die zweite Parabel aber bewege sich der Art, daß ihr Scheitel Σ den Umfang der festen Parabel durchläuft, während ihre Ebene und Axe der anfänglichen Richtung parallel bleiben. War nun die Stellung der beweglichen Parabel der Art, daß sie sich nach der gleichen Seite öffnete, wie die feste oder leitende, dann entstand durch die Bewegung der ersteren wieder das elliptische oder das Rotations-Paraboloid, je nachdem beide Parabeln ungleichen oder gleichen Parameter hatten. War aber die Oeffnung der mobilen Parabel jener der leitenden entgegengesetzt, dann erzeugte sie das hyperbolische Paraboloid, eine krumme Fläche, deren ebene Durchschnitte niemals geschlossene Linien sein können, und welche sich auch niemals, weder durch einfache noch durch modificirte Rotation, erzeugen läßt.

Gleitende Bewegung der Erzeugungslinie.

89. Diese Art des Fortschrittes, von häufigem Vorkommen bei Erzeugung der Flächen, findet alsdann statt, wenn die mobile Linie während ihrer Bewegung fortwährend auf eine oder einige als fest gedachte Linien sich stützt, oder, was dasselbe besagt, wenn sie jede derselben immer durchschneidet.

Jede solcher festen Linien heißt eine Leitlinie (directrix), der beweglichen Linie wie der erzeugten Fläche.

Wir sprechen zunächst nur von der gleitenden Bewegung einer geraden Erzeugungslinie und unterscheiden dabei folgende Sonderfälle:

a. Die gerade Erzeugungslinie bewegt sich der Art, daß sie mit einem ihrer Punkte den Umfang einer krummen Leitlinie durchläuft, während sie dabei stets parallel bleibt zu einer bestimmten Richtung. Die Fläche, welche dadurch hervorgebracht wird, gehört zur Gattung der cylindrischen Flächen.

b. Die gerade Erzeugungslinie bewegt sich wie vorhin auf einer

krummen Leitlinie, während sie jedoch fortwährend durch einen festen Punkt außerhalb der Leitlinie geht. Durch solches Bewegen wird einer konischen Fläche die Entstehung gegeben.

Hätte man in den genannten zwei Fällen als Leitlinie eine Gerade angenommen, so wäre durch die mobile Gerade eine ebene Fläche hervorgebracht worden.

90. c. Eine mobile Gerade bewegt sich nach folgenden Gesetzen; sie durchschneidet stets zwei feste Leitlinien, bleibt dabei aber parallel zu einer bestimmten Ebene, welche man Leitebene nennen könnte. In diesem Falle die Erzeugungslinie E zu konstruiren, welche einem Punkte Q entspricht, den man beliebig auf einer der Leitlinien gegeben oder genommen, lege man durch dies Q eine Ebene parallel zur Leitebene; man bestimme den Punkt, oder, wenn es deren mehrere giebt, die Punkte R, R' rc., in welchem die andere Leitlinie von dieser Ebene geschnitten wird, und durch Q und R oder durch Q und R' wird E bestimmt seyn.

Im vorliegenden Falle könnten die Leitlinien auch gerade Linien sein, wofern sie nur nicht in gleicher Ebene mit einander liegen, und die erzeugte Fläche gehörte alsdann zur Art der Paraboloide, wie dies später nachgewiesen werden soll.

d. Auch folgende etwas veränderte Bedingung hätte gestellt werden können: die Gerade E soll sich auf zwei Leitlinien hinbewegen, dabei aber stets den gleichen Winkel W mit einer Leitebene A machen.

Unter diesen Verhältnissen nun die Gerade E zu konstruiren, welche einem beliebigen Punkte Q der ersten Leitlinie entspricht, sind folgende Beziehungen ins Auge zu fassen.

Die geraden Erzeugungslinien einer geraden kreisrunden Kegelfläche machen mit der Ebene ihres Grundkreises gleiche Winkel; sie machen mit der Axe der Fläche Winkel, welche die Komplemente der ersten sind.

Man fälle demnach aus Q einen Perpendikel Π auf die Ebene A; man ordne eine gerade Kegelfläche an, von welcher Π die Axe, und deren gerade Erzeugungslinien mit der Axe Winkel bilden gleich dem Komplemente von W; man bestimme den Punkt R, oder wenn es deren mehrere giebt, die Punkte $R, R' \ldots$, wo die Hilfskegelfläche und die zweite Leitlinie sich schneiden. QR oder auch QR' sind Erzeugungslinien E, E' der vorliegenden Fläche, denn beide Linien gehen durch Q; beide liegen mit der zweiten Leitlinie auf der Hilfskegelfläche, müssen diese also auch durchschneiden, und beide endlich machen mit A Winkel gleich W.

Zusatz. Auch hier würde keine wesentliche Veränderung eintreten, wenn eine oder beide Leitlinien gerade wären, wiederum vorausgesetzt, daß sie, in dem letzteren Falle, nicht in einer und derselben Ebene mit einander liegen.

91. e. Die Bewegung der geraden Erzeugungslinie soll durch drei Leitlinien festgesetzt sein. Nach dieser Bedingung die Erzeugungslinie *E* zu erhalten, welche durch einen auf der ersten Leitlinie beliebig wo gegebenen Punkt *P* geht, verbinde man *P* mit irgend einem Punkte *Q* der zweiten Leitlinie durch eine Gerade. Diese Gerade mache man beweglich, so daß sie stets durch *P* geht, mit dem Punkte *Q* aber den Umfang der zweiten Leitlinie verfolgt, so wird dadurch eine konische Fläche hervorgebracht werden, deren Scheitel in *P* (§. 102 b). Man verbinde sofort *P* mit einem Punkte *R* der dritten Leitlinie wiederum durch eine gerade Linie, mache diese gleichfalls beweglich, daß ihr Punkt *R* den Umfang der dritten Leitlinie durchläuft, während sie stets durch *P* geht. Dadurch giebt man einer zweiten konischen Fläche die Entstehung, deren Scheitel der feste Punkt *P*. Die beiden konischen Flächen müssen darum sich nach einer Geraden *E* durchschneiden, welche sich auf alle drei Leitlinien stützt, also die verlangte Erzeugungslinie ist. Denn *E* geht durch den Punkt *P* der ersten Leitlinie, liegt mit der zweiten Leitlinie auf einer und derselben konischen Fläche, muß diese Leitlinie also durchschneiden; liegt endlich mit der dritten Leitlinie in einer andern konischen Fläche und muß also auch diese dritte Leitlinie durchschneiden.

Sind zwei von den gegebenen Leitlinien oder auch alle drei gerade Linien, welche aber paarweise nicht in gleicher Ebene enthalten sind, so legt man durch die erste gerade Leitlinie und durch einen Punkt *P* der dritten eine Ebene; man lege durch die zweite gerade Leitlinie und durch denselben Punkt *P* eine zweite Ebene. Beide Ebenen werden sich nach einer Geraden *E* durchschneiden, welche die durch *P* gehende Erzeugungslinie der fraglichen krummen Fläche ist.

Rückblick.

92. Dadurch, daß einer geraden Linie auferlegt wird, eine krumme Fläche zu erzeugen, in dem sie auf drei Leitlinien hingleitet, hat man zugleich die allgemeinste Form der gleitenden Bewegung bezeichnet. Wird eine der drei Leitlinien unterdrückt und außer Wirkung gesetzt, so muß ihre Rolle übernommen werden von Bedingungen oder Forderungen, welche den gleichen geometrischen Werth besitzen wie die, auf einer Leitlinie hinzugleiten. Wir haben in §. 90 zwei solcher Bedingungen erwähnt, sie heißen: die Erzeugungs-

linie soll während ihrer Bewegung beständig mit einer und derselben Ebene parallel bleiben, oder: die Erzeugungslinie soll dabei stets den gleichen Winkel mit einer bestimmten Ebene machen.

Wollte man zwei von den Leitlinien außer Wirksamkeit bringen und nur noch eine einzige beibehalten, so müßten jene zwei durch zwei andere Bedingungen von gleichem geometrischen Werthe ersetzt werden. Man könnte z. B. die beiden eben genannten Bedingungen gleichzeitig statuiren. In diesem Falle die Erzeugungslinie E zu konstruiren, welche einem beliebigen Punkte Q der einzigen Leitlinie entspricht, müßte man zuerst die gerade Kegelfläche anordnen, deren Scheitel in Q und deren gerade Erzeugungslinien den bestimmten Winkel mit der einen Ebene bilden; man müßte sodann durch Q eine Ebene legen, parallel zu derjenigen, mit der alle E parallel sein sollen. Beide, Ebene und Kegelfläche, würden sich nach zwei Geraden durchschneiden, welche die zwei durch Q gehenden geraden Erzeugungslinien der fraglichen Fläche sind.

Nun haben wir allerdings in §. 89 die Erzeugung der cylindrischen und konischen Flächen festgesetzt durch Hingleiten der geraden Erzeugungslinie auf einer Leitlinie unter Beifügen der einzigen weiteren Bedingung, daß sie parallel zu sich selbst bleibe oder daß sie durch einen festen Punkt gehe. Aber die Grundbedingungen, wodurch die Stellung oder Lage einer geraden Linie festgesetzt wird, sind: daß sie durch zwei feste Punkte gehe, oder durch einen Punkt und parallel zu einer bestimmten Richtung. Die Forderung dagegen: eine Gerade solle durch einen festen Punkt gehen und mit einer Ebene einen gegebenen Winkel bilden, ist schon nicht mehr bestimmt, denn sie führt, wie wir gesehen haben, auf die Betrachtung einer geraden Kegelfläche, deren Scheitel jener feste Punkt, deren Axe auf der Ebene senkrecht steht, und deren gerade Erzeugungslinien den gegebenen Winkel mit der Ebene bilden. Nur eine hinzutretende dritte Bedingung vermag unter all diesen Erzeugungslinien jene auszuzeichnen, welche man im Auge hatte.

Selbst die Forderung, durch einen Punkt eine gerade Linie zu legen, welche mit einer zweiten Geraden einen bestimmten Winkel bildet, ist nur bestimmt durch die ausdrückliche oder stillschweigend angenommene weitere Bedingung, daß beide Geraden in einer Ebene liegen, denn ohne dieses kommt man wieder auf die Betrachtung einer Kegelfläche, deren sämmtliche gerade Erzeugungslinien gleiche Winkel bilden mit ihrer Axe und folglich auch mit jeder Parallelen zur Axe.

Wir gelangen somit zur Schlußfolgerung, daß wenn eine krumme Fläche er-

zeugt werden soll durch die gleitende Bewegung einer mobilen Geraden auf festen Leitlinien, deren drei erforderlich seyen; man müßte denn die eine oder die andere durch Bedingungen ersetzen, welche den gleichen geometrischen Werth haben wie jene: eine bestimmte Linie zu durchschneiden.

* * *

Andere Erzeugungsarten krummer Flächen heischen zu ihrer Erklärung das vorhergegangene Erörtern gewisser Beziehungen zwischen Flächen und Linien, weshalb wir erst an geeigneterem Orte davon reden werden.

Von der graphischen Darstellung krummer Flächen.

93. Der Zeichner, welcher die Gegenstände der sichtbaren Natur darstellt, giebt zunächst die Umrisse dieser Gegenstände (§. 12, S. 6). Wir werden ihm darin nachfolgen, weil auch unsere Zeichnungen, obwol nach andern Gesetzen entworfen, doch gleichfalls dem Auge räumliche Formen veranschaulichen sollen. Aber wir gewinnen unsere Konturen nicht durch Nachahmung, sondern durch Befolgen projektiver Gesetze. Ein bestimmter Fall wird unsere Methode verdeutlichen.

Fig. 90.

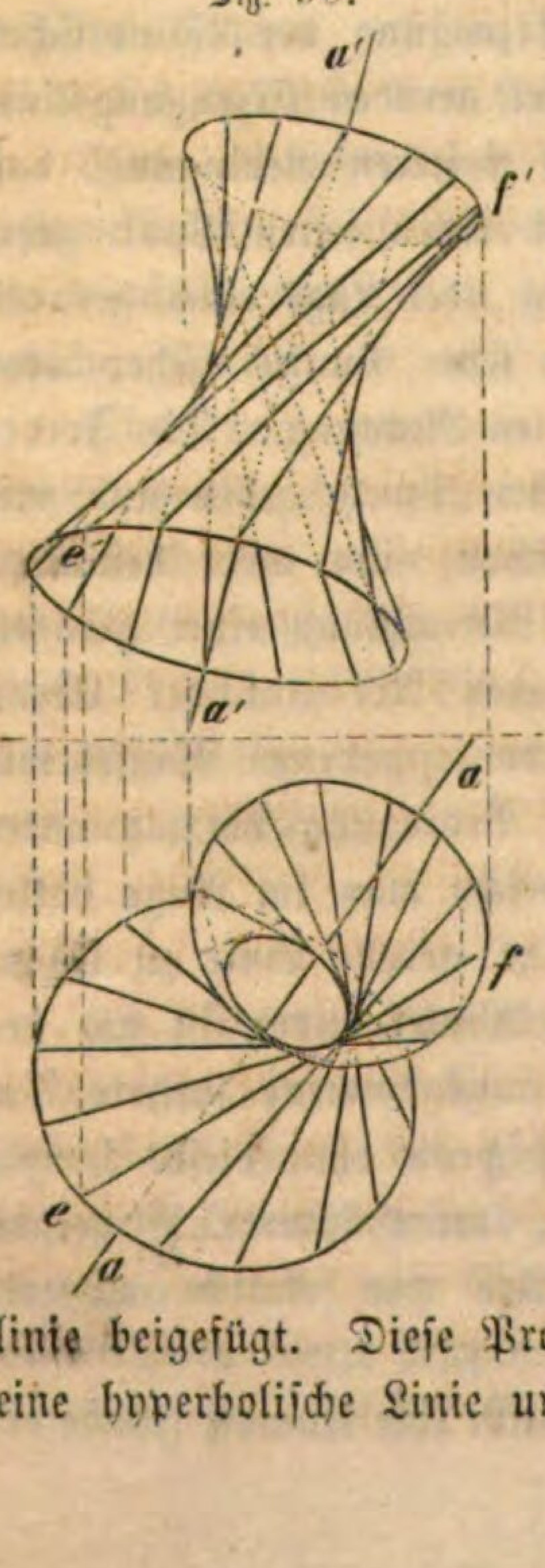


Fig. 90 stellt eine krumme Fläche vor, eine Umdrehungsfläche, welche erzeugt worden durch die Rotation einer Geraden *(e f, e' f')* um eine Axe *(a a, a' a')*, mit welcher die erste Gerade nicht in einer Ebene liegt. Dieser letztere Umstand erhellt daraus, daß die Projektionen der zwei Geraden sich in Punkten kreuzen, welche nicht senkrecht über oder unter einander liegen (§. 37). Wir haben *(e, e')* und *(f, f')* als Grenzpunkte der geraden Erzeugungslinie angenommen und die Projektionen der Parallelkreise verzeichnet, welche während der Rotation von diesen Punkten beschrieben werden. Diese Kreise betrachteten wir auch als die Grenzlinien der Fläche, und ihre Projektionen als Theile von den Umrissen derselben. Wir haben ferner noch die Projektionen einer Reihe anderer Stellungen der Erzeugungslinie beigefügt. Diese Projektionen werden in der vertikalen Bildfläche durch eine hyperbolische Linie umgrenzt und berührt, welche hier scheinbarer Umriß

der Fläche ist. Auf der horizontalen Bildfläche wird der scheinbare Umriß von einer elliptischen Linie gebildet, welche wiederum die horizontalen Projektionen aller geraden Erzeugungslinien umhüllend berührt.

Diese Angabe der wirklichen und scheinbaren Umrisse, verbunden mit den Projektionen einer gewissen Zahl von Erzeugungslinien, geben unserer Darstellung hinreichende Anschaulichkeit, und ähnlicher Weise werden wir uns in ferneren entsprechenden Fällen benehmen.

Noch eine Bemerkung zu Fig. *90*. Wie die gerade Linie ihrer Länge nach als unbegrenzt zu betrachten ist, so müssen oder können auch jene Flächen, welche durch die gerade Linie erzeugt werden, in der Richtung dieser ihrer Erzeugungslinien als unbegrenzt gedacht werden. Wollte man der Fläche Fig. *90* in genannter Richtung eine größere Ausdehnung geben, so würde solches für unsere Zwecke auszuführen sein durch eine Verlängerung ihrer geraden Erzeugungslinien, bez. deren Projektionen.

Verbindung von Flächen.

94. Hierunter sind jene Fälle verstanden, in welchen zwei oder mehrere Flächen gewisse Punkte oder Linien gemeinsam haben. Wir unterscheiden dabei Durchschnitte und Berührungen der Flächen.

Eine krumme und eine ebene Fläche in Verbindung.

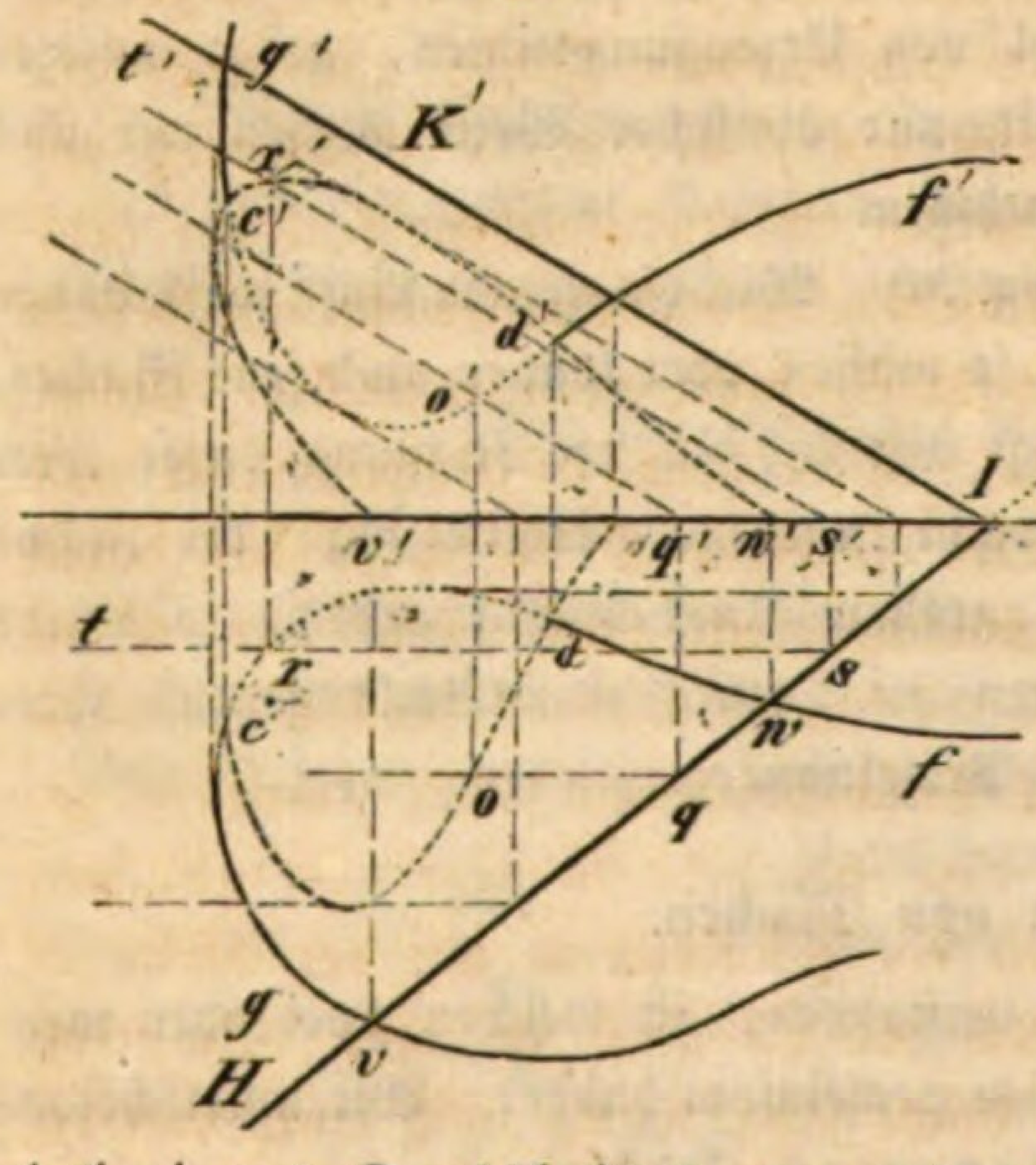
95. Durchschnitte.

Man denkt sich eine krumme und eine ebene Fläche in solcher Stellung, daß sie sich gegenseitig durchdringen oder durchschneiden. Eine Erzeugungslinie der ersteren wird alsdann die Ebene in einem oder in mehreren Punkten durchdringen, welche Punkte dem fraglichen Durchschnitte angehören. Bewegt sich jene Linie, die krumme Fläche zu erzeugen, und hat sie ihren ganzen Weg durchlaufen, so wird sie auch die Ebene fortwährend oder bis zu gewissen Grenzen durchschneiden, und aus allen Punkten, in welchen dies geschieht, besteht die gegenseitige Durchschnittslinie der ebenen und der krummen Fläche.

Die graphische Ausführung, welche aus dieser Anschauung hervorgeht, besteht in wiederholter Lösung der Aufgabe: „Man soll die Projektionen der Durchschnittspunkte irgend einer Linie und einer ebenen Fläche bestimmen.“ Im Falle die Linie eine Gerade, so ward alles darauf Bezügliche bereits in §. 29 vorgetragen. Wie man aber bei einer krummen Erzeugungslinie sich zu benehmen habe, dies soll an Fig. *91* gezeigt werden.

f d c g und *f' d' c' g'* sind die Projektionen irgend einer krummen Linie, welche als Erzeugungslinie einer krummen Fläche betrachtet werden mag. *H I K'* ist eine Ebene, welche die krumme Linie schneidet; man verlangt die Projektionen der Durchschnittspunkte.

Fig. 91.



Zu diesem Ende denkt euch in allen Punkten der Projektion *f d c g* senkrechte Linien errichtet, sie bilden in ihrer Gesammtheit die projicirende Fläche der krummen Linie, welche Fläche, wie §. 89 bemerkt, zur Gattung der cylindrischen gehört. Wir benutzen dieselbe hier in entsprechender Weise, wie wir uns in §. 29 der projicirenden Ebenen bedient haben. Wir bestimmen nämlich

a. die Vertikalprojektion *v' c' r' d' w'* des Durchschnittes genannter projicirender Fläche und der Ebene *H I K'*.

v', r', d' ... 2c. sind die Projektionen der Punkte, in welchen die in *v, r, d* ... 2c. errichteten Vertikalen die Ebene *H I K'* durchdringen; wir konstruiren sie hier in folgender Weise: *r* ein beliebiger Punkt auf *f d r g* 2c. *t r s* eine Hilfsebene, welche zur Vertikalebene parallel steht. s' t' parallel zu *I K'* Projektion des Schnittes der Hilfsebene und der Ebene *H I K'*; *r* auf *s' t'* nach *r'* projicirt. Einem veränderten *r* entspricht ein anderes r' der Projektion *v' r' d' w'*.

b. Man denke sich nun die genannte projicirende Fläche und auf ihr erstens die ursprüngliche krumme Linie *(f d c g, f' d' c' g')* und die gefundene Durchschnittslinie *(f d c g, w' d' r' c' v')*. Wenn beide Linien sich kreuzen, so sind die Kreuzungspunkte auch diejenigen, in denen die erste Linie und die Ebene *H I K'* sich durchschneiden. Als Projektionen derselben stellen in unserer Fig. *91* sich die Punkte *c', d'* dar, welche nach *c, d* herab projicirt wurden, woraus schließlich sich ergiebt, daß die vorgelegte Ebene und die krumme Linie sich in *c, c'* und *d, d'* durchschneiden. Die Projektionen des Theiles der Linie, welcher durch die Ebene verdeckt würde, haben wir punktirt.

c) Es könnte vorkommen, daß die Projektionen *f' d' o' c' g'* und *w' d' r' c' v'* sich in Punkten kreuzten, welche keinen wirklichen Durchschnittspunkten

entsprächen. Dies zu untersuchen, hat man auch die vertikal-projicirende Fläche der Linie $(f\,d\,c\,g, f'\,d'\,c'\,g')$ in die Konstruktion gezogen. Diese Fläche besteht aus all' den geraden Linien, welche in den Punkten von $f'\,d'\,c'\,g'$ senkrecht auf die Vertikalebene errichtet werden — $d\,o\,c$ ꝛc. Horizontalprojektion des Durchschnittes der neuen projicirenden Fläche und der Ebene $H\,I\,K'$. Hierzu o' ein beliebiger Punkt auf $f'\,d'\,c'$ ꝛc. $o'\,q'$ parallel mit $I\,K'$ Projektion einer Hilfsebene, welche auf der Vertikalebene senkrecht steht. $q\,o$ parallel zur Grundlinie ist die Projektion des Schnittes der Hilfsebene und der Ebene $H\,I\,K'$. o' auf diese Parallele herab projicirt nach o. Einem neuen o' entspricht auch ein neues o ꝛc. $d\,o\,c$ und $f\,r\,g$ kreuzen sich nun in c und d, welche Punkte senkrecht unter c', bezw. d' liegen, so daß damit (c, c') und (d, d') als wirkliche Durchschnittspunkte der Linie und Ebene erprobt sind.

Zusatz. Ist die Linie L, deren Durchschnitte mit einer Ebene M gesucht wird, eine e b e n e Linie, z. B. eine Parabel, so liegen die gesuchten Punkte in der geraden Durchschnittslinie der Parabelebene mit der Ebene M und sie zu erhalten ist also nur die Aufgabe 27 u. f. zu lösen. Ja selbst wenn L in einer gegebenen krummen Fläche läge, könnte nach einer oder der andern vorgehenden Methode die Durchschnittslinie dieser Fläche und der Ebene M bestimmt werden, und da, wo dieser Durchschnitt mit L sich kreuzte, wären die Schnittpunkte von L und M.

Durchschnitt zweier krummen Flächen.

96. Man denkt sich die zwei Flächen, welche sich durchdringen, durch eine beliebige Hilfsebene geschnitten und konstruirt den Durchschnitt der Ebene mit einer jeden Fläche. Die zwei entstandenen Schnitte werden sich nun entweder selbst durchschneiden, oder sie werden keine gemeinsamen Punkte haben. Im letzteren Fall schließt man daraus, daß auch die zwei krummen Flächen in der Gegend der Hilfsebene keine gemeinsamen Punkte besitzen. Durchkreuzen sich aber die Schnitte selbst, so gehören die Punkte, in welchen dies geschieht, beiden krummen Flächen, also ihrem gegenseitigen Durchschnitte an. Durch eine passend veränderte Lage der Hilfsebene erhält man neue Punkte des gesuchten Durchschnittes, und nach gehöriger Wiederholung des Verfahrens, die zur Lösung der Aufgabe nöthige Zahl solcher Punkte.

In gegebenen Fällen wird es sich darum handeln, jene Lage der Hilfsebenen zu wählen, wodurch entweder die einfachsten oder aber die praktisch sichersten Ergebnisse geliefert werden.

Von der Berührung der Flächen.

97. **Lehrsatz.** Die letzten, oder unendlich kleinen Theile einer jeden krummen Fläche sind **ebene** Flächentheilchen, welche wir Flächenelemente oder Flächenpunkte nennen.

Beweis. Jede krumme Fläche kann erzeugt werden durch die Bewegung irgend einer Linie nach entsprechendem Gesetze. Nun sind die unendlich kleinen Theile der Erzeugungslinie geradlinige Elemente (§. 66), und in einem untheilbaren Augenblick der Bewegung folgt jedes dieser Elemente einer bestimmten Richtung, um diese Richtung nöthigenfalls im nächsten Augenblick und so stetig fort zu ändern. In jedem solcher Augenblicke wird durch das Linienelement ein unendlich kleines Flächenelement erzeugt. Aber eine gerade Linie, welche sich nach gegebener Richtung fortbewegt, giebt dadurch einer ebenen Fläche oder einem Theile derselben die Entstehung, daher endlich sind alle Flächenelemente unendlich kleine Theilchen ebener Flächen.

98. Wird ein Element einer krummen Fläche nach allen Richtungen hin verlängert gedacht, gewinnt man die Vorstellung einer Ebene, welche mit der Fläche das genannte Element oder den genannten Flächenpunkt gemein hat. Diese Ebene heißt die berührende oder tangirende Ebene der Fläche an diesem Punkte. Eine Gerade, welche in dem Punkte senkrecht auf die tangirende Ebene errichtet worden, ist die Normale der Fläche an demselben Punkte. Jede Ebene, welche durch die Normale gelegt wird, steht in dem Punkte normal oder senkrecht zur Fläche.

99. Haben zwei oder mehrere krumme Flächen ein Flächenelement gemein, so berühren sie sich hier und haben an demselben Ort eine gemeinsame tangirende Ebene, so wie eine gemeinsame Normale.

Man halte die vorstehenden Sätze über die Berührungen der Flächen zusammen mit denjenigen §. 66 u. f. über die Berührungen der Linien.

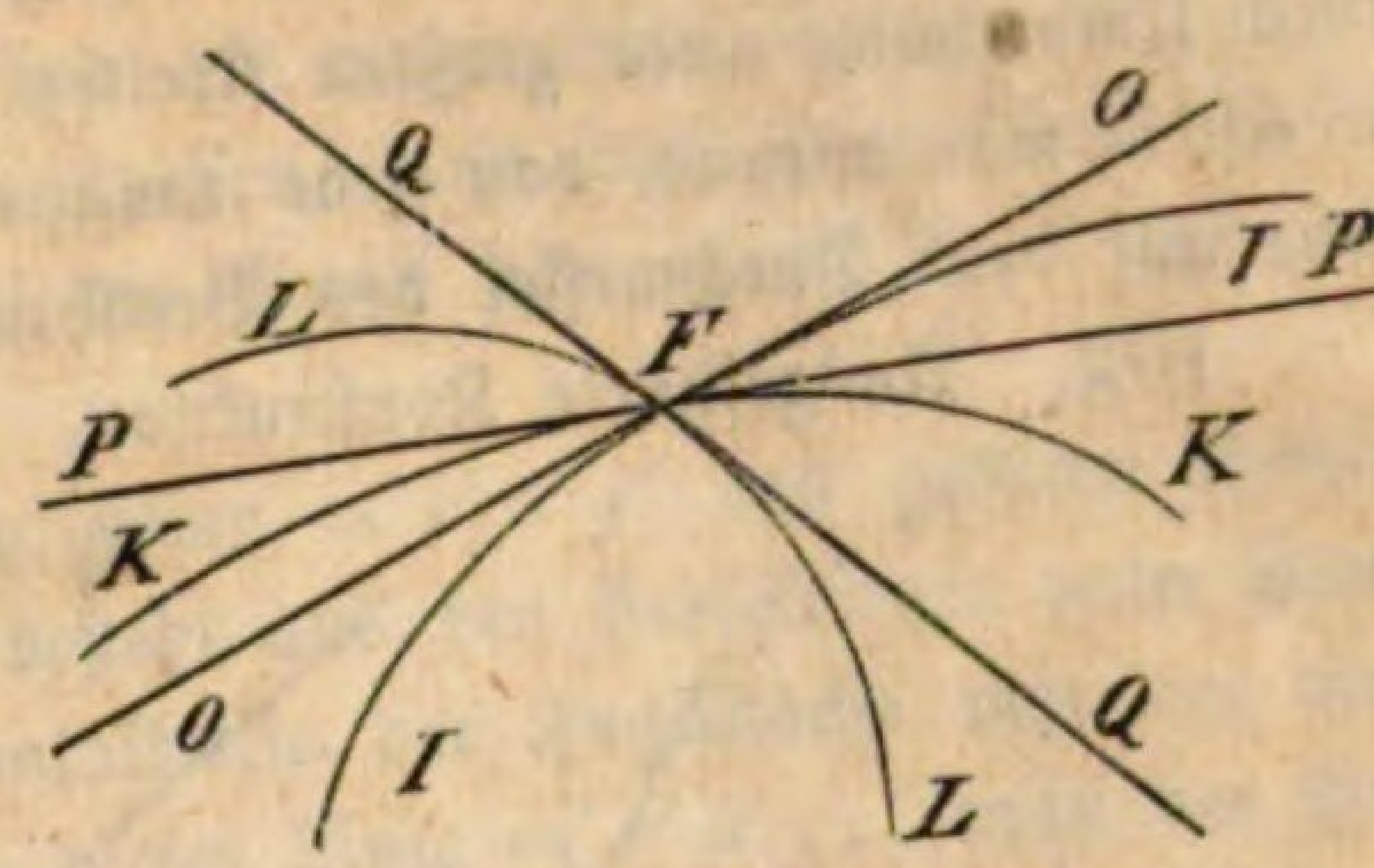
100. **Erklärung.** Liegt eine krumme Linie mit allen ihren Theilen in einer krummen Fläche, so ist eine jede Tangente der Linie auch Tangente an die Fläche.

Lehrsatz. Alle Tangenten einer krummen Fläche, welche sie in einem und demselben Punkte berühren, liegen in einer Ebene, welche die tangirende Ebene dieses Punktes ist.

Beweis. *II, KK, LL*, Fig. *92*, seien mehrere krumme Linien, welche einer krummen Fläche angehören, und sich in dem Punkte *F* der Fläche durchkreuzen. Zieht man in *F* an sämmtlichen Linien die Tangenten *OO, PP, QQ*, so ist jede derselben die Verlängerung des Linienelementes in *F*. Aber

alle diese Linienelemente liegen in dem Flächenelement F, daher müssen ihre Verlängerungen, welches die Tangenten sind, in der Veelängerung des Flächenelementes liegen, d. i. in der tangirenden Ebene.

Fig. 92.



Zusatz. Befände sich unter den Linien II, KK ... 2c., Fig. 92, welche durch F auf der Fläche gezogen werden können, auch eine gerade Linie, so wäre diese als ihre eigene Tangente zu betrachten; als solche aber gehörte sie zur Reihe der übrigen Tangenten OO, PP ... 2c., und läge daher mit ihnen allen in der berührenden Ebene des Punktes F.

Aus obigen Sätzen fließt

die Konstruktion der berührenden Ebene an einem gegebenen Punkte einer krummen Fläche.

101. Durch den Punkt der Fläche, welcher mit F bezeichnet werden mag, führe man zwei Linien der Fläche, wenn man will, zwei, verschiedenen Systemen angehörige Erzeugungslinien derselben; man ziehe an jede von ihnen in F die Tangente, und lege durch diese beiden Tangenten eine Ebene, welche die gesuchte sein wird.

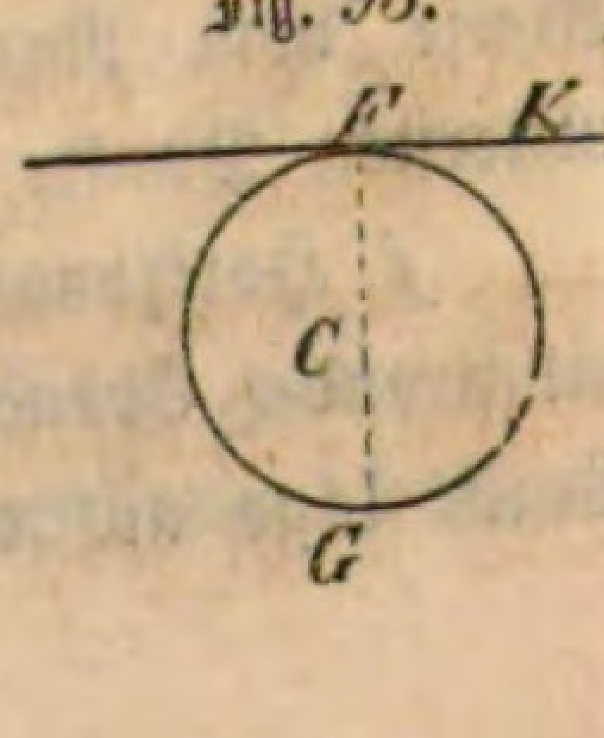
Zusatz. Kann die vorgelegte Fläche auch durch die gerade Linie erzeugt werden, dann ist die durch F gehende gerade Erzeugungslinie, nach dem vorhergehenden Zusatze, schon eine erste Gerade in der verlangten tangirenden Ebene, und es bedarf zur Feststellung der Lage dieser letzteren nur noch der Tangente an eine andere durch F gehende Erzeugungslinie der Fläche.

Einige Beispiele zu näherer Erläuterung des Vorhergehenden.

102. Berührende Ebene an die Kugel.

Der Kreis, Fig. 93, liege in vertikaler Ebene; FG sei ein vertikaler Durchmesser desselben und FK die Tangente in F. FG diene als Rotationsaxe; der Kreis drehe sich um dieselbe und führe dabei die Tangente mit herum; dann wird der Kreis eine Kugelfläche beschreiben, die Tangente eine wagerechte Ebene und diese ist die tangirende Ebene am Punkt F der Kugel. Während der Rotation hat das Berührungs-

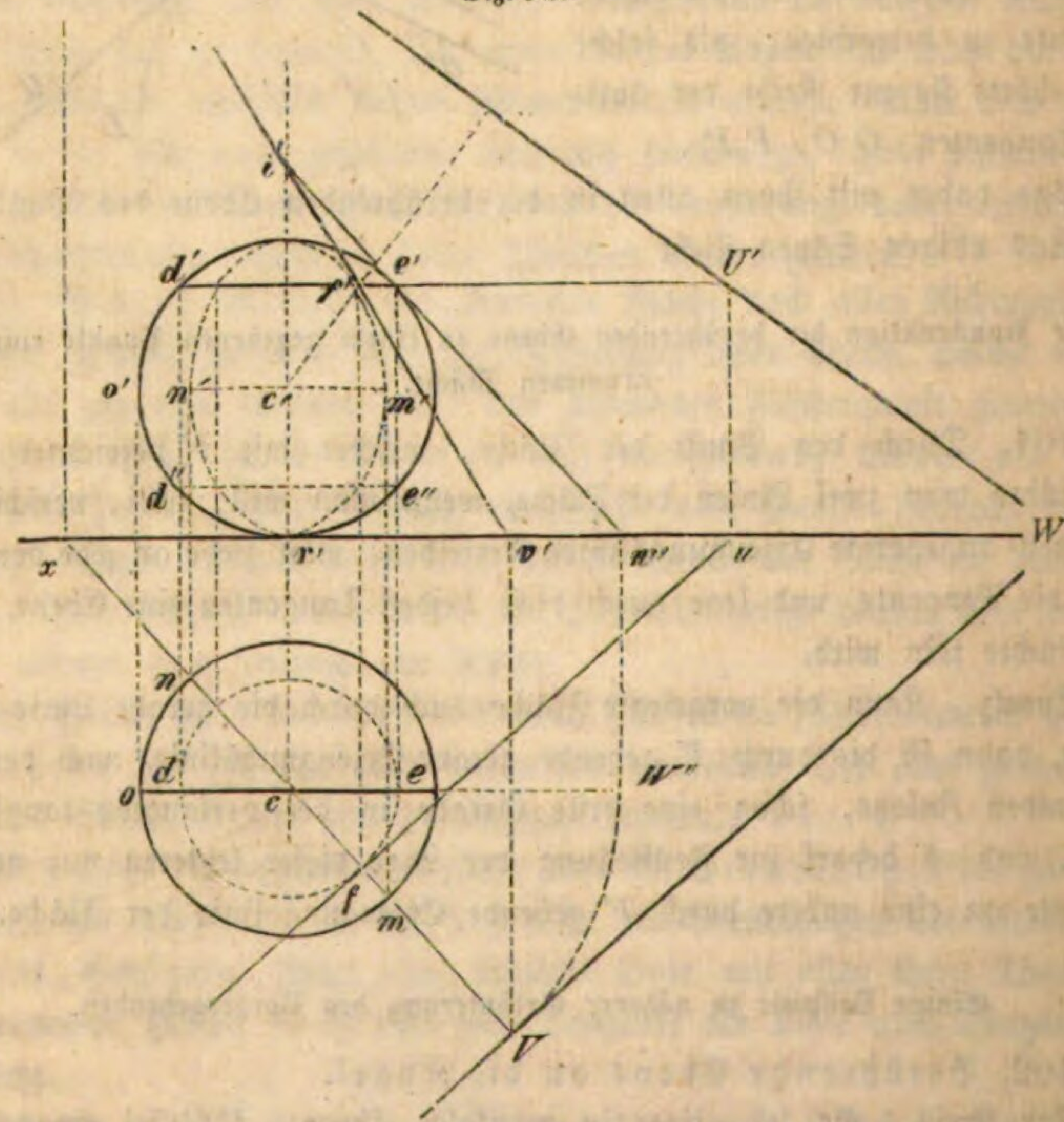
Fig. 93.



element von Kreis und Tangente das Flächenelement der Kugel beschrieben, welches diese mit der tangirenden Ebene gemein hat. Der Durchmesser *FG* ist zugleich Normale des Kugelpunktes *F* geworden. Da nun jeder andere Durchmesser der Kugel als Rotationsaxe hätte genommen werden können, um durch Umdrehung eines größten Kreises der Kugel dieselbe wieder zu erzeugen, so ersieht man daraus, daß jede tangirende Ebene einer Kugelfläche senkrecht stehe auf dem Durchmesser des Berührungspunktes.

102. Ausgeführte Konstruktion. Fig. 94.

Fig. 94.



(c, c') der Mittelpunkt einer Kugel, deren Konturen durch zwei gleiche Kreise vom Radius *c o* gebildet werden. Die Fläche berührt mit ihrem untersten Punkte *(c, r')* die Horizontalebene.

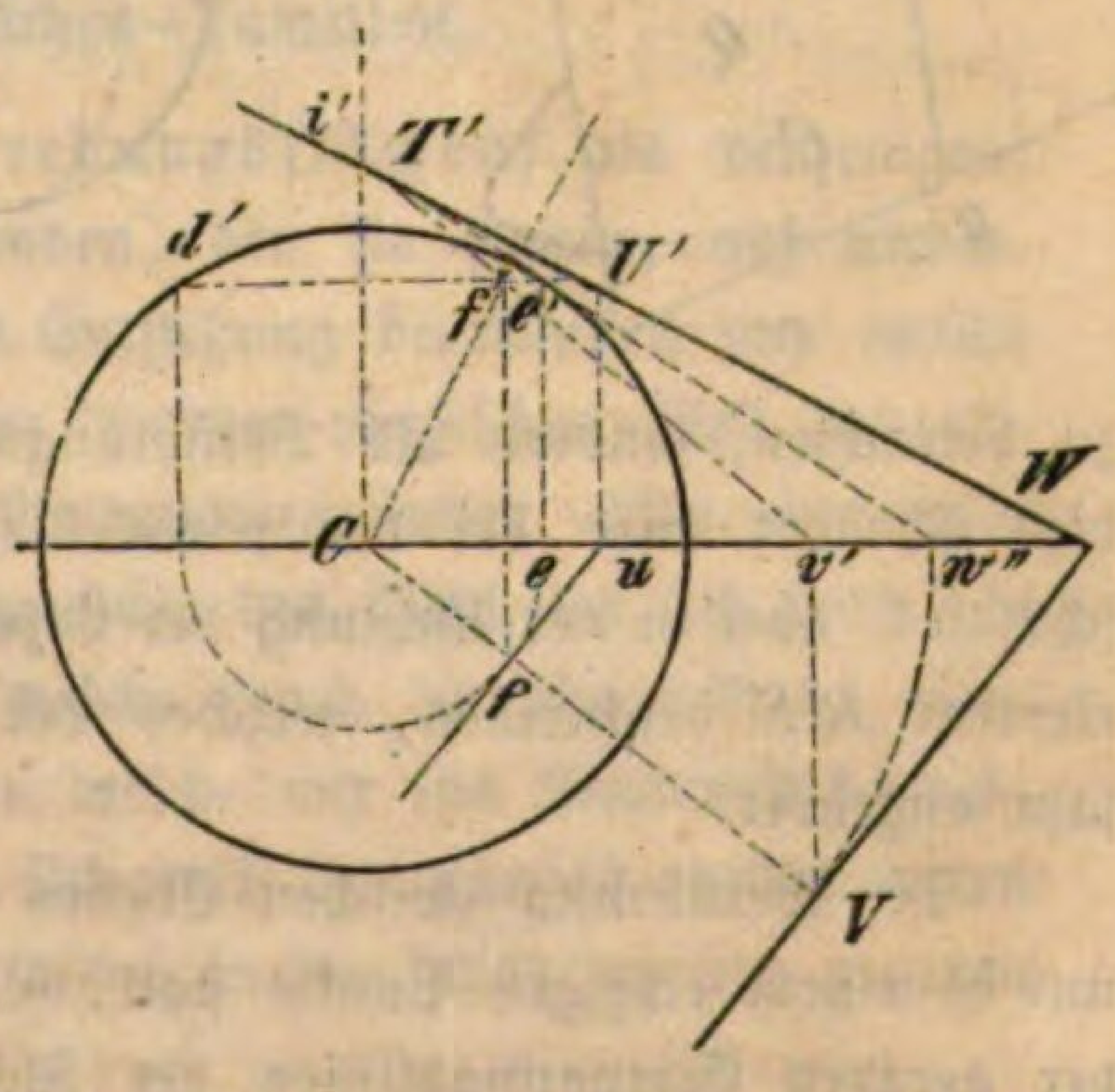
f Horizontalprojektion eines Punktes der Kugelfläche, durch den eine tangirende Ebene an dieselbe gelegt werden soll. — Wir denken uns, der Punkt läge auf der oberen Halbkugel.

Die Vertikalprojektion f'. — Wir denken uns durch den Punkt einen horizontalen Kreis der Kugelfläche gehend; er projicirt sich auf der Horizontalebene als Kreis vom Radius cf. — Die senkrechten Tangenten an diesem kleinen Kreis bei d und e treffen den Umfang der Vertikalprojektion in d'' oder d' und in e'' oder e', daher sind die wagerechten Sehnen $d''e''$ oder $d'e'$ Vertikalprojektionen des kleinen Kreises, und auf einer dieser Sehnen muß f' liegen, auf $d'e'$ also, weil der Punkt dem obern Theil der Kugel angehören soll.

Man konstruire die Vertikalprojektion $m'r'n'f'$ des größten Vertikalkreises $ncfm$ der Kugelfläche: sie besteht aus den Projektionen jener Punkte, in welchen die verschiedenen Horizontalkreise der Kugelfläche von der Ebene ncm geschnitten werden. Auch in dieser Linie $m'r'n'\ldots$ muß der Punkt f' liegen. Somit sind zwei durch (f, f') gehende Kreise der Kugelfläche bestimmt; man hat in (f, f') an jeden dieser Kreise eine Tangente zu ziehen, durch beide Tangenten eine Ebene VWU' zu legen, welche die geforderte tangirende sein wird.

$(fu, f'U')$ Tangente an den Horizontalkreis; $(xfV, i'f'v')$ Tangente an den Vertikalkreis $(mn, m'r'n')$ sie trifft die Axe in dem gleichen Punkt $(c'i')$ wie die Kreistangente $w'e'i'$. Die erstgenannte trifft die Horizontalebene in V; durch diesen Punkt geht der Horizontalriß VW, welcher mit fu parallel, beziehungsweise auf cf senkrecht sein muß. Die Punkte W (auf der Grundlinie) und U' setzen den Vertikalriß fest, welcher auf $c'f'$ senkrecht stehen muß, §. 30.

Fig. 95.



Der Punkt (senkrecht über x), in welchem die Tangente des Vertikalkreises die Vertikalebene durchschneidet, wäre, wenn zugängig, ein weiterer Punkt im Vertikalrisse WU'.

In Fig. 95 haben wir dieselbe Konstruktion auf eine gewähltere Art behandelt: wir legten nämlich beide Projektionsebenen durch das Centrum C der Kugelfläche. Dadurch geschah es, daß beide Projektionen dieser Fläche von einem und demselben Kreise umschlossen erschienen; daß das ganze Linienschema vereinfacht und auf verhältnißmäßig kürzere Dimensionen beschränkt

ward. Uebrigens tragen die gleichnamigen Punkte beider Figuren die gleiche Bezeichnung.

Tangirende Ebenen an Cylinder- und Kegelflächen.

103. $R\,Q$ Fig. 96 stellt, in schiefer Projektion, einen Kreis oder eine Ellipse vor, an welche bei R die Tangente gezogen sei. Die Linie bewege sich, in der Richtung $C\,C$ parallel fortschreitend (§. 8) und führe dabei die Tangente mit sich; dann wird der Kreis eine Cylinderfläche beschreiben, die Tangente eine Ebene, und der Berührungspunkt R eine gerade Erzeugungslinie $R\,S$ der Cylinderfläche, welche zugleich die Berührungslinie der Fläche und der Ebene ist, denn diese letztere tangirt die erstere längs dieser Erzeugungslinie. In der That hat man R nicht als einen einzelnen Punkt

Fig. 97.

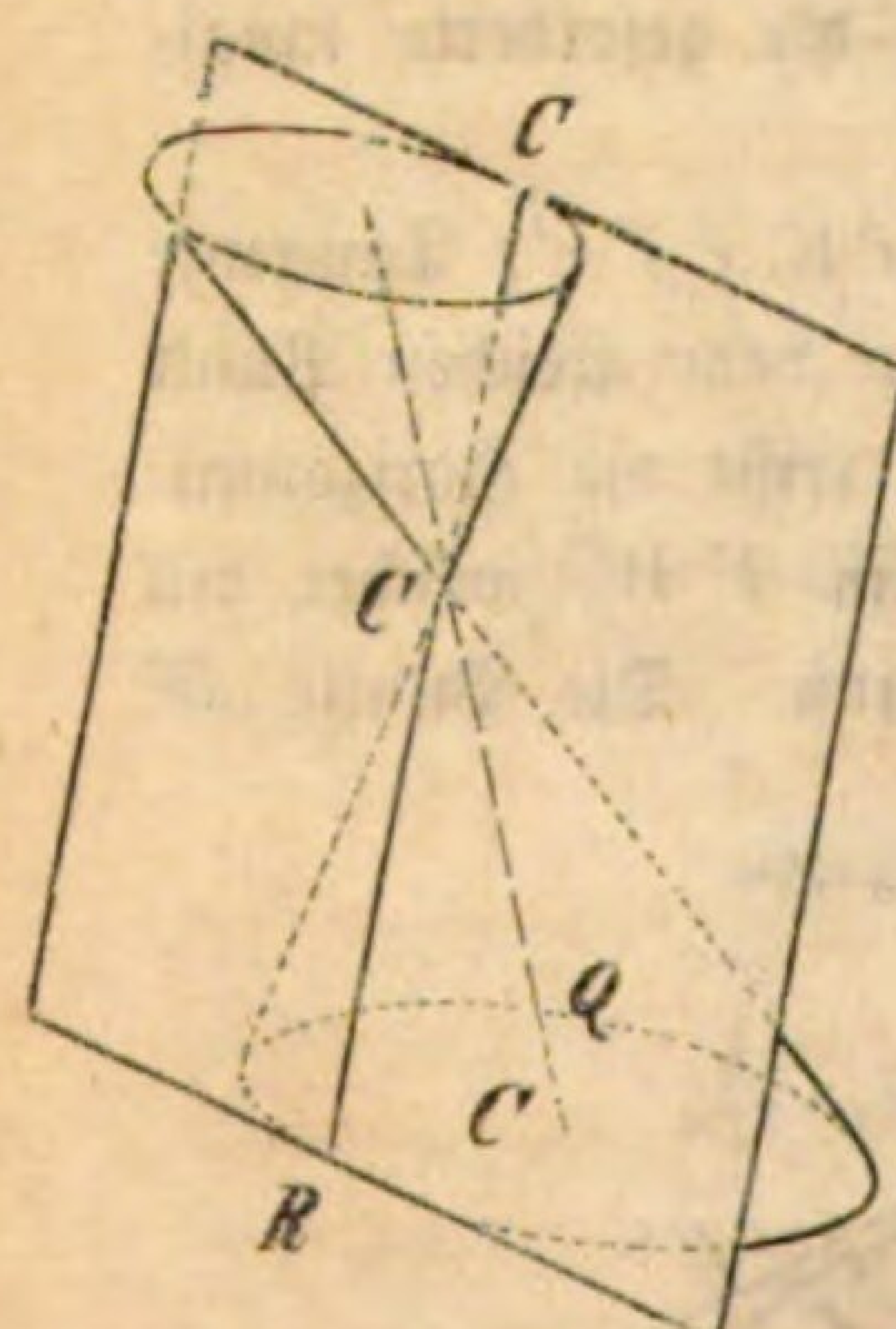


Fig. 98.

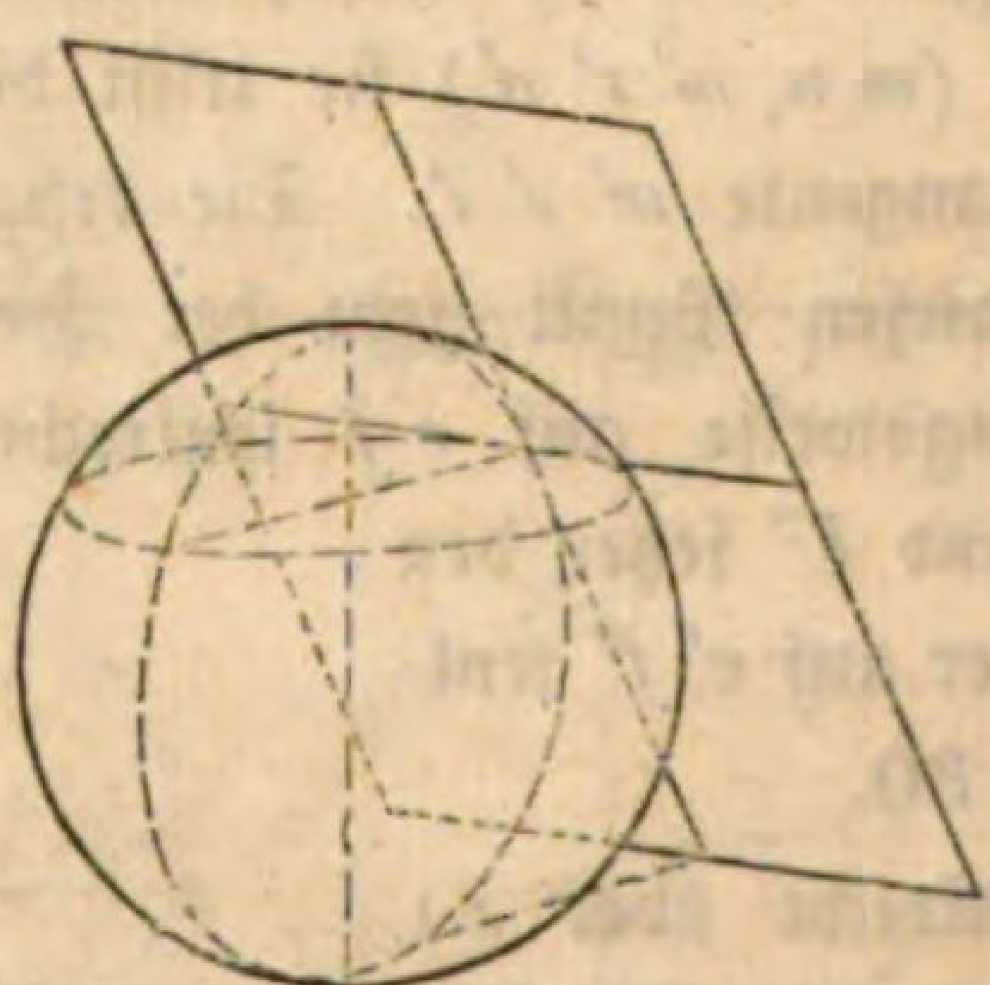
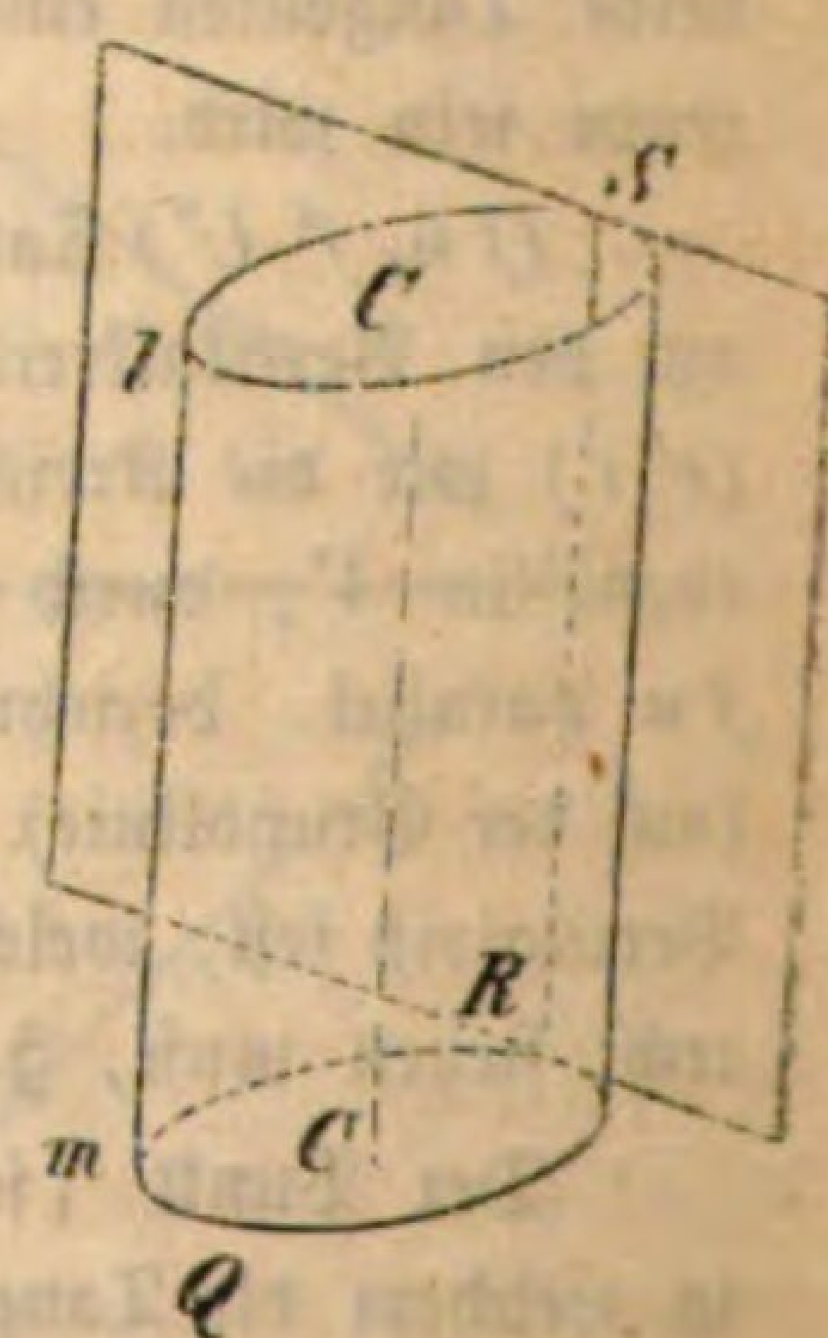


Fig. 96.



zu betrachten, sondern als Berührungselement von Kreis und Tangente, und dies Element wird bei der parallel fortschreitenden Bewegung ein unendlich schmales, aber in der Richtung der Erzeugungslinie unbegrenzt langes Flächenelement $R\,S$ beschreiben, welches der Ebene wie der Cylinderfläche gemeinsam angehört.

Die Berührung zwischen Ebenen und Cylinderflächen findet somit nicht nur in einem einzigen Punkte statt, sondern in der ganzen Ausdehnung einer der geraden Erzeugungslinien der Fläche.

Die Konturen der Cylinderfläche sind gebildet durch zwei Parallelen zu $C\,C$, welche die Ellipse $Q\,R$ berühren. Betrachten wir einen dieser Kon-

turen, z. B. lm, näher: dies lm erscheint erstlich als die Projektion einer geraden Erzeugungslinie der Cylinderfläche, zweitens als die Projektion einer Tangente an die elliptische Erzeugungslinie QR. Der Kontur stellt also auch eine berührende Ebene an die Cylinderfläche dar, welche die Richtung der projicirenden Linie hat und darum als gerade Linie erscheint. Die Ebene steht nämlich schief zur Bildfläche bei schiefer Projektion, und senkrecht zur Bildfläche bei gerader Projektion.

104. Auf die Kegelflächen findet all' Das gleichmäßig seine Anwendung, was soeben über die tangirenden Ebenen der Cylinderflächen vorgetragen worden. Fig. 97 versinnlicht ein Beispiel davon.

Wir schließen: a) zwischen tangirenden Ebenen und Cylinder- oder Kegelflächen findet die Berührung statt in der ganzen Ausdehnung einer der geraden Erzeugungslinien der letzteren.

b) Die geradlinigen Konturen der Cylinder- oder Kegelfläche sind zugleich die Projektionen jener zwei berührenden Ebenen der Fläche, welche die Richtung der projicirenden Linien haben, welche also senkrecht zur Bildfläche stehen bei gerader Projektion und schief bei schiefer Projektion.

Der Raum von Fig. 98 schien uns nutzbar, dort eine berührende Ebene an die Kugel nach schräger Projektion darzustellen, weil wir es für dienlich hielten, unsern Gegenstand von möglichst vielen Seiten zu erfassen.

Studium einzelner Flächen-Familien.

105. Wir beginnen mit den Umdrehungsflächen, als denjenigen, welche schon durch den Charakter des Runden, den sie tragen, auf unverkennbare Weise die Art ihrer geometrischen Entstehung beurkunden und welche auch, wohl gerade dieser Entstehung willen, in der physischen Welt am allgemeinsten vorkommen und die verbreitetste Anwendung finden. Wie aber unter dem Einfachen wiederum das Einfachere zunächst den Blick auf sich lenkt, so stellen wir jene Rotationsflächen voran, welche durch die Umdrehung einer geraden Linie erzeugt werden können, und welche wir ins Gesammt scheitrechte Umdrehungsflächen nennen, weil sich auf der physisch vorhandenen Fläche solcher Art die Kante eines Richtscheites in der Richtung der geraden Erzeugungslinien auflegen läßt.

Ward die Rotationsaxe einer Umdrehungsfläche rechtwinklig gegen eine der Projektionsebenen gestellt, dann müssen auf derselben Ebene alle Parallel-

kreise der Fläche sich in wahrer Gestalt darstellen. Dies erleichtert in wesentlichem Grade alle auf die Fläche Bezug nehmenden Konstruktionen. Aus diesem Grunde werden wir die genannte Stellung der Axe gleichsam als Normalstellung betrachten und von ihr aus nöthigen Falls zu andern Stellungen der Axe und Fläche übergehen.

Darstellung der scheitrechten Umdrehungsflächen vermittelst ihrer Parallelkreise.

Fig. 99—104.

106. Fig. *99* Cylinderfläche. *(a, a' a')* die vertikale Rotationsaxe, *(e, e' f')* eine ihr parallel stehende gerade Erzeugungslinie. Das Ergebniß der Rotation dieser letzteren ist eine gerade kreisrunde Cylinderfläche, welche sich auf die Horizontalebene als Kreis projicirt vom Radius *a e*, und in der Vertikalprojektion durch zwei senkrechte Linien begränzt wird, deren Abstand gleich ist dem Durchmesser des Kreises.

Wir haben die Fläche bei *(e, e')* und *(e, f')* durch zwei Horizontalkreise begränzt angenommen; ferner das Stück *(e, e' f')* der geraden Erzeugungslinie in sechs gleiche Theile zerlegt, und die Vertikalprojektionen der Parallelkreise gezeichnet, welche den Theilungspunkten entsprechen.

107. Fig. *100* bis *103* das scheitrechte Umdrehungs-Hyperboloid.

Man denke sich vorerst die Horizontalprojektion der Cylinderfläche Fig. *99* in Fig. *100* und *101* wiederholt. Sofort ziehe man in dem früheren Punkte *e*, welchen wir jetzt mit *h* bezeichnet haben, eine Tangente *e f* an den Kreis, betrachte diese als die Projektion einer tangirenden Ebene an die Cylinderfläche. Der ursprünglich vertikalen Erzeugungslinie gebe man alsdann eine Drehung um den Punkt *(h, h')*, so jedoch, daß sie ganz in der tangirenden Ebene verbleibt. Nachdem dies geschehen, wird die Horizontalprojektion der Linie als die genannte Tangente *e f* an den Kreis vom Radius a h sich darstellen und in der Vertikalprojektion als Gerade *e' h' f'*. Diese Gerade *(e f, e' f')* hat in der Fig. *100* nur eine schwache Drehung oder Abweichung von der Vertikalen erhalten, in Fig. *101* eine stärkere Abweichung. Sie liegt jetzt mit der Rotationsaxe *(a, a' a')* nicht mehr in einer Ebene, und *a h* ist gleich der kürzesten Entfernung beider Geraden (§. 41). Nach geschehener Umdrehung von *(e f, e' f')* werden die verschiedenen Punkte dieser Geraden Parallelkreise beschrieben haben, deren Radien zunehmen mit dem Abstande jener Punkte von *(h, h')*. Dieser Fußpunkt der kürzesten Entfernung der Erzeugungslinie und der Axe hat denselben Kreis wie vorhin durchlaufen und

zugleich den kleinsten von allen, wir nennen ihn den **Kehlkreis** der Fläche. In der Horizontalprojektion bildet er den scheinbaren Kontur des Hyperboloides.

Man hat sofort das Stück $(e f, e' f')$ der geraden Erzeugungslinie in sechs gleiche Theile getheilt, und die von den Theilpunkten beschriebenen

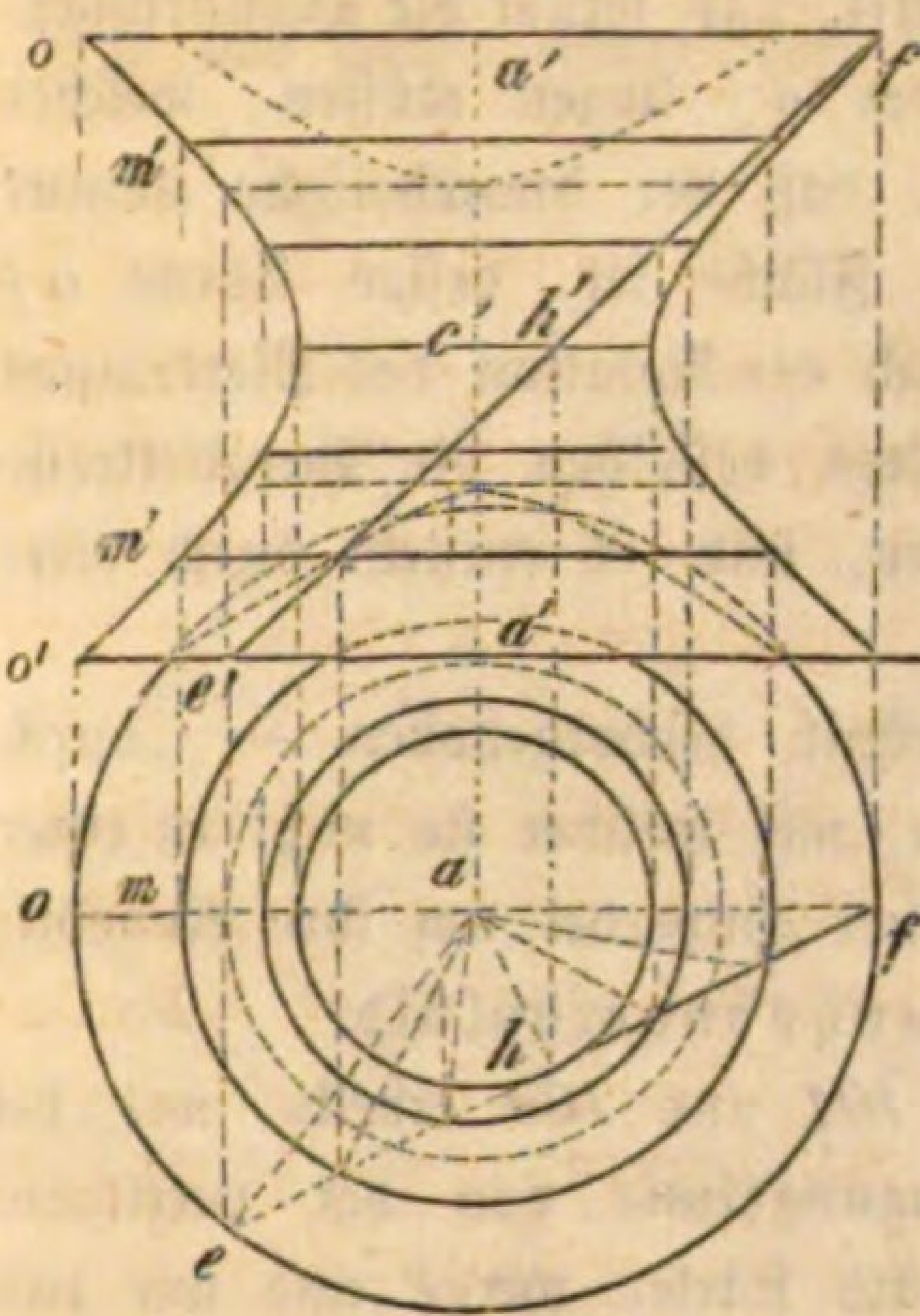


Fig. 101.

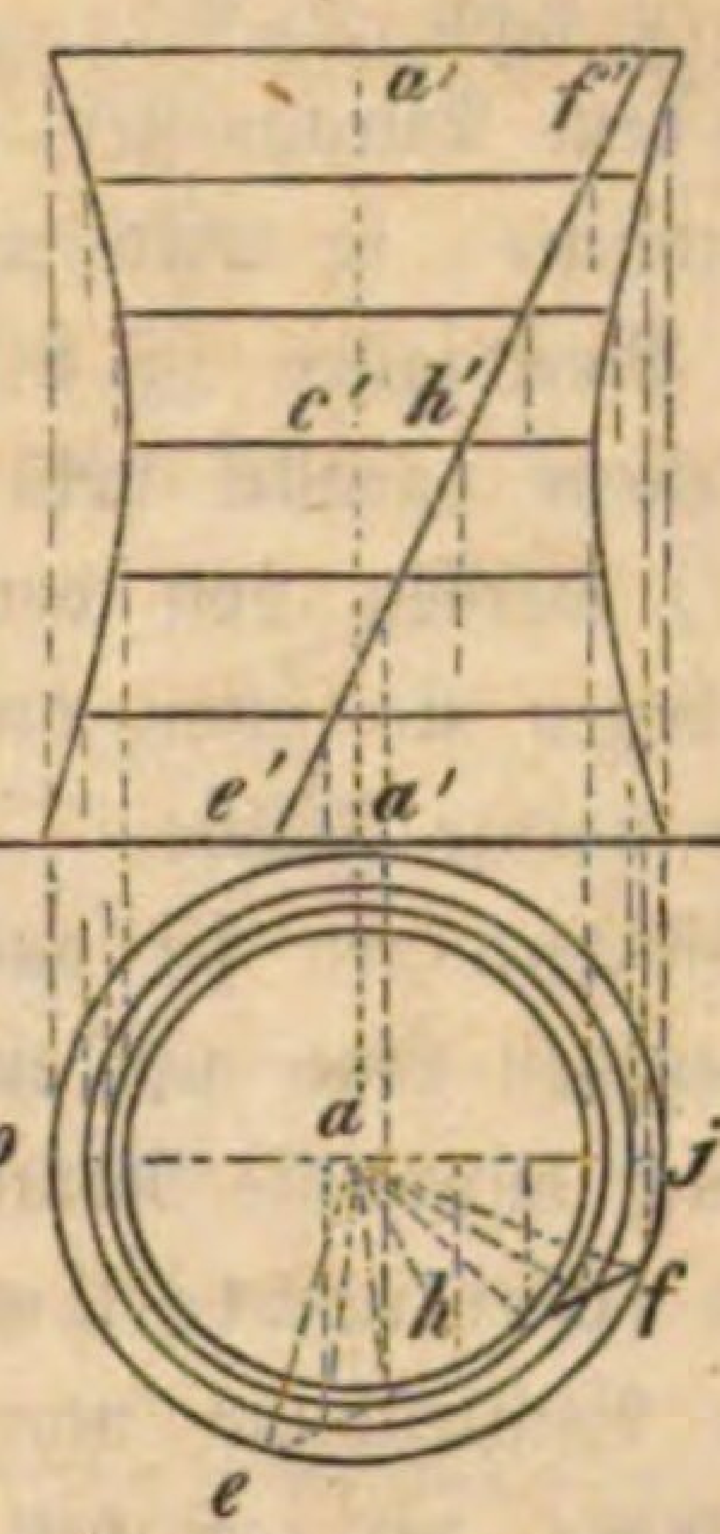


Fig. 100.

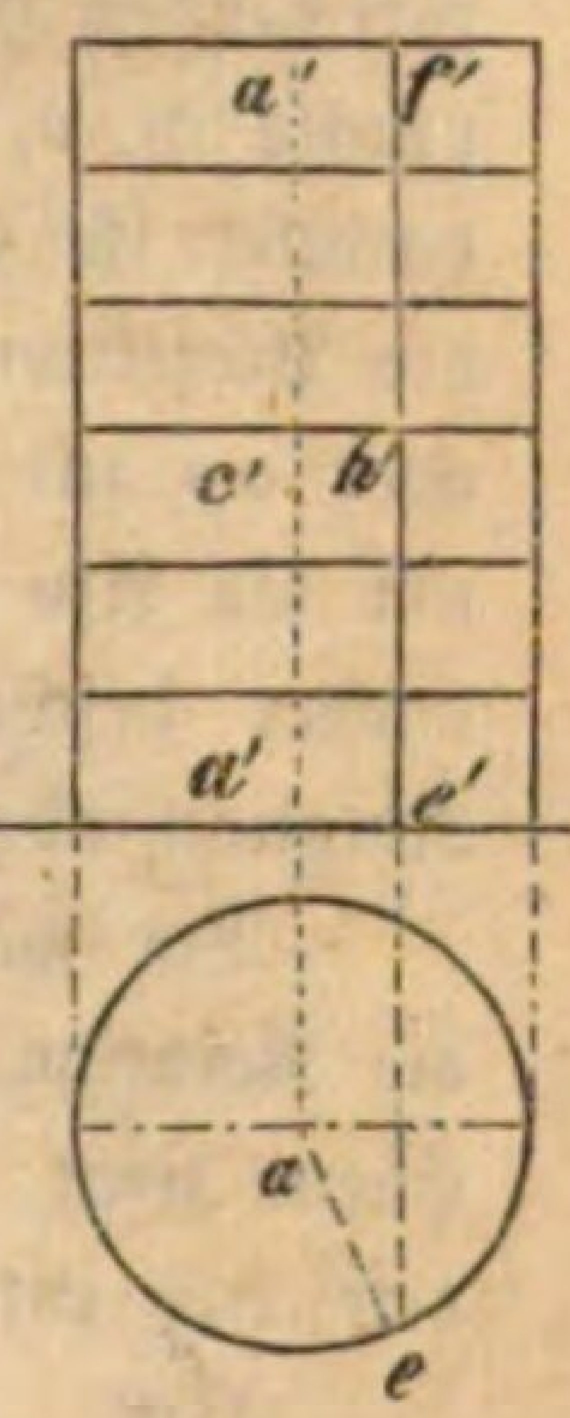


Fig 99.

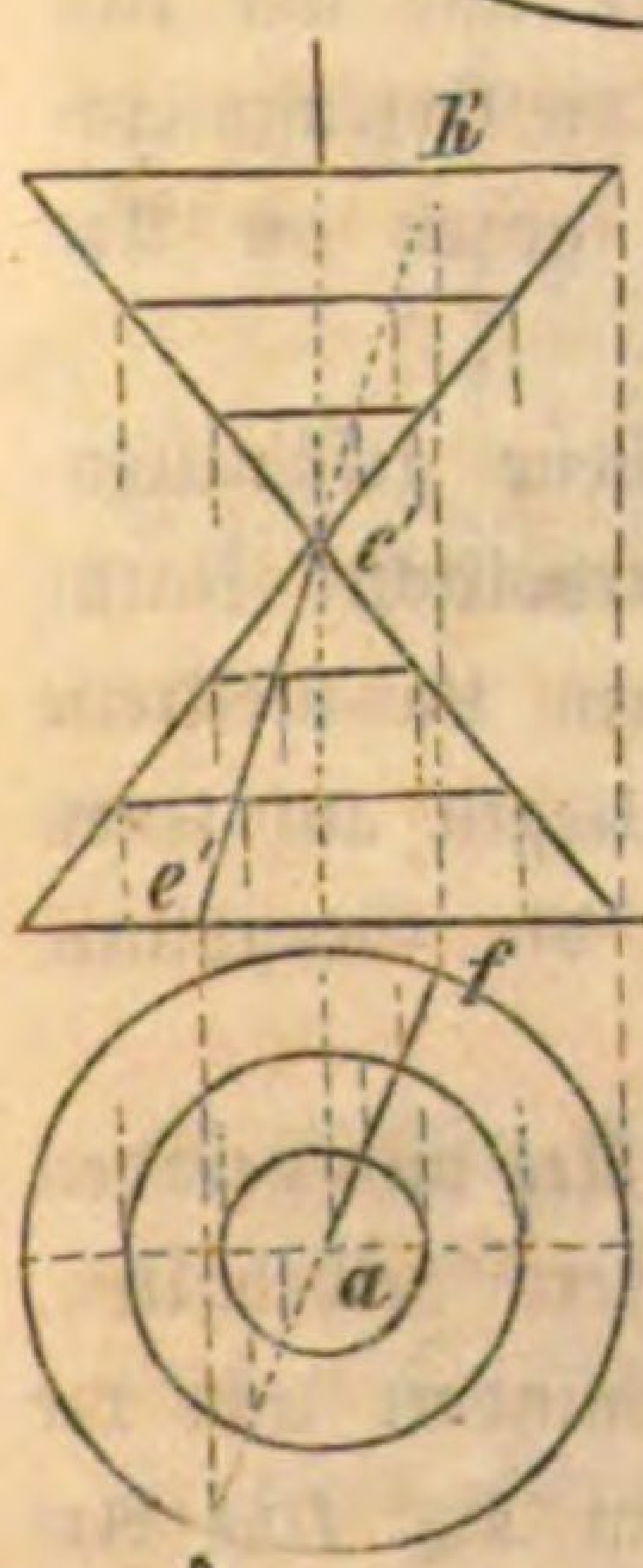


Fig. 104.

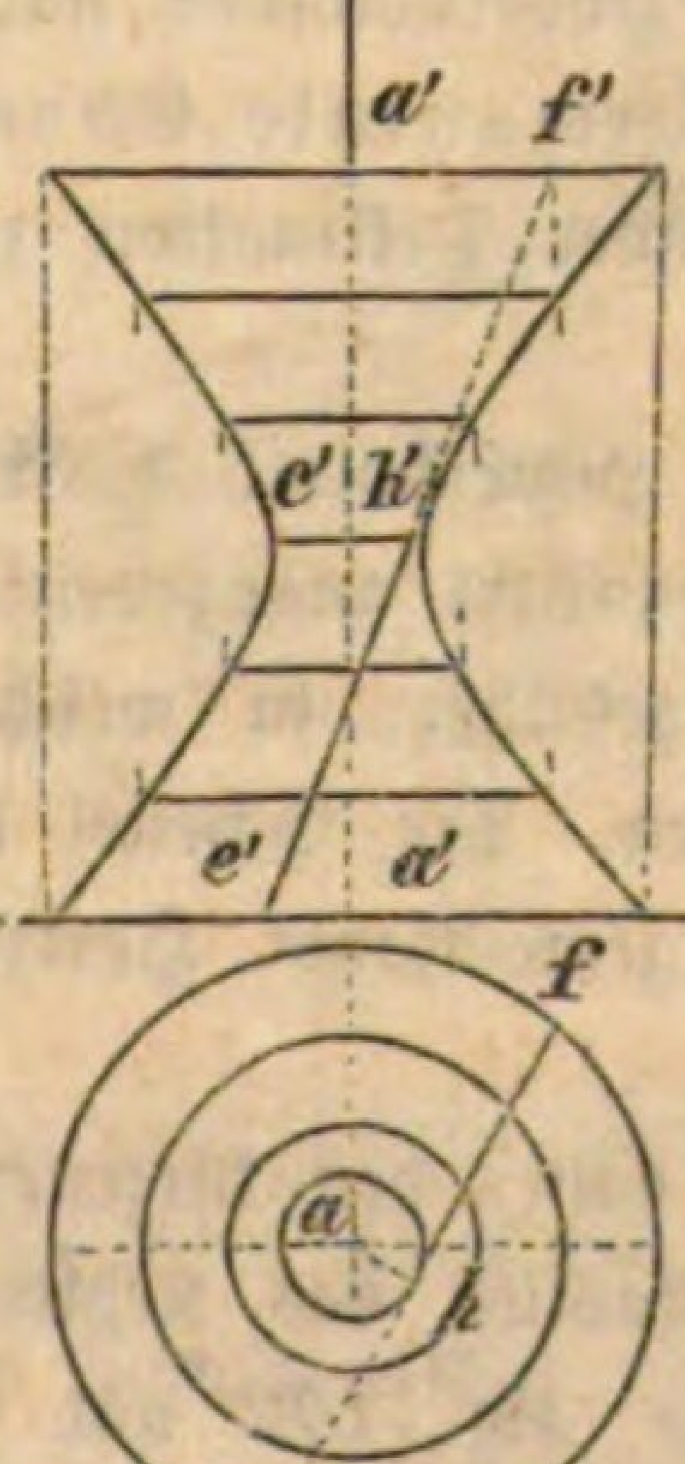


Fig. 103.

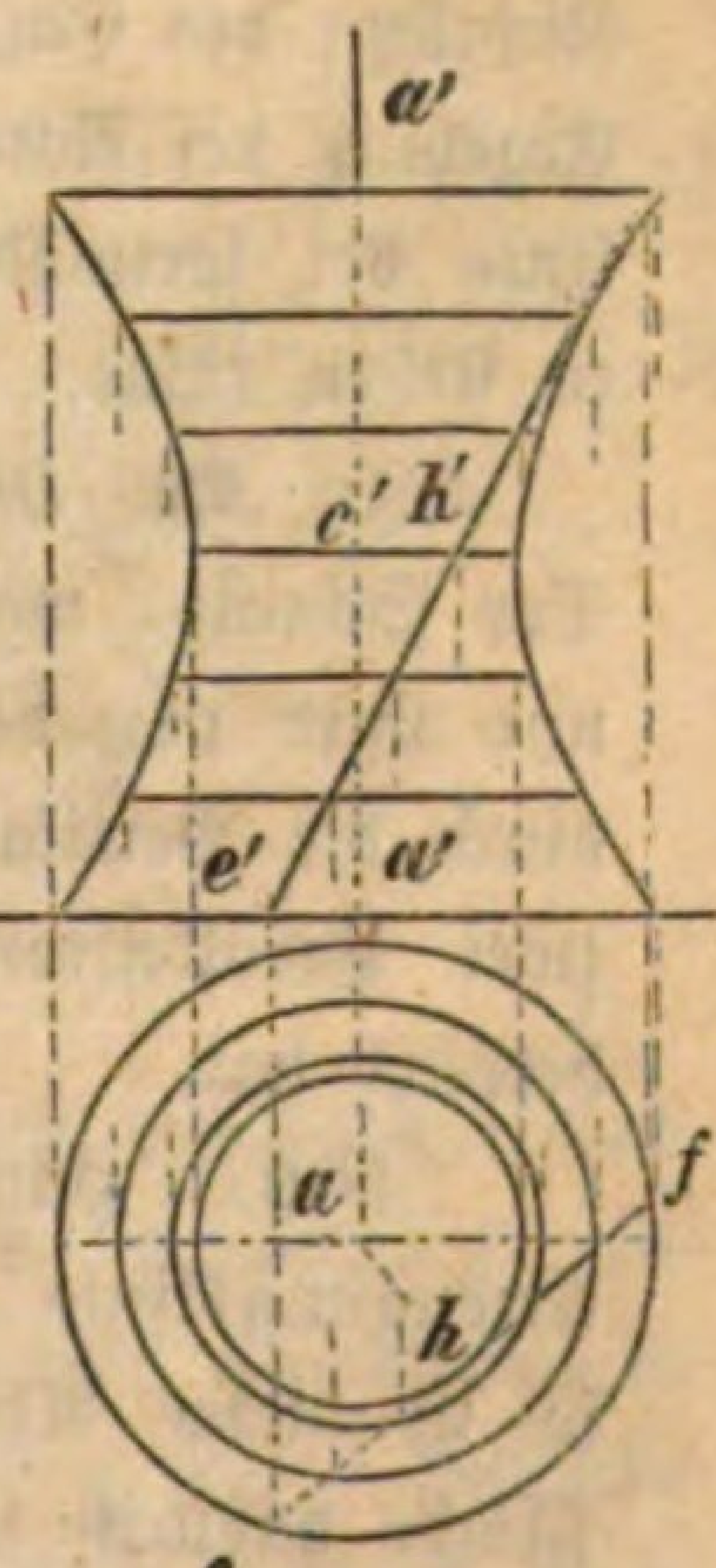


Fig. 102.

Parallelkreise in beiden Projektionen angegeben. Jeder Kreis der Horizontal-projektion entspricht zwei Kreisen der Fläche, welche in gleichen Abständen über oder unter dem Kehlkreise liegen. In der Vertikalprojektion bilden die

äußersten Punkte der Parallelkreise den Kontur der Fläche: es ist dies, wie später nachgewiesen werden soll, eine Hyperbel, deren erste Axe gleich *a h*. Zu beachten ist nun, daß man, die Punkte dieses Kontures, z. B. *m'*, *o'*..., Fig. *101*, zu finden, an die Kreise der Horizontalprojektion Tangenten zieht, senkrecht zur Grundlinie, und die Berührungspunkte *o*, *m*,... auf die entsprechenden Horizontalen nach *o'*, *m'*... projicirt, daß ferner die Berührungspunkte m, o,... auf dem Durchmesser *o f* oder *o j* liegen müssen, welcher parallel ist zur Grundlinie, so wird erhellen, daß der hyperbolische Kontur die Projektion jenes Meridianes (§. 80) der Fläche sei, dessen Ebene *o f* oder *o j* zur Vertikalebene parallel steht. Durch die Rotation des Meridianes um die Axe *(a, a' a')* werden von den Punkten desselben die Parallelkreise wieder beschrieben, denen sie schon angehörten, und es entsteht durch diese Rotation abermal die vorige Fläche.

Vor weiteren Erörterungen sei das Ergebniß hervorgehoben — „durch die Rotation einer geraden Linie um eine Axe, mit welcher sie nicht in einer Ebene liegt; oder auch durch die Rotation einer Hyperbel um ihre eingebildete Axe entsteht das scheitrechte Umdrehungshyperboloid.

108. Aus der Vergleichung von Fig. *101* und *100* erhellt, wie bei zunehmender Abweichung der geraden Erzeugungslinie von der vertikalen Richtung die Einziehung des Hyperboloides stäts stärker werde und wie das Ergebniß der Rotation eine horizontale Ebene sei, sobald die Erzeugungslinie bei fortwährend wachsender Deklination zuletzt senkrecht gegen die Axe zu stehen käme.

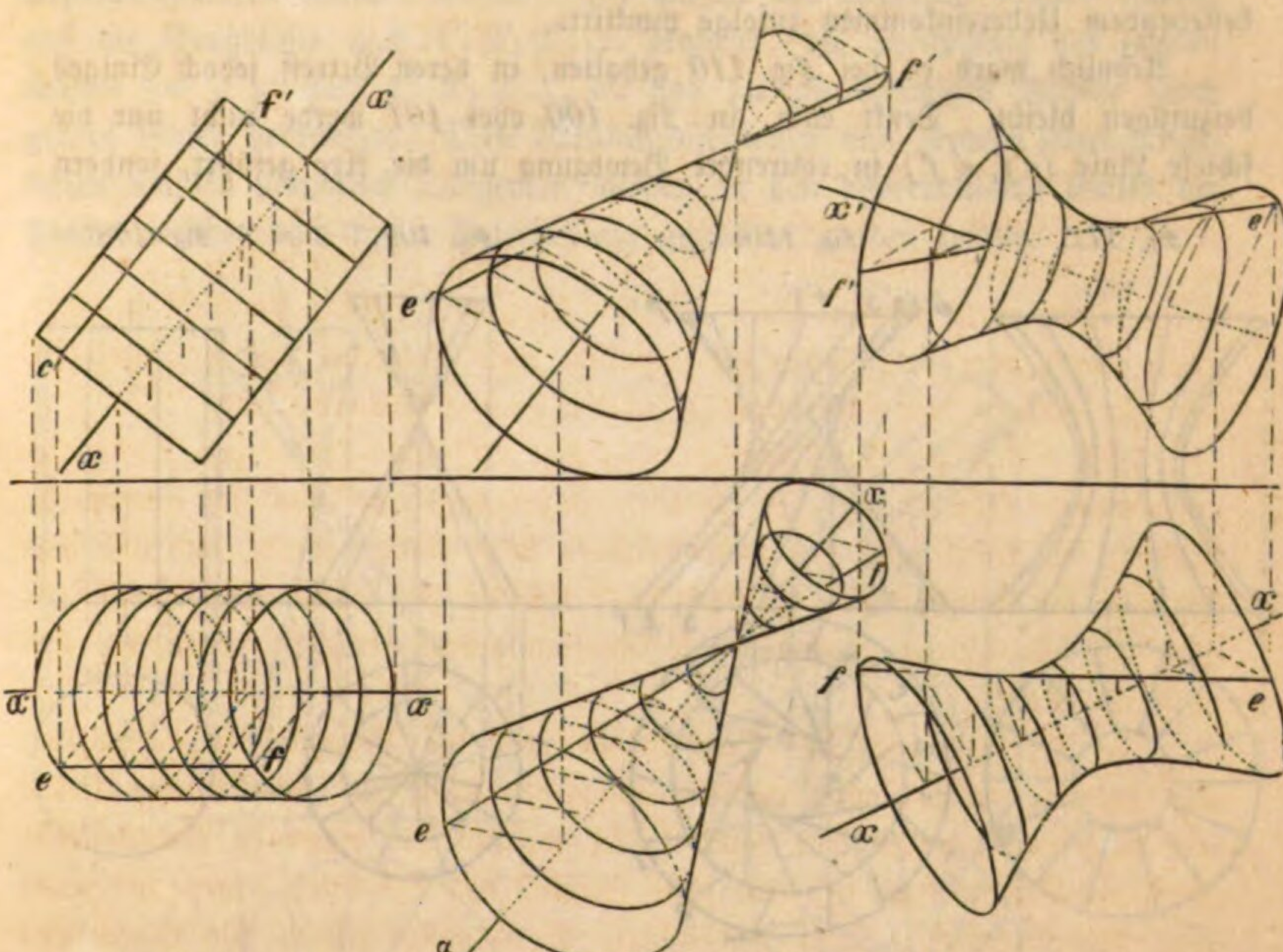
In Fig. *101* wird das Hyperboloid durch die Vertikalebene geschnitten. Der Schnitt, welchen man punktirt angegeben sieht, ist hyperbolischer Natur und wird von den Punkten gebildet, in welchen die einzelnen Parallelkreise durch die Vertikalebene dringen. Die Scheitel des Schnittes liegen auf jenen zwei Parallelkreisen, deren gemeinsame Horizontalprojektion die Grundlinie berührt hat.

109. Haben wir bis daher den kürzesten Abstand der Axe und geraden Erzeugungslinie oder den Radius des Kehlkreises unverändert beibehalten, so ist dieser Abstand in den Fig. *102* und *103* stets vermindert und die Fläche dadurch in der Kehle verengert worden, bis endlich in Fig. *104* Axe und Erzeugungslinie sich durchschneiden und somit das Hyperboloid in der Kegelfläche, nach dieser Seite hin, die Gränze seiner Formbildung gefunden hat.

110. In den Fig. *105*, *106* und *107* geben wir die Darstellung dreier Repräsentanten der scheitrechten Umdrehungsflächen vermittelst ihrer Pa-

rallelkreise und bei beliebiger Stellung der Rotationsaxen *(α α, α′ α′)*. Wie diese Darstellungen aus jenen mit senkrechter Axe abzuleiten seien, ist in unserm ersten Theile, der Projektionslehre, mit genügender Ausführlichkeit gelehrt worden. Die Kreise projiciren sich in Fig. *105* als gerade Linien oder als gleiche Ellipsen, in Fig. *106* und *107* jeweils als ähnliche Ellipsen, d. h. als solche, deren Axen bei jeder Projektion in einerlei Verhältniß stehen.

Fig. *105*. Fig. *106*. Fig. *107*.



Es wurden den früheren wie den jetzigen Darstellungen noch die Projektionen der Radien beigefügt, welche den Punkten einer geraden Erzeugungslinie *(e f, e′ f′)* entsprechen. Diese Radien liegen bei der Kegel- und Cylinderfläche in einer Ebene, welche auf der tangirenden Ebene bei *(e f, e′ f′)* senkrecht steht. Bei dem Hyperboloide aber bilden diese Radien in ihrer stätigen Aufeinanderfolge eine scheitrechte gewundene Fläche. (Vergl. §. 61.)

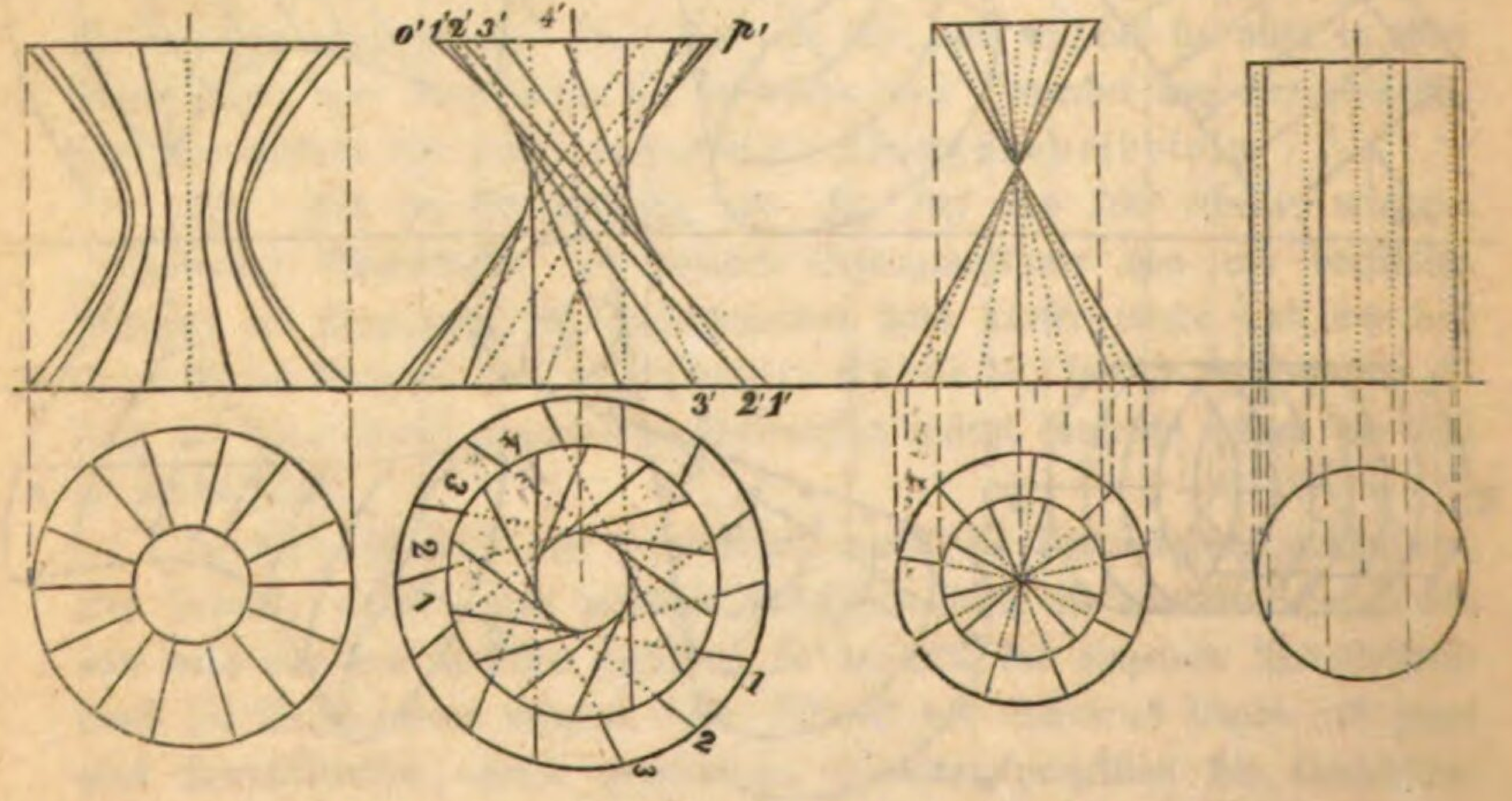
Darstellung vermittelst gerader Erzeugungslinien.

Fig. 108—109—110.

111. Es wurden hier wiederum vertikale Rotationsaxen angenommen. Den Grundkreis der Cylinder- wie der Kegelfläche hat man in neun gleiche Theile getheilt und die Projektionen der geraden Erzeugungslinien verzeichnet, welche den Theilpunkten entsprechen. Die Stücke dieser Projektionen, welche bei physischem Vorhandensein der Fläche nicht sichtbar sein könnten, hat man bestehendem Uebereinkommen zufolge punktirt.

Aehnlich ward es bei Fig. *110* gehalten, in deren Betreff jedoch Einiges beizufügen bleibt. Denkt euch, in Fig. *100* oder *101* werde nicht nur die schiefe Linie *(e f, e' f')* in rotirender Bewegung um die Axe geführt, sondern

Fig. 111. Fig. 110. Fig. 109. Fig. 108



gleichzeitig auch die Vertikallinie des Punktes *(h, h')*, so wie die ganze vertikale Ebene *e f*, in welcher beide gerade Linien liegen. Durch die Rotation der Vertikallinie entsteht eine Cylinderfläche, welche den Kehlkreis zur Grundlinie hat. Die Ebene wird stäts tangirend an die Cylinderfläche bleiben und die Gerade *(e f, f' e')*, welche das Hyperboloid hervorbringt, wird stäts Tangente bleiben an den Cylinder, so wie ihre Horizontalprojektion stäts, gleich *e f*, Tangente sein wird an den Kreis vom Radius *e f*. Aus diesen Erwägungen floß folgende Konstruktion von Fig. *110*. Man zog zwei konzentrische Kreise, betrachtete den größeren als in der Horizontalebene liegend und

als Grundkreis des Hyperboloides; den zweiten als obere Gränzlinie der Fläche, wonach seine Vertikalprojektion eine Horizontale $o'p'$ in beliebiger Höhe sein mußte. Man zog in der Horizontalebene eine Gerade 1 1 der Art, daß ihr Abstand vom Centrum beider Kreise gleich war dem Radius des Kehlkreises; jeder der zwei ersten Kreise ward von 1 aus in 14 gleiche Theile getheilt; die Theilungspunkte 2, 2; 3, 3 ... verband man der Reihe nach durch gerade Linien, wodurch die Horizontalprojektionen von 14 geraden Erzeugungslinien erhalten waren. Die Punkte des äußersten Kreises wurden auf die Grundlinie nach 1′, 2′, 3′.... projicirt, die Theilpunkte des zweiten Kreises auf $o'p'$ nach 1′, 2′, 3′... ꝛc. und die gleichnamigen Punkte durch gerade Linien verbunden. Diese Vertikalprojektionen von geraden Erzeugungslinien mußten sämmtlich Tangenten werden an den hyperbolischen Umriß der Fläche, welcher nach dieser Unterstellung gezeichnet werden konnte.

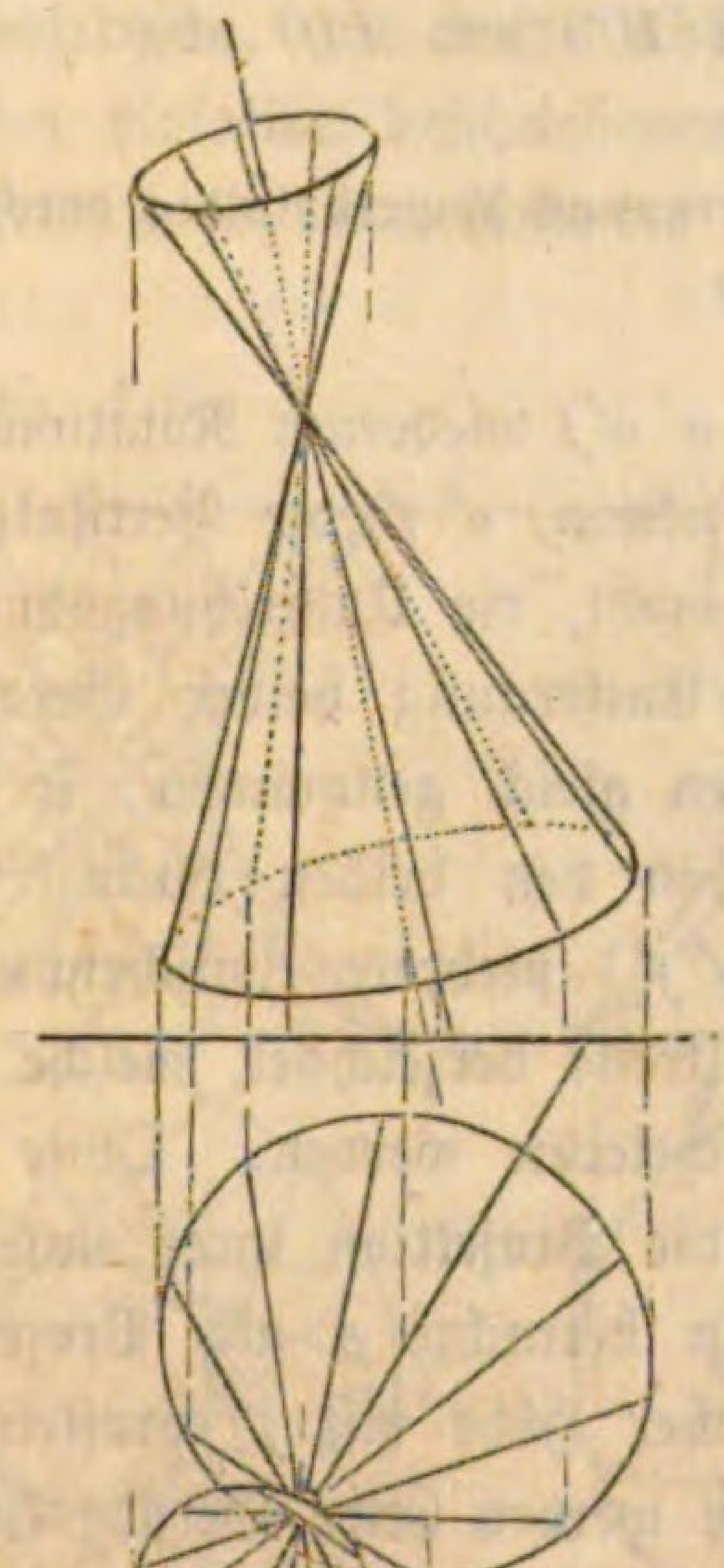


Fig. 112.

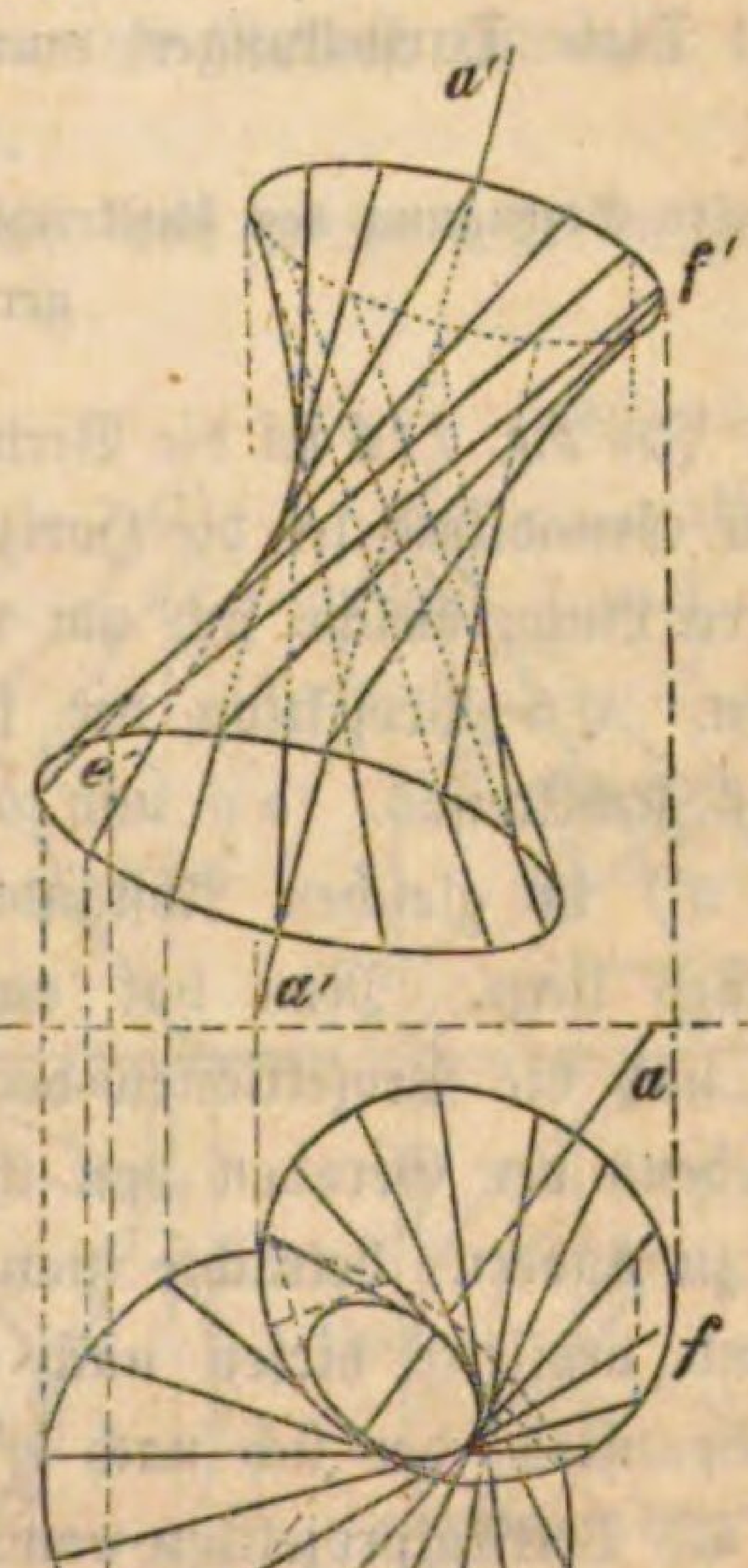


Fig. 113.

Darstellung des Hyperboloides durch Meridiane.

Fig. 111.

112. Hauptmeridian einer Umdrehungsscheibe nennen wir fürder denjenigen, dessen Ebene, bei senkrecht stehender Rotationsaxe, der vertikalen

Projektionsebene parallel ist, und der sich also auf dieser Ebene als Umriß der Fläche darstellt. Die erste Anlage der Figur gleicht vollständig jener von *100* oder *101*. Nachdem die Projektionen der Parallelkreise erhalten waren, theilte man den Grundkreis in vierzehn gleiche Theile und zog die Projektionen der sieben Meridianebenen, deren eine zur Vertikalebene parallel steht. Man bestimmte nun in der Vertikalprojektion die Durchschnitte der Meridianebenen und der Parallelkreise, welche Punkte den Projektionen der Meridiane angehörten, wie man es in Fig. *101* bezüglich des Meridianes der Ebene *o f* angegeben sieht. Jeder sichtbare Ast eines Meridianes deckt einen entsprechenden, welcher auf der Rückseite des Hyperboloides liegt und also punktirt werden müßte.

113. Zur Vervollständigung der vorhergehenden Reihe hat man in den Fig. *112* und *113* die Darstellungen der Kegelfläche und des Hyperboloides vermittelst gerader Erzeugungslinien und bei schiefer Lage der Rotationsaxe beigefügt. Diese Darstellungen wurden aus *109* und *110* abgeleitet.

Doppelte Erzeugung des scheitrechten Umdrehungs-Hyperboloides durch die gerade Linie.

114. In Fig. *114* sei die Vertikale $(c, a' a')$ wiederum Rotationsaxe; $e f$ parallel zur Grundlinie sei die Horizontalprojektion, $e' f'$ die Vertikalprojektion einer schiefen Linie, welche sich um die Axe dreht, ein Umdrehungshyperboloid zu erzeugen. c o Projektion der kürzesten Entfernung beider Geraden und Radius des Kehlkreises. $e o$ und $o f$ wurden gleich genommen, so daß der Punkt (o, o') in gleichen Abständen zwischen den beiden Gränzkreisen des Hyperboloides liegt. Man hat auf $(e f, e' f')$ mehrere Zwischenpunkte angenommen und die Projektionen der Parallelkreise verzeichnet, welche während des Umdrehens der Geraden von ihnen beschrieben werden. Ohne die Projektion $e f$ zu ändern, betrachte man f als die Projektion ihres unteren Endpunktes und projicire diesen nach m'; man betrachte e als Projektion des oberen Endpunktes, der sich nach n' in gleicher Höhe mit f' projiciren muß; also $m' n'$ als Vertikalprojektion von $f e$. Nun werden beide Gerade $(e f, e' f')$, $(f e, m' n')$ sich in (o, o') kreuzen. Eine Horizontalebene $i' j'$ schneidet die erste Gerade in (b', b), die zweite in (d', d) und $c b$ wird gleich $c d$ sein müssen; mit einem Worte, ein jeder Punkt der Geraden $(f e, m' n')$ wird auf einem der Parallelkreise liegen, welche von den entsprechenden Punkten der Geraden $(e f, e' f')$ durchlaufen worden sind. Wird somit auch die Gerade $(f e, m' n')$ in rotirende Bewegung um die Axe $(c, a' a')$ versetzt, so erzeugt sie abermals dasselbe Hyperboloid, welches schon durch die Umdrehung von

$(e\,f,\,e'\,f')$ hervorgebracht worden war, weil in beiden Fällen von den entsprechenden Punkten beider Linien die gleichen Parallelkreise durchlaufen werden.

115. Hat man daher, allgemein gesprochen, zwei gerade Linien A und G, welche zusammen nicht in einer Ebene liegen, und wovon die eine A als Rotationsaxe der andern G zu betrachten sein soll, so läßt sich für jeden beliebigen Punkt auf G, welcher P heißen mag, die Stellung einer dritten Geraden G' bestimmen, von der Beschaffenheit, daß durch die Umdrehung von G oder G' oder auch durch das gleichzeitige Rotiren von beiden Geraden immer nur eine und dieselbe Fläche hervorgebracht würde. Hierzu ist nur nöthig, G' symmetrisch mit G zu legen in Bezug auf die Meridianebene, welche durch P und durch die Axe A geht. Denn werden alsdann die drei Geraden A, G und G' durch eine Ebene, welche auf A senkrecht steht, in den drei Punkten P, Q und R geschnitten, so müssen die Abstände $P\,Q$ und $P\,R$ gleich sein, und beide Abstände sind die Radien des von Q oder von R bei der Rotation beschriebenen Kreises.

Dies ist es, was mit der Ueberschrift des vorigen §. ausgedrückt werden soll.

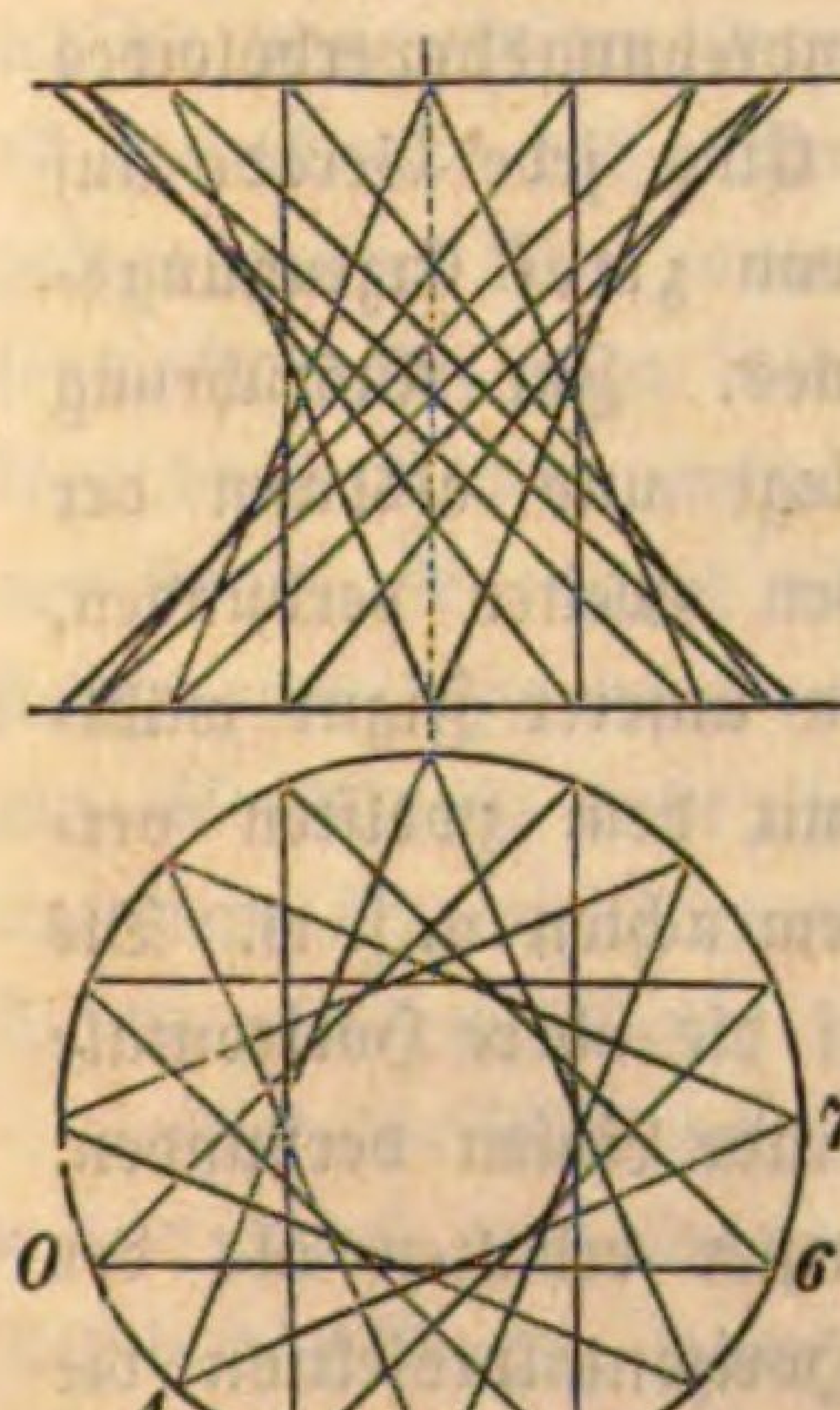
Fig. 116.


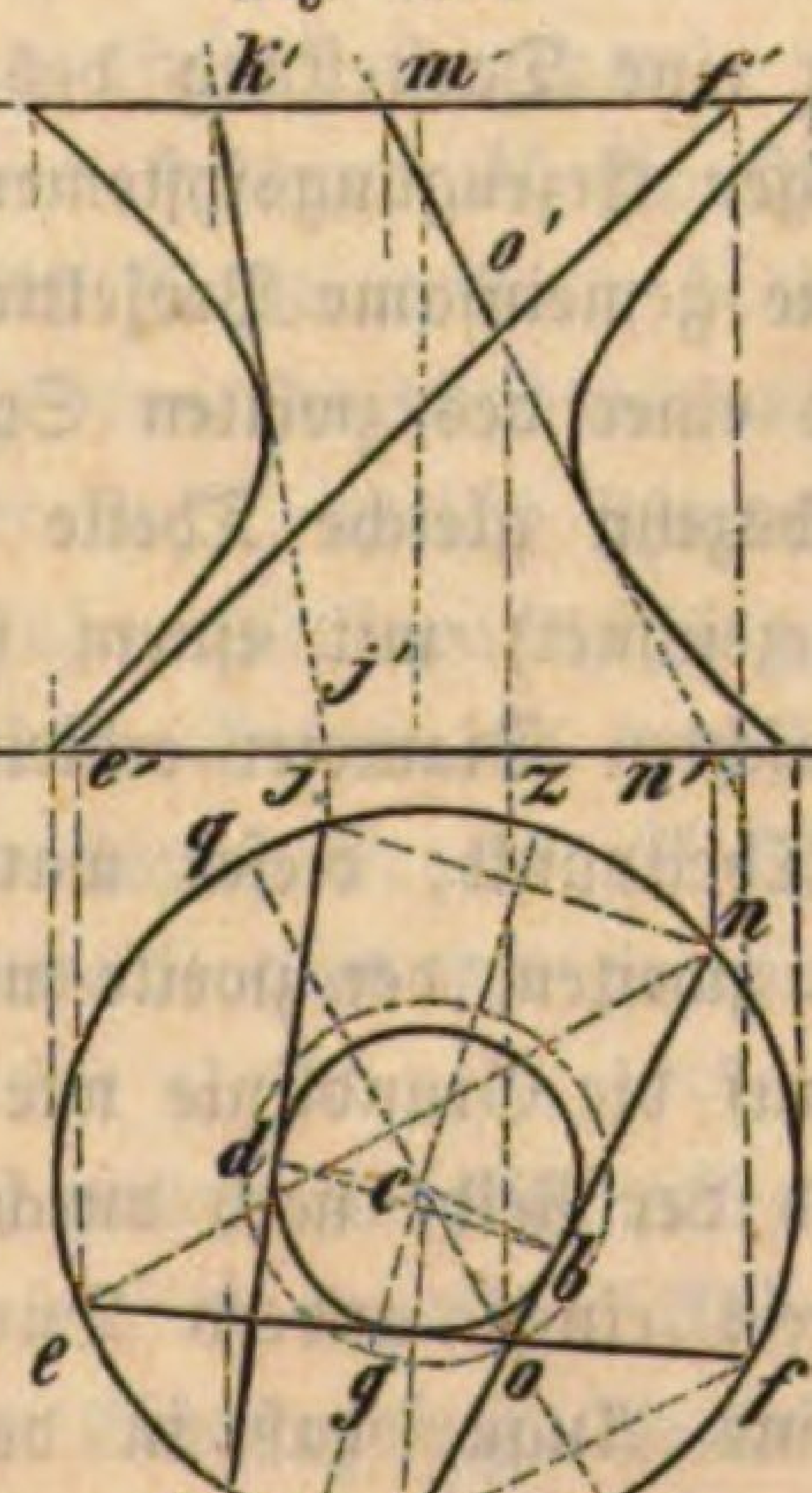
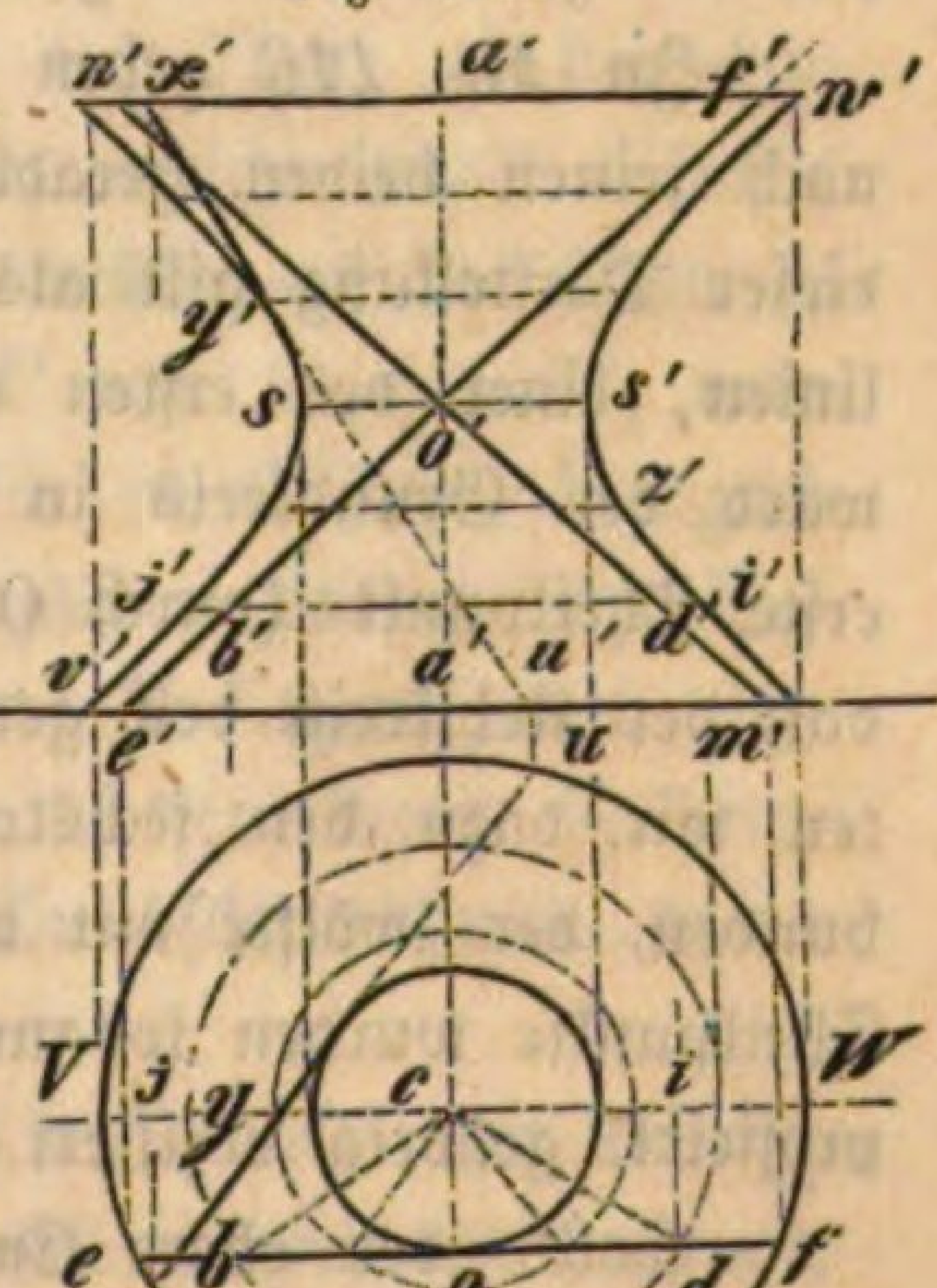
Fig. 115.


Fig. 114.


116. Wir nennen alle Geraden, welche als verschiedene Stellungen der rotirenden Linie G zu betrachten sind, „Erzeugungslinien des ersten Systems“, und alle Geraden, welche den verschiedenen Stellungen der rotirenden Linie G' entsprechen, „Erzeugungslinien des zweiten Systemes oder der zweiten Art.“

Es sei $(e\,f,\, e'\,f')$ Fig. 115 eine gerade Erzeugungslinie, c die Projektion der Rotationsaxe eines Umdrehungshyperboloides, $(o,\, o')$ ein Punkt auf der Erzeugungslinie; man verlangt die Erzeugungslinie des zweiten Systemes, welche durch $(o,\, o')$ geht. Man lege hierzu durch $(o,\, o')$ und die Rotationsaxe eine Meridianebene $o\,c\,q$, und stelle die gesuchte Gerade $(m\,n,\, m'\,n')$ symmetrisch zu $(e\,f,\, e'\,f')$ bezüglich der Meridianebene. Die Horizontalprojektion $m\,n$ muß durch o gehen und die Projektion $d\,g\,b$ des Kehlkreises berühren. Man beachte dabei, daß die Sehnen, wie $e\,n$, $g\,b$, $m\,f$, welche die Projektionen gleichnamiger Punkte verbinden, senkrecht auf $o\,q$ zu stehen kommen müssen. Den Punkt m hat man sofort wie e auf die Grundlinie zu projiciren, also nach n', und den Punkt m in die Horizontale des Punktes f', also nach m'; die Vertikalprojektionen $e'\,f'$ und $m'\,n'$ müssen, genugsam verlängert, als Tangenten erscheinen an den hyperbolischen Umriß der Fläche.

Wäre der Berührungspunkt g derjenige gewesen, für welchen man die Erzeugungslinie des zweiten Systemes verlangte, dann bliebe $e\,f$ die gleichzeitige Horizontalprojektion beider Geraden; in Bezug auf die zweite aber hätte man f als Projektion des unteren und e als jene des oberen Endpunktes zu betrachten gehabt.

In Fig. 116 geben wir eine Darstellung des Umdrehungshyperboloides nach seinen beiden geradlinigen Erzeugungssystemen. Eine jede Gerade auf dieser Darstellung gilt als die gemeinsame Projektion von zwei Erzeugungslinien, einer des ersten und einer des zweiten Systemes. Zur Ausführung ward der Grundkreis in sechszehn gleiche Theile zerlegt und alsdann der erste Theilpunkt (durch 0 bezeichnet) mit einem solchen zweiten verbunden, daß der Kehlkreis den gewünschten Diameter erhielt; in unserer Figur wählten wir dazu den sechsten Theilpunkt; dieser ward mit dem zwölften verbunden, der zwölfte mit dem zweiten, der zweite mit dem achten u. s. w. Die Theilpunkte wurden sodann auf die Grundlinie wie auf die obere Horizontale projicirt, gehörig beziffert und der Reihe nach durch gerade Linien verbunden. Sollte der obere Endkreis einen andern Durchmesser erhalten als der untere, so fasse man nur ins Auge, daß in der Horizontalprojektion die Kreuzungspunkte aller Geraden reihenweise auf konzentrischen Kreisen liegen, und in der Vertikalprojektion auf wagrechten Linien. Aus dieser Beobachtung wird der einzuhaltende Weg erkennbar sein.

117. Wir stellen nachfolgend einige Eigenthümlichkeiten der Erzeugung des scheitrechten Umdrehungshyperboloides zusammen.

I. Je zwei aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien eines und desselben Systemes durchschneiden sich nicht und liegen nicht in einer Ebene; denn die Punkte beider Geraden sind getrennt durch Bögen der Parallelkreise von wachsendem oder abnehmendem Radius, aber von gleichem Gradmaß. Dasselbe gilt überhaupt von je zwei geraden Erzeugungslinien eines Systemes.

II. Jede gerade Erzeugungslinie eines Systemes durchschneidet alle Geraden des andern Systemes. Denn jeder Punkt einer solchen Linie gehört einem Parallelkreise der Fläche an, und dieser wird auch von dem entsprechenden Punkte einer Linie des zweiten Systemes durchlaufen. Beide Gerade müssen sich darum während ihrer Rotation einmal auf dem Parallelkreise durchkreuzen.

Zusatz. Man nehme zwei Punkte des Kehlkreises, welche sich diametral gegenüberstehen; man führe durch den einen dieser Punkte eine gerade Erzeugungslinie des ersten Systemes, und durch den andern Punkt eine Gerade des zweiten Systemes, so werden diese zwei Erzeugungslinien unter sich parallel sein müssen.

III. Jede Ebene, welche durch eine gerade Erzeugungslinie eines Hyperboloides gelegt wird, schneidet die Fläche auch nach einer andern Geraden, welche dem zweiten Erzeugungssystem angehört. In der That, es bezeichne G die Gerade des ersten Systems und H die Ebene, welche durch dieselbe gelegt ward. Man ordne eine Meridianebene M an, welche auf der Ebene H senkrecht steht; man bestimme den Durchschnittspunkt P von G und M; man lege durch P eine zweite Gerade G', welche symmetrisch zu G steht, bezüglich der Ebene M. Dies G' muß erstlich eine Erzeugungslinie des zweiten Systemes sein, zweitens muß die Gerade in der Ebene H liegen, weil diese auf M senkrecht steht; somit liegen G und G' beide in der Ebene H, beide auf dem Hyperboloide und beide sind die geraden Durchschnittslinien dieser Fläche mit der Ebene.

Ein Beispiel der Anwendung in Fig. 115: $(n\,m,\ n'\,m')$ eine Gerade, welche durch ihre Rotation um die vertikale Axe c ein Hyperboloid erzeugt. Durch die Gerade ward eine Ebene gelegt, welche $n\,j$ als Horizontalriß hat. Man ordne die Meridianebene $c\,z$ an, welche auf der Ebene $m\,n\,j$ senkrecht steht; ihre Projektion $c\,z$ wird senkrecht sein müssen auf den Horizontalriß $n\,j$. Nun ist der Punkt, welchen wir vorhin mit P bezeichneten, in welchem $(n\,m,\ n'\,m')$ und die Meridianebene $c\,z$ sich schneiden, auf unserer Zeichnung nicht mehr zugängig; allein j, der Durchschnitt des Horizontalrisses $n\,j$ und des Grundkreises, ist ein Punkt der zweiten Geraden, welche symmetrisch zu

$(m\,n, m'\,n')$ bezüglich der Ebene $z\,c$ zu stellen bleibt. Ihre Horizontalprojektion $j\,k$ muß berührend gezogen werden an den Kreis vom Radius $c\,b$. j projicirt sich auf die Vertikalebene nach j', k nach k' in gleicher Höhe mit m', daher $i'\,k'$ Vertikalprojektion von $i\,k$. Beide Gerade $(n\,m, n'\,m')$ und $(i\,k, i\,k)$ müßten sich in einem Punkte (p, p') durchkreuzen, wenn man sie bis dahin verlängerte.

118. Einige Bemerkungen über den Hauptmeridianschnitt $i'\,s'\,w'$, $v'\,y'\,n'$ Fig. *114*.

I. Die Linie wird gebildet von den Punkten, in welchen die einzelnen Parallelkreise von der Ebene $V\,W$ geschnitten werden; der Parallelkreis vom Radius $c\,d$ z. B. liefert die Punkte (i, i'), $(j'\,j')$. — Die Linie wird desgleichen gebildet von den Punkten wie (y, y'), in welchen die geraden Erzeugungslinien $(u\,x, u'\,x')$ und $V\,W$ sich schneiden. Nach dem Begriffe von den scheinbaren Umrissen muß die Projektion $u'\,x'$ in y' Tangente an den Ast $v'\,y'\,n'$ sein. (Eben so ist f' Fig. *101* der Berührungspunkt des Hauptmeridianes und der Projektion $e'\,f'$.)

II. Die zwei Erzeugungslinien Fig. *114*, deren gemeinsame Horizontalprojektion $e\,f$ parallel zur Hauptmeridianebene $V\,W$ liegt, können diese Ebene niemals durchschneiden, oder, wenn man will, nur in einer unendlichen Entfernung; deshalb sind $e'\,f'$ und $m'\,n'$ zwei Tangenten an den Meridian, deren Berührungspunkte im Unendlichen liegen und welche man Asymptoten nennt.

III. Der Meridian $v'\,s'\,n'\,i'\,z'\,w'$ kann durch eine Gerade in nicht mehr als in zwei Punkten geschnitten werden. In der That denke man sich in der Meridianebene $V\,W$ irgend eine gerade Linie D, welche den rechts liegenden Ast des Meridianes in einem Punkte R schneiden mag. Diesem R entspricht eine gerade Erzeugungslinie; durch diese und durch D lege man eine Ebene, und sie wird nach III des vorigen §. das Hyperboloid nach einer zweiten geraden Erzeugungslinie schneiden, welche sich mit der Geraden D in einem Punkte S der Meridianebene, also auch des Meridianes kreuzt. R ist der Eintrittspunkt, S der Austrittspunkt der Geraden D aus dem Hyperboloid wie aus dem Meridiane der Ebene $V\,W$: und ein noch weiterer Austrittspunkt bleibt undenkbar.

IV. Gehören y' und z' zwei gleich weit von $s\,s'$ entfernten Parallelkreisen an, so muß $y'\,o'\,z'$ eine gerade Linie sein und o in ihrer Mitte liegen. Aehnliches gilt von allen anderen durch o' gehenden Geraden, welche an dem Umfange des Meridianes sich endigen, daher ist o' der Mittel-

punkt dieses Meridianes und $s' o' s'$ eine wirkliche, $a' o' a'$ eine zweite oder eine gebildete Axe desselben.

V. Ziffer III beurkundet, daß der Meridian zu den krummen Linien zweiter Ordnung oder den Kegelschnitten gehöre und unter dieser Voraussetzung sind I und II entscheidende Merkmale der Hyperbel, durch deren Umdrehung wiederum dieselbe Fläche hervorgebracht wird. Somit ist also auch die Benennung: Hyperboloid gerechtfertigt § 107. Später werden wir noch zwei andere scheitrechte Flächenarten zweiter Ordnung antreffen, denen gleichfalls die Eigenthümlichkeit der doppelten Erzeugung durch die gerade Linie zukommt.

132. Anmerkung. Wenn eine gerade kreisrunde Kegel- oder Cylinderfläche als körperliche Oberfläche mechanisch vermittelst der Drehbank hervorgebracht werden soll, ist erforderlich, daß die gerade Linie, welche von der Spitze des Stiefels durchlaufen wird, vollkommen in einer Ebene liege mit der Axe der Drehbankspindel. Denn wenn dies nicht genau der Fall, wird die entstandene Oberfläche hyperboloidisch und darum in der Mitte hohl ausfallen, wie solches zum Verdrusse der Arbeiter so häufig geschieht, ohne daß ihnen klar wird, woran der Fehler liege.

Tangirende Ebenen des Umdrehungs-Hyperboloides.

118. Von den Darlegungen der §§ 100 und 101 wiederholen wir: wird eine krumme Fläche, welche durch die gerade Linie erzeugt werden kann, in einem ihrer Punkte durch eine ebene Fläche tangirt oder berührt, so liegt die gerade Erzeugungslinie, welche durch den Berührungspunkt geht, ganz in der tangirenden Ebene.

Bei dem Umdrehungshyperboloid von einem Netze nun kreuzen sich in einem jeden Punkte C der Fläche zwei gerade Linien, deren eine dem ersten, die andere dem zweiten Erzeugungssystem angehört; eine wie die andere dieser Erzeugungslinien muß in der tangirenden Ebene des Punktes C liegen, die Lage dieser Ebene ist daher vermittelst der zwei Geraden vollständig bestimmt.

129. Anwendung. $(o\ o')$ Fig. *115* sei ein Punkt eines Umdrehungs-Hyperboloides, welcher auf der geraden Erzeugungslinie $(e\ f,\ e'\ f')$ gegeben ward; man verlangt die berührende Ebene der Fläche von diesem Punkte.

Man bestimme nach § 116 die gerade Erzeugungslinie $(n\ o\ m,\ n'\ o'\ m')$ des zweiten Systems, welche durch $(o,\ o')$ geht, und man lege durch beide Erzeugungslinien eine Ebene, welche die verlangte sein wird. Ihr Hori-

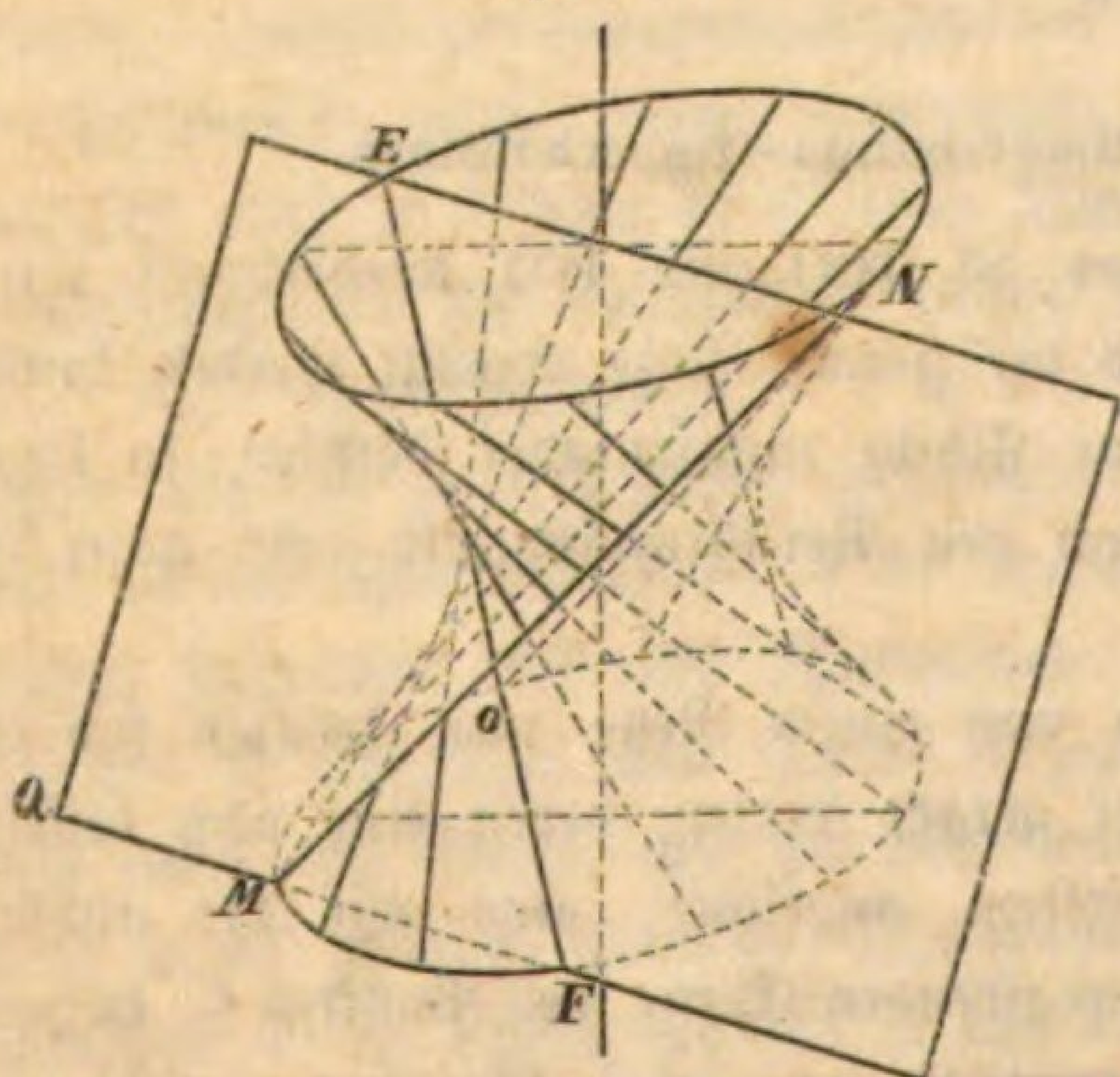
zontalriß geht nach *e* und *n*, und ihr Vertikalriß würde durch jene Punkte gehen, in welchen beide Erzeugungslinien die Vertikalebene durchschneiden (§ 13).

Eigenthümlichkeit der Berührung zwischen Hyperboloid und ebener Fläche.

120. Diese liegt in dem Umstand, daß jede berührende Ebene des Hyperboloides zugleich eine schneidende Ebene ist, sie durchschneidet nämlich die Fläche nach zwei ihrer geraden Erzeugungslinien und nur in dem Kreuzungspunkt beider Geraden findet eine Berührung zwischen der krummen Fläche und der Ebene statt.

Man betrachte in Fig. *115* die Gerade *j' k'* oder *n' m'*, deren jede Tangente ist an die Projektion des Hauptmeridianes, und denke sich, jede dieser Geraden sei die Projektion einer Ebene, welche auf der vertikalen Bildfläche senkrecht steht; dann wird auch alsobald erkannt werden, wie jede dieser Ebenen zu gleicher Zeit eine schneidende und in einem Punkte eine tangirende Ebene des Hyperboloides sei.

Fig. *117*.



Zu mehrerer Anschaulichkeit haben wir den Vorgang in Fig. *117* nach schräger Prejektion dargestellt, die gegebenen Erzeugungslinien des Hyperboloides gehören einem Erzeugungssysteme an, mit Ausnahme von M N, welche dem zweiten Systeme entspricht. Eine der ersten Graden, F E z. B., kreuzt sich mit N N in o. Eine Ebene Q M F R N E ward durch die beiden Erzeugungslinien M N und F E gelegt. Diese Geraden bilden den Durchschnitt der Ebene und des Hyperboloides und im Kreuzungspunkt o wird der Schnitt zur Berührung; mit andern Worten: o ist der Berührungspunkt der krummen Fläche und der Ebene.

121. **Lehrsatz.** Jede Ebene, welche durch eine gerade Erzeugungslinie des Umdrehungshyperboloides gelegt wird, ist eine tangirende Ebene der Fläche.

Denn nach den Ausführungen von § 117 III muß eine solche Ebene

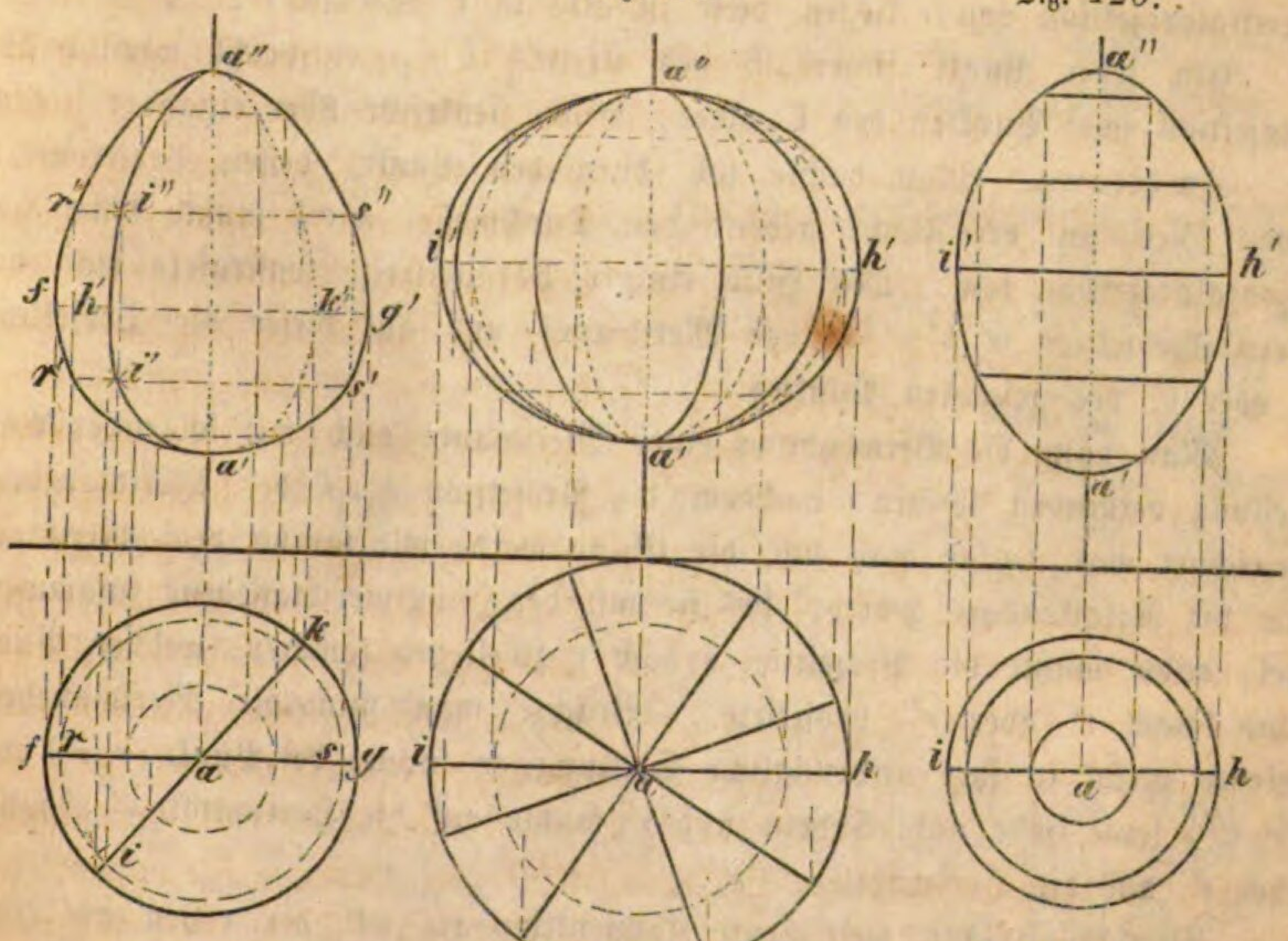
das Hyperboloid noch in einer zweiten geraden Linie durchschneiden, welche zu den Erzeugungslinien des zweiten Systems gehört. Die Fläche wird also an der fraglichen Ebene da tangirt, wo die zwei Geraden sich gegenseitig durchkreuzen.

Ist demnach *(n m, n' m')* Fig. *115* eine gerade Erzeugungslinie der Fläche und ist die beliebig gezogene Gerade *n j* der Horizontalriß einer Ebene, in welcher *(n m, n' m')* liegt, so schneidet zufolge des genannten §. die Ebene das Hyperboloid noch in einer zweiten Geraden *(j k, j' k')* und der, nicht mehr zugängige, Kreuzungspunkt beider Geraden ist zugleich der Berührungspunkt der Ebene mit der krummen Fläche.

Sphäroide.

122. Der Name ward von Archimedes jenen Flächenformen beigelegt, welche durch die Rotation einer Ellipse um eine ihrer Axen erzeugt werden

Fig. *118*. Fig. *119*. Fig. *120*.



können. Wir erweitern den Begriff dahin, daß wir unter Sphäroiden alle jene Flächen verstehen, welche durch die Rotation einer in sich geschlossenen krummen Linie um ihre Symmetrie-Axe entstehen.

123. Fig. *118*. Eifläche (Ovoid). Das Oval $a' f' a'' g'$ ward als Projektion des Hauptmeridianes angenommen, seine Symmetrieaxe $a' a''$ als Rotationsaxe; daher a die Horizontalprojektion dieser Axe. Zwei senkrechte Tangenten an das Oval berühren dasselbe in f', g'; der Abstand dieser Berührungspunkte ist gleich dem Durchmesser des größten Parallelkreises, dessen Horizontalprojektion hier den Kontur der Fläche bildet. $f\ a\ g$ Horizontalprojektion des Hauptmeridianes.

124. Aufgabe. i ist die Horizontalprojektion eines Punktes der Eifläche, man verlangt dessen Vertikalprojektion.

Erstens. Man denkt sich durch den Punkt einen Parallelkreis der Fläche gehend: $i\ a$ muß gleich sein dem Radius desselben, daher $i\ r\ s$ seine Horizontalprojektion. Die Berührungspunkte r, s des Kreises und seiner senkrechten Tangenten werden auf den Hauptmeridian nach r' oder r'' projicirt, sowie nach s' und s''. Hieraus folgt $r'\ s'$ oder $r''\ s''$ als Vertikalprojektion des Parallelkreises. Auf einer oder der andern muß die gesuchte Vertikalprojektion von i liegen, diese ist also in i' oder in i''.

Ein jeder Punkt innerhalb des Kreises $k\ f\ g$ entspricht nämlich als Projektion zwei Punkten des Ovoides, welche senkrecht über einander liegen.

Zweitens. Man dachte sich durch den Punkt, dessen Projektion i, einen Meridian der Fläche gehen: der Durchmesser $h\ i\ k$ mußte seine Horizontalprojektion sein. Mit Hilfe einiger Parallelkreise konstruirte man die Vertikalprojektion $a'\ h'\ a''\ k'$ des Meridianes und auf dieser die Projektion i' oder i'' des gesuchten Punktes.

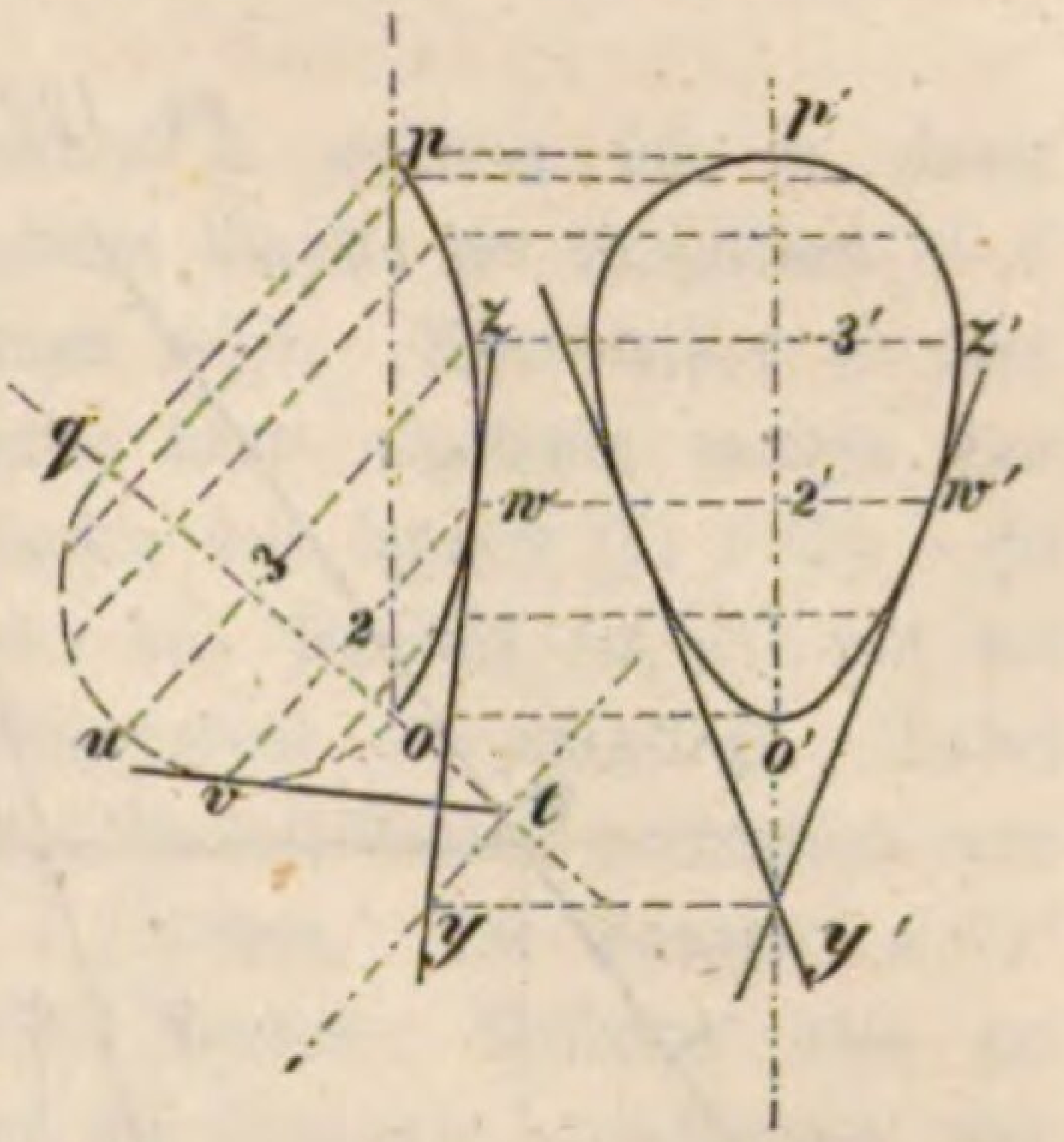
Man hätte die Verwendung eines Meridianes auch mit folgender Vorstellung verbinden können: nachdem die Projektion $h\ i\ k$ der Meridianebene gezeichnet war, dachte man sich, die Ebene werde mit sammt dem Meridiane um die Rotationsaxe gedreht, bis sie mit der Hauptmeridianebene zusammenfiel; dabei mußte die Projektion i nach r zu liegen kommen, welchen Punkt man nach r' oder r'' projicirte. Brachte man nun die Meridianebene wieder zurück in ihre ursprüngliche Stellung, so konnte der Punkt (r, r') oder (r, r'') seine Höhe nicht ändern und i' mußte auf die Horizontale $r'\ s'$ fallen oder i'' auf die Horizontale $r''\ s''$.

Thatsächlich läuft diese letzte Konstruktionsart mit der ersten auf eines hinaus, aber es handelt sich hier eben um geometrische Anschauungen.

125. Anmerkung. Nachfolgend eine Konstruktion der Eilinie. Fig. *121*. Bildet ein rechtwinkliges Dreieck $o\ p\ q$, dessen Hypothenuse $o\ p$ gleich ist der Höhe des Ovales und dessen Kathete $o\ q$ gleich seiner Breite. Ueber

$o\,q$ beschreibet einen Halbkreis und über $o\,p$ einen flachen Kreisbogen. Nachdem der Halbkreis in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilt worden, ziehet durch die Theilpunkte Linien senkrecht auf $o\,p$ und verlängert dieselben bis z, w ꝛc. an den Kreisbogen. Sofort stellet $o'\,p'$ parallel mit $o\,p$ und machet die Ordinaten $3'\,z$, $2'\,w'$ ꝛc. gleich den Halbkreisordinaten $3\,u$, $2\,v$ ꝛc. z', w' u. s. w. sind Punkte der verlangten Kurve.

Fig. 121.



Die Tangente an irgend einem Punkte w' des Ovales zu bestimmen, markiret die entsprechenden Punkte w, v auf beiden Kreisbogen und ziehet hier die Kreistangenten $w\,y$, $v\,t$. In t errichtet eine Senkrechte auf $o\,q$ und projiciret den Durchschnitt y auf die Axe $o'\,p'$ nach y'. Dies wird ein zweiter Punkt der Tangente sein. — Wir werden später in diesem Ovale die Projektion des Durchschnittes zweier Cylinderflächen e kennen.

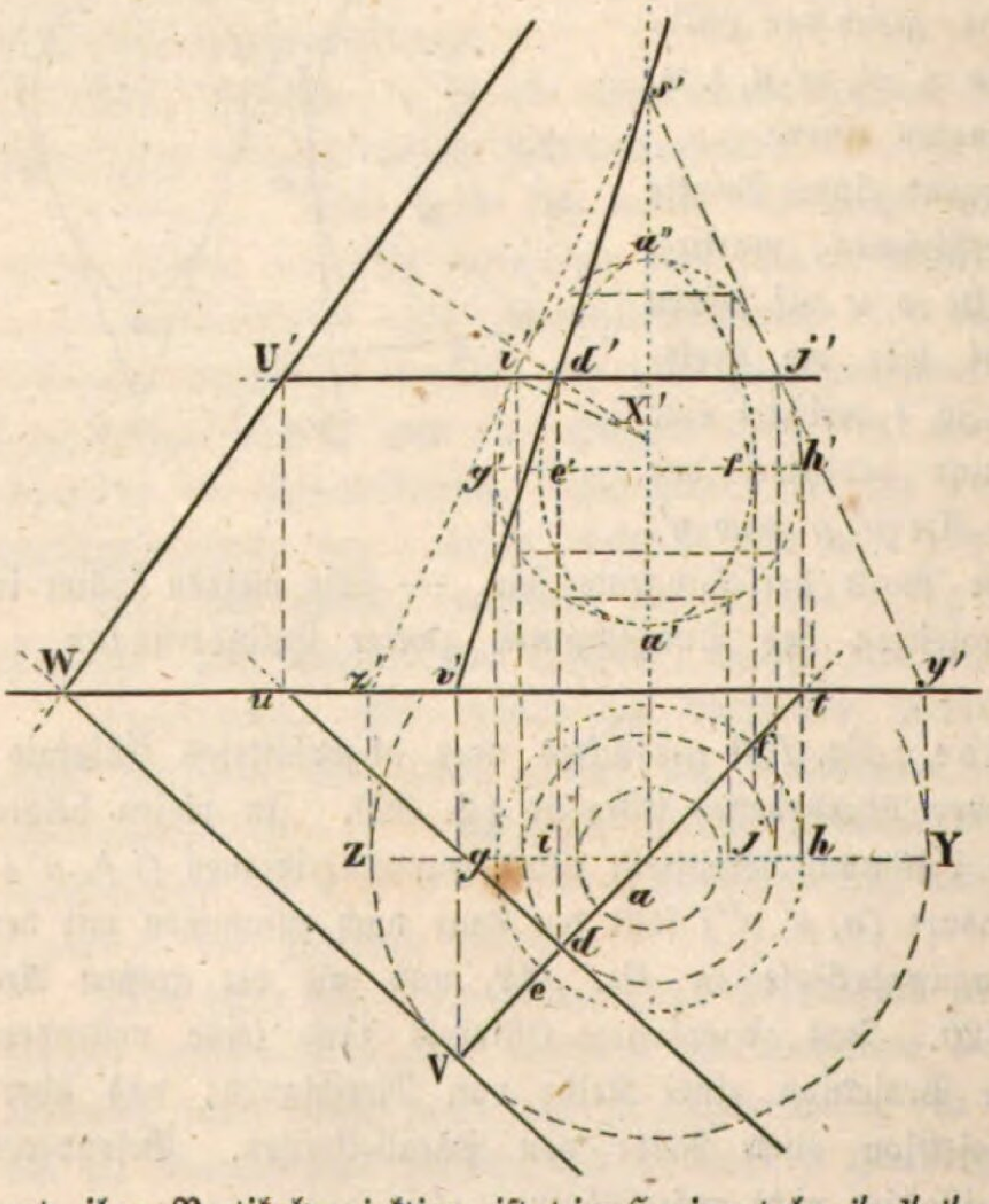
126. Ellipsoide. Fig. 119 gedrücktes oder abgeplattetes Ellipsoid; Fig. 120 längliches oder überhobenes Ellipsoid (§. 82). In diesen beiden Figuren ist die Fläche bestimmt, vermittelst ihres Hauptmeridianes $(i\,h,\ a'\,i'\ a''\,h')$. Die Rotationsaxe $(a,\ a'\,a'')$ fällt der Lage nach zusammen mit der kleinen Axe der Erzeugungsellipse in Fig. 119, und mit der großen Axe dieser Linie in Fig. 120. Das abgeplattete Ellipsoid fand seine vollendete Darstellung durch die Projektion einer Reihe von Meridianen; das überhobene durch die Projektion einer Reihe von Parallelkreisen. Besonderes über beide Sphäroide ist hier nicht aufzuführen.

Berührende Ebene der Sphäroide.

Bezüglich eines jeden Punktes β solcher Flächen kennt man alsofort zwei Erzeugungslinien derselben, welche sich in diesem Punkte kreuzen, nämlich den Meridian und den Parallelkreis dieses Punktes. Wird in β an jede der beiden Linien eine Tangente gezogen, und durch die zwei Tangenten eine Ebene gelegt, so hat man damit die tangirende Ebene jenes Punktes bestimmt (§. 101). Eine Senkrechte auf die tangirende Ebene in dem Berührungspunkte errichtet, ist hier die Normale der Fläche.

127. Zur Anwendung der vorstehenden allgemeinen Vorschrift auf einen besondern Fall ward in Fig. *122* wiederum das Ovoid gewählt und nach der Anleitung von §. 124 erstens ein Punkt *(d, d')* festgesetzt, in welchem die berührende Ebene zu bestimmen ist; zweitens wurden gezeichnet die Projektionen des Parallelkreises *(i d j, i' j')* sowie des Meridianes *(e d f, a' d' a'' f'')*, welche durch eben diesen Punkt *(d, d')* gehen.

Fig. *122.*



Tangente an den Meridian *(e d f, a' d' a'' f')*; ihre Vertikalprojektion ist die Tangente *s' d' v'* der Linie *a' d' a'' f'* und ihre Horizontalprojektion wiederum die Gerade *f d e*.

Tangente an den Parallelkreis *(i d j, i' j')*; ihre Horizontalprojektion ist die Tangente *d u* des Kreises *d i j*, und ihre Vertikalprojektion ist die Horizontale *j' d' i'*. Die Ebene, welche durch beide Tangente zu legen, hat V W als Horizontalriß und W U' als Vertikalriß. V W muß nothwendig mit *d u* parallel sein oder auf *f e* senkrecht stehen, weil die Kreistangente, durch welche die Ebene geht, horizontal liegt, und auf der Meridianebene *f e* senkrecht steht.

(V, *v'*) ist der Durchschnittspunkt der Meridiantangente *(f e, s' v')* mit der Horizontalebene, und *(u,* U'*)* Durchschnittspunkt der Kreistangente mit der Vertikalebene. Ein weiterer Punkt des Vertikalrisses wäre da, wo die Meridiantangente die Vertikalebene durchschneidet; seine Horizontalprojektion ist in *t*, aber der Punkt selbst ist in der Figur unzugängig.

Wir haben in dieser Figur die berührende Ebene als wirklich vorhanden angenommen, und deßhalb ihre Risse sowie die zwei Tangenten in ihr, als sichtbar, durch volle Linien ausgedrückt; das Sphäroid aber wird in beiden Ansichten durch die Ebene verdeckt, aus welchem Grunde die wirklichen Linien der Fläche punktirt werden mußten.

128. Die Konstruktion des vorstehenden §. gründet sich in einem Stücke auf die Unterstellung, daß man in einem Punkte der Projektion $a' d' a'' f''$ eine Tangente an dieselbe zu zeichnen wisse. Unmittelbar ist dies zwar nicht zu vollbringen, allein die Tangente kann abgeleitet werden von jener des Hauptmeridianes, dessen Bildungsgesetz wir kennen (§. 125). Zu dem Ende denkt man sich die Meridianebene des Punktes (d, d') um die Rotationsaxe gedreht und in die Hauptmeridianebene $g\,h$ umgelegt. Dabei wird der Punkt den Bogen $(d\,i, d'\,i')$ eines Parallelkreises beschreiben und nach vollendeter Drehung seinen Ort in (i, i') finden. Die Tangente $s'\,i'\,z'$ kann nach der Vorschrift von §. 125 gezogen werden. Nachdem dies geschehen, denkt man sich die Ebene mit sammt der Tangente zurückgedreht und in die ursprüngliche Lage $f\,d\,e$ verbracht. Dabei wird nun (i, i') wieder nach (d, d') fallen; der Punkt (s', a), in welchem Tangente und Rotationsaxe sich schneiden, bleibt unverändert und der Fußpunkt (z', Z) der Tangente in der Horizontalebene kommt nach V, indem man uns a mit Z a als Radius den Bogen Z V beschreibt; dadurch bestimmt sich die Vertikalprojektion $v'\,d'\,s'$, ohne daß es nöthig gewesen, vorher die Projektion $a'\,e'\,a''\,f''$ zu verzeichnen, welche somit als entbehrlich erscheint.

128. Unsere bisherigen Konstruktionen der berührenden Ebene des Sphäroides sind als mustergiltig zu betrachten für alle Umdrehungsflächen, welche durch ihren erzeugenden Meridian und ihre Rotationsaxe gegeben sind, die besondere Art und Familienverwandtschaft derselben mag sein welche sie wolle.

Allgemeine Sätze über die tangirenden Ebenen der Umdrehungsflächen.

129. Jede solche Ebene enthält die Tangente, welche im Berührungspunkte an den Parallelkreis dieses Punktes gezogen oder gedacht wird; die Tangente steht aber senkrecht auf der Meridianebene desselben Punktes, daher endlich stehen diese Meridianebene und die tangirende Ebene selbst senkrecht auf einander.

Erläuterung in **Fig.** *115* sind $(n\,m, n'\,m')$ und $(e\,f, e'\,f')$, zwei gerade Erzeugungslinien des Umdrehungshyperboloides. Eine Ebene, welche durch

beide Gerade geht, hat *e n* als Horizontalriß und ist die berührende Ebene im Punkt *(o, o')* der Umdrehungsfläche (§. 118). Weil aber *e f* und *n m* symmetrisch stehen gegen die *q c o*, so muß *e n* im rechten Winkel gegen *q o* gerichtet sein, mit andern Worten: die berührende Ebene des Punktes *(o, o')* muß der Konstruktion zu Folge senkrecht stehen gegen die Meridianebene desselben Punktes.

130. Fig. *122*. Nachdem hier der Hauptmeridian gegeben war und man hatte die Tangente *(z' s'*, Z *a)* an einem seiner Punkte *(i, i')* gezeichnet, wurde der Meridian in Rotation gebracht, um die Axe *(a, a' a'')*. Während dabei der Meridian das Sphäroid erzeugte, hat die Tangente einer Kegelfläche die Entstehung geben müssen, als deren Grundlinie man den vom Berührungspunkte *(i e')* beschriebenen Parallelkreis *i' j', i j d)* betrachten kann.

Fasset man nun das Berührungselement ins Auge, welches Meridian und Tangente bei *i'* gemein haben, und verfolgt dies während der Umdrehung, dann zeigt sich, daß das Element eine kreisrunde, unendlich schmale Zone hervorbringt, welche sowohl der Kegelfläche als der Sphäroide angehört, woraus endlich hervorgeht, daß genannte zwei Flächen sich gegenseitig in allen Punkten des gemeinsamen Parallelkreises berühren.

131. Es mag dies Ergebniß in folgender Ausdrucksweise zusammengefaßt werden: man denkt sich einen Parallelkreis irgend einer Umdrehungsfläche und durch alle seine Punkte Meridiane der Fläche gelegt, so wie in jedem Punkte die Tangente an den Meridian; dann werden alle Tangenten sich in einem einzigen Punkte der Rotationsaxe kreuzen und in ihrer Gesammtheit eine Kegelfläche bilden, welche die Umdrehungsfläche umhüllt und längs des Parallelkreises berührt.

132. Man betrachte die Meridiantangente *s' z'* Fig. *122* als die Projektion einer Ebene, welche auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht, und deren Horizontalriß demzufolge die Richtung *z'* Z habe, so ist dies eine tangirende Ebene erstlich an das Sphäroid, weil sie nicht nur die Meridiantangente *(s' z', a* Z) enthält, sondern auch die Kreistangente in *(i, i)*, welche gleichfalls auf der Vertikalebene senkrecht steht. Zweitens ist sie zugleich eine tangirende Ebene an die Kegelfläche, deren Scheitel in *(a, s')* und deren Grundlinie der Parallelkreis *(i' j', i d j)* oder der Kreis (Z V Y, *z' g')* (§. 104). Läßt man diese Ebene Z *z' s'* theilnehmen an der gleichzeitigen Rotation des Hauptmeridianes und seiner Tangente *(s' z', a* Z*)*, so bleibt sie stets tangirend an das Sphäroid, sowie an die Kegelfläche, deren Scheitel in

(s', a'). Hieraus fließt allgemein: jede berührende Ebene an die §. 131 genannte umhüllende Kegelfläche tangirt auch die Umdrehungsfläche, und der Berührungspunkt liegt auf dem Parallelkreise, welchen beide Flächen gemeinsam haben.

Normallinien der Umdrehungsflächen.

133. In dem Punkte (d, d') der Fig. 122 die Normale des Sphäroides zu konstruiren bleibt zu beachten, daß nach §. 30 die Horizontalprojektion dieser Linie senkrecht stehen müsse auf dem Horizontalriß V W der berührenden Ebene des Punktes (d, d'), wonach diese Horizontalprojektion die Richtung $d\,a$ hat, daß ferner die Vertikalprojektion $d'\,x'$ ihrer Richtung nach senkrecht stehen müsse auf dem Vertikalrisse W U′ (§. 127).

Weil $d\,a$ die Horizontalprojektion der Normalen des Punktes (d, d') ist, folgt, daß diese Normale ganz in der Meridianebene $e\,d\,F$ liege und daß sie demgemäß auch Normale sei zu dem Meridian dieser Ebene in demselben Punkte $(d'\,d)$.

134. Die Schlußfolgerung umkehrend ziehen wir nachstehende Konsequenz: die Normale an einem Punkte des Meridianes einer Umdrehungsfläche ist für diesen Punkt auch die Normale zur ganzen Fläche.

Dieser Satz läßt sich auch direkt mit wenig Worten beweisen, denn die Normale an einem Punkte Q des Meridianes einer Umdrehungsfläche steht ihrer Natur nach senkrecht auf der Tangente in Q und muß die Rotationsaxe, welche auch in der Meridianebene liegt, irgendwo durchschneiden. Legt man aber durch Q einen Parallelkreis der Fläche nebst seiner Tangente, so muß die Normale auch auf dieser Tangente senkrecht stehen, wie jede gerade Linie, welche von einem Punkte der Axe eines Kreises nach dem Umfang desselben gezogen wird. Die Normale steht daher in Q senkrecht auf zwei Tangenten der Umdrehungsfläche, also senkrecht auf der tangirenden Ebene, welche durch diese Tangenten bestimmt wird.

135. Aus dem Satze des vorhergehenden §. ergiebt sich eine Konstruktion der Normalen des Punktes (d, d') Fig. 121, welche unabhängig ist von einer vorgängigen Bestimmung der tangirenden Ebene an diesem Punkte.

Zugleich mit dem Punkte (d, d') ist auch seine Meridianebene $e\,d\,f$, so wie die Horizontalprojektion $d\,a$ der Normalen gegeben. Nun drehe man die Meridianebene $e\,f$ mit dem Punkte (d, d') in ihr, um beide in die

Hauptmeridianebene zu legen, wodurch jener Punkt in *(i, i')* seine neue Stelle findet. In *i'* zieht man eine Senkrechte *i' x'* auf die Tangente *z' s'*, dies wird die Vertikalprojektion der Normalen des Punktes *(i, i')* sein und *i a* ist deren Horizontalprojektion. Sofort bringe man die Meridianebene wieder in ihre ursprüngliche Stellung zurück und lasse die Normale theilnehmen an der Bewegung, wobei der Punkt *(a, x')*, welcher auf der Axe liegt, unverändert bleiben wird. Dies *x'* giebt sich somit zu erkennen als einen zweiten Punkt der Vertikalprojektion *d' x'*.

136. Hätte man die Normale *(i a, i' x')* in einer vollen Rotation um die Axe geführt, so würde sie eine Kegelfläche beschrieben haben, deren Scheitel in *(a, x')*, und ihr Fußpunkt *(i', i)* würde den Parallelkreis *(i' j', i d j)* durchlaufen, welcher als Durchschnitt des Sphäroides und der Kegelfläche erschiene. Beide Flächen stünden normal gegen einander im ganzen Umfang dieses Kreises.

Dies Ergebniß ist wiederum völlig allgemeiner Natur und durch keinerlei besondere Art der Umdrehungsfläche bedingt. Wir wollen dasselbe aus diesem Grunde als ein Korollarium des Satzes in §. 131 in folgender Ausdrucksweise formuliren: Denkt man sich irgend eine Umdrehungsfläche und einen Parallelkreis derselben, sowie in allen Punkten dieses Kreises die Normalen der Fläche, dann bilden diese Normalen in ihrer Gesammtheit eine Kegelfläche, welche die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreise normal durchschneidet.

Conoide.

137. Diese Benennung ward von Archimedes gebraucht zum Bezeichnen jener Flächen, welche durch Umdrehung einer Parabel um ihre Axe oder durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre wirkliche Axe entstehen können.

Fig. *122. m n* Hauptmeridianebene, in welcher eine Parabel *m' a' n'* gegeben ist, durch deren Rotation um die Axe *(a, a'' a')* ein Umdrehungsparaboloid erzeugt wird (§. 86) oder nach Archimedes ein parabolisches Conoid. Die Fläche ward durch die horizontale Projektionsebene begränzt angenommen und ihre Darstellung durch die Projektionen mehrerer Parallelkreise vervollständigt. Einige dieser Kreise werden von der vertikalen Projektionsebene durchschnitten und die Punkte, in welchen solches geschieht, gehören dem Durchschnitt *e' f' g'* des Conoides und der Projektionsebene an. Dieser Schnitt ist wiederum parabolisch und sein oberster Punkt *f'* liegt

auf jenem Parallelkreise, dessen Horizontalprojektion die Grundlinie $m' n'$ tangirt.

138. Fig. 124. In der Hauptmeridianebene $i\,k$ hat man eine Hyperbel $i'\,a'\,h' \ldots l'\,a''\,k' \ldots$ angenommen, deren Axe $a'\,a''$ jedoch, zu einiger

Fig. 124.

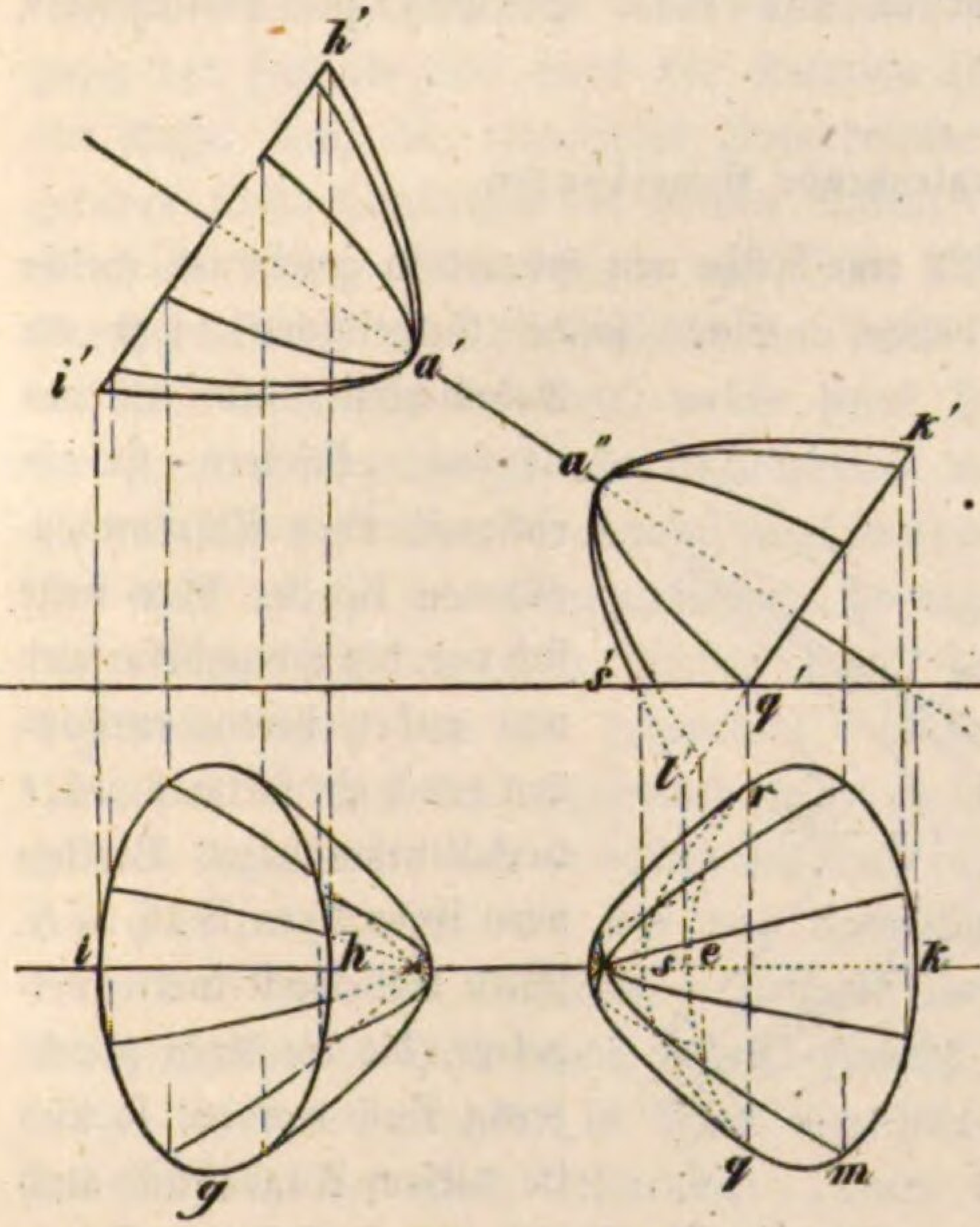
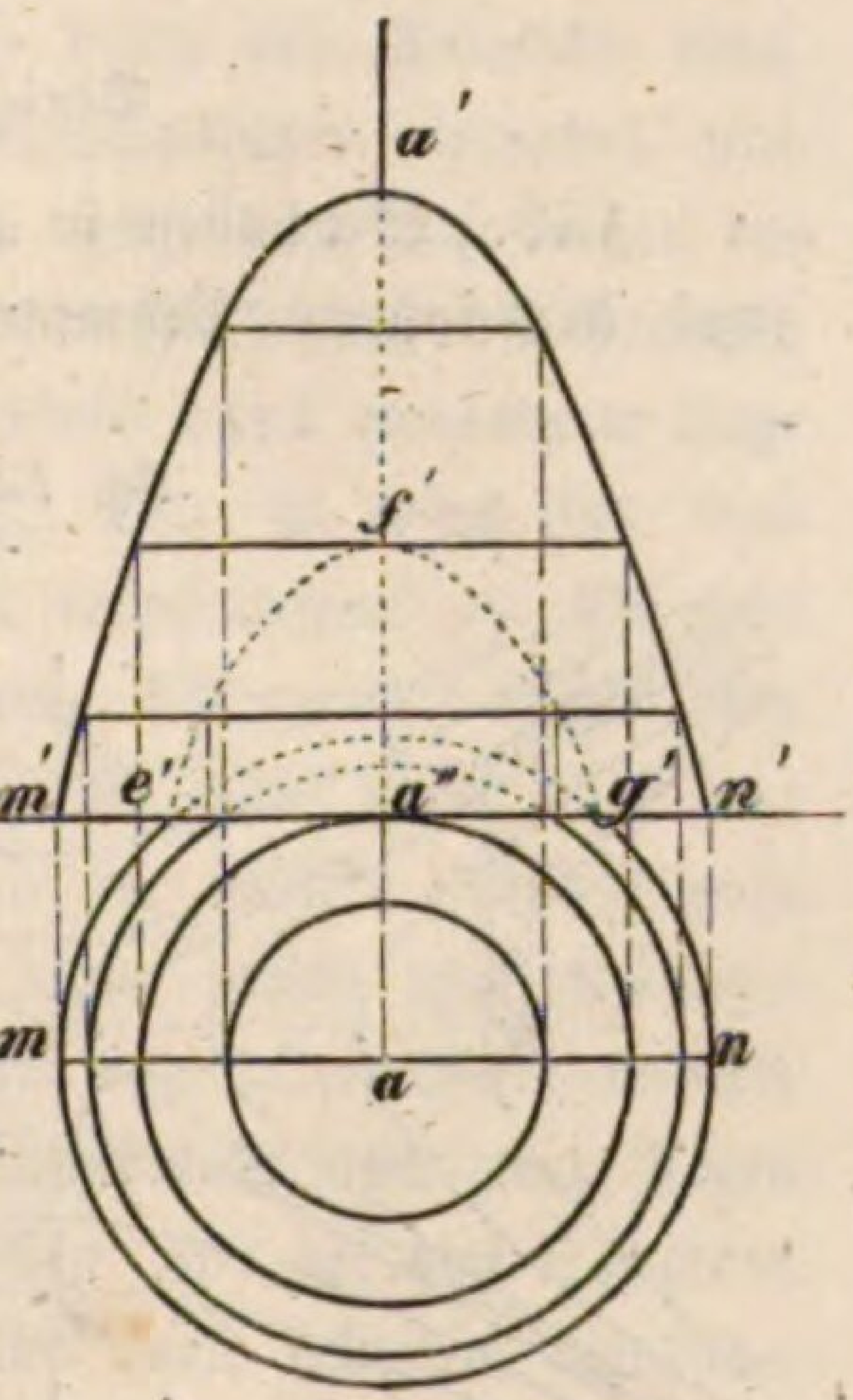


Fig. 123.



Abwechselung, schief gegen die Horizontalebene gestellt ward. Durch die Rotation der Hyperbel um diese Axe entstand ein hyperbolisches Conoid.

Dies Conoid besteht aus zwei Flächennetzen: einem aufwärts gekehrten, dessen Scheitel oder Pol sich nach a' projicirt, und einem abwärts gerichteten, dessen Scheitel durch a'' repräsentirt wird. Dies Conoid ist somit dieselbe Fläche, welche bereits in §. 85 als Umdrehungshyperboloid von zwei Netzen aufgeführt ward.

Wie die beiden Aeste der Hyperbel sich bis ins Unendliche fortsetzen können, so sind auch die beiden Flächennetze des durch die Rotation der Hyperbel um ihre wirkliche Axe erzeugten Conoides ihrer Natur nach unbe-

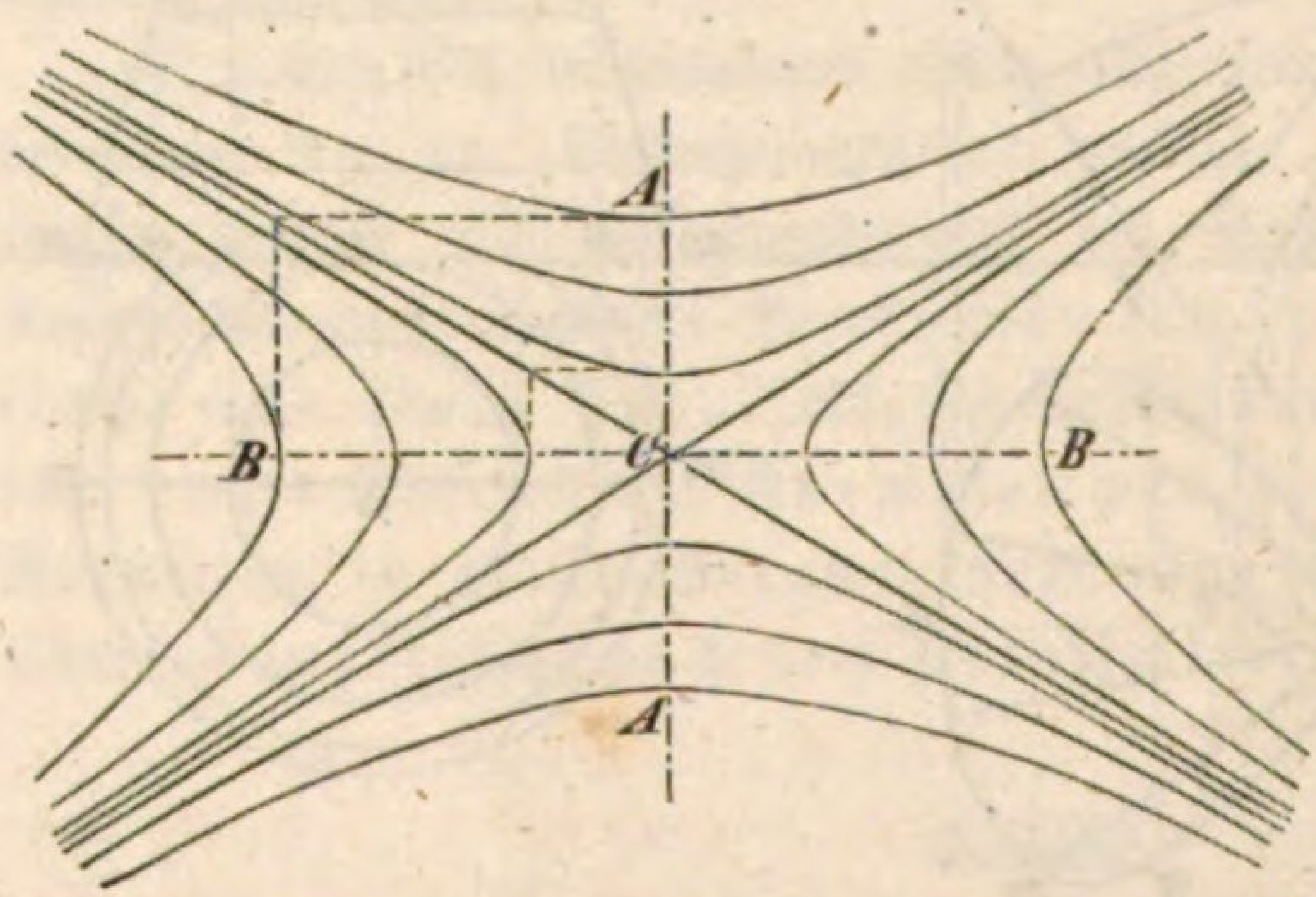
gränzt. In der Figur jedoch ist die Fläche als abgeschnitten dargestellt durch zwei ihrer Parallelkreise *(i' h, i g h)* und *(l' k', l m k)*, und wir haben außerdem noch die Projektionen von acht weiteren Meridianen beigefügt. Einige dieser Meridiane durchdringen die horizontale Projektionsebene in Punkten, welche einem elliptischen Bogen *(s' q', q s r)* angehören.

(Zur Ausführung der Fig. *123* wird man dieselbe zuerst mit vertikaler Rotationsaxe entwerfen und alsdann aus dieser Stellung zur vorliegenden übergehen.)

Einige vergleichende Bemerkungen.

139. Wir haben in Fig. *122* eine Reihe von Hyperbeln gezeichnet, welche zwei gemeinsame Asymptoten haben. Eine solche Gemeinschaft setzt die Aehnlichkeit der Kurven voraus, insofern sie in entsprechenden Asymptotenräumen liegen. Man stelle sich vor, die Hyperbeln seien von außen herein entstanden durch ein fortwährendes verhältnißmäßiges Verkleinern ihrer Axen B B, A A. Wird dies Verkleinern fortgesetzt, bis die Axen gleichzeitig Null werden, so sind in diesem Augenblick auch die Hyperbeln mit ihren Asymptoten in Eines zusammengefallen. Somit erscheinen diese Asymptoten als die Gränze aller Gestaltsänderungen, welche beide Hyperbelreihen durch das Kleinerwerden ihrer Axen erleiden.

Fig. *125*.



140. Nun unterstelle man, die Senkrechte A A werde zur Rotationsaxe und sämmtliche Linien der Figur machten eine gleichzeitige Drehung um diese Axe. Dann werden als Ergebniß dieser Bewegung folgende krumme Flächen zum Vorschein kommen: erstens durch jede Hyperbel, deren Scheitel auf der Rotationsaxe A A liegt, ein doppelnetziges Umdrehungs-Hyperboloid; zweitens durch jede Hyperbel, deren Scheitel der Wagrechten B B angehört, ein einnetziges Umdrehungs-Hyperboloid; drittens durch die Asymptoten eine gerade kreisrunde Kegelfläche.

Gleichwie nun die Asymptoten als die Gränze aller Hyperbeln erscheinen,

welche wir in Betracht genommen, so tritt von ihrer Seite die Kegelfläche auf, als asymptotische Fläche beider Reihen von Hyperboloiden und zugleich als die gemeinsame Gränze der Formveränderungen, welche diese Hyperboloide erleiden, durch das Kleinerwerden der Axen aller Erzeugungshyperbeln bei unverändertem Asymptotenwinkel. Nach dieser Anschauung wäre nun auch die Benennung Conoid, Kegelsippe für beide Gattungen von Umdrehungshyperboloiden gerechtfertigt — dies Alles bezieht sich indeß auf die Erzeugung der Hyperboloide durch die Rotation ihres Meridianes; faßt man aber ins Auge, daß die einnetzigen Hyperboloide auch durch die Rotation einer geraden Linie hervorgebracht werden können (die doppelnetzigen niemals), und vergleicht unsere Darstellungen auf Seite 195, so zeigt sich, daß außer der Kegelfläche auch die Cylinderfläche und selbst die ebene Fläche als die Gränzen der Formbildungen auftreten, welche jenes Hyperboloid durch veränderte Lage der geraden Erzeugungslinie anzunehmen vermag, und so wäre für dies Hyperboloid auch die Benennung Cylindroid zu rechtfertigen. — Es geht hier etwa wie in der Pflanzenkunde, wo irgend eine Pflanzenart dieser oder jener Sippschaft beigezählt werden kann, je nachdem man diese oder jene Eigenthümlichkeit von ihr hervorhebt. Man wird in solchen Fällen wohl thun, den üblichen Sprachgebrauch gelten zu lassen, wenn nichts wirklich Ungereimtes darin liegt, und so halten wir auch fürder zu dem alten Mathematiker von Syrakus, indem wir nur das Umdrehungshyperboloid von zwei Netzen unter den Conoiden aufführen. Deßhalb auch ließen wir bei den Conoiden das Umdrehungs-Paraboloid stehen, obwohl dasselbe durch keinerlei Veränderung seiner Brennweite in eine Kegelfläche umwandelbar ist; und wir schließen mit der Sach-Erklärung: „unter den Umdrehungsflächen gehören zu den Conoiden alle jene, welche durch die Rotation einer offenen, niemals geschlossenen Linie um ihre Symmetrie-Axe hervorgebracht werden können.

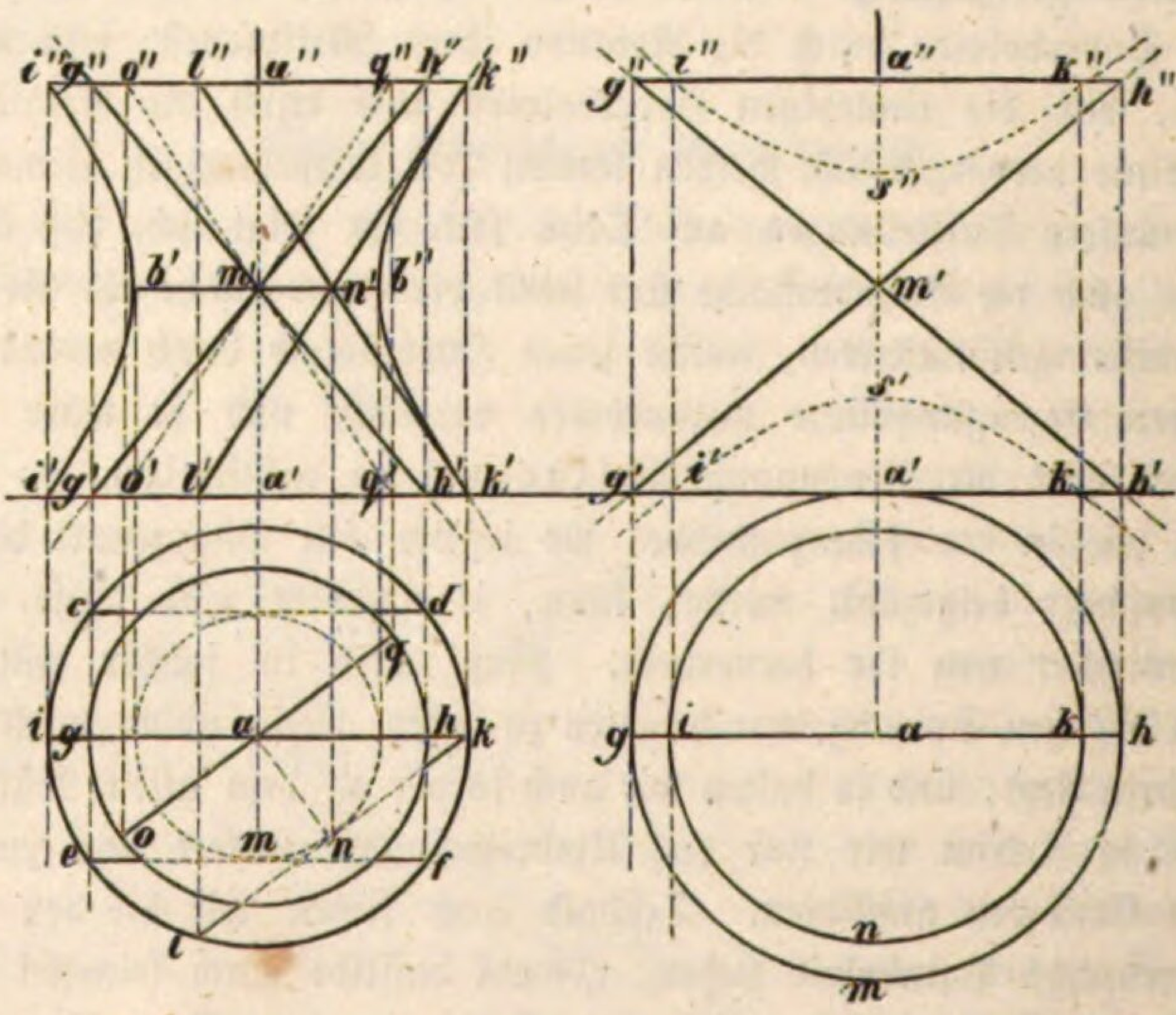
Die asymptotische Kegelfläche der Umdrehungs-Hyperboloide.

141. Diese Kegelfläche entsteht, wie so eben gesagt worden, durch die simultane Umdrehung der Hyperbel und ihrer Asymptoten um eine ihrer Axen. Es liegt an unserm Wege, die eigenthümliche Beziehung dieser beiden Flächen näher ins Auge zu fassen.

Fig. *126*. Die Senkrechte $(a, a' a'')$ sei Rotationsaxe eines Umdrehungshyperboloides von einem Netze und die Gerade $l\,k, l'\,k'$ eine gerade Erzeugungslinie dieser Fläche. $(a\,n, m'\,n')$ kürzeste Entfernung der Erzeugungs-

linie und der Axe, also auch Radius des Kehlkreises der Fläche (§. 107). (l, l') und (k, k') wurden in gleicher Entfernung von (n, n') angenommen und die von beiden genannten Punkten beschriebenen Parallelkreise als Begränzungen der Fläche. Die zwei Kreise haben eine gemeinsame Horizontalprojektion $i\,l\,k$ und ihre Vertikalprojektionen $i'\,k'$, $i''\,k''$ stehen gleichweit von

Fig. 126. Fig. 127



$m'\,n'$ ab. Betrachtet man k als die Projektion des untersten Punktes, und l' als jene des obersten der geraden Erzeugungslinie, so projicirt ersterer sich nach k' und letzterer nach l'' und $(k\,l, k'\,l'')$ ist eine Erzeugungslinie des zweiten Systemes (§. 114). Durch den Mittelpunkt (a, m') werde jetzt $(o\,q, o'\,q'')$ parallel gezogen mit $(l\,k, l'\,k'')$, und $(q\,o, q'\,o'')$ parallel mit $(k\,l, k'\,l'')$. Nachdem (o, o') und (q, q''), so wie (o, o'') und (q, q') als Durchschnittspunkte der Parallelen mit den Ebenen der zwei Gränzkreise $i'\,k'$, $i''\,k''$ bestimmt worden, beachte man, daß, weil Parallele zwischen parallelen Ebenen gleiche Länge unter sich haben, und weil dies auch von ihren Projektionen gilt, nun $a\,o = a\,q = n\,l = n\,k$ geworden sein müssen. Es zeigt sich hieraus, daß die beiden Erzeugungslinien des Hyperboloides wie ihre gegenseitigen Parallelen gleiche Winkel bilden mit der Meridianebene $a\,n$ und mit der Rotationsaxe $(a, a'\,a'')$. — Giebt man sofort den zwei

Linienpaaren eine gleichzeitige Umdrehung um die Axe, so wird das erste Paar das Hyperboloid erzeugen und das zweite Paar eine Kegelfläche von der Beschaffenheit, daß einer jeden geraden Erzeugungslinie der einen Fläche eine Gerade der zweiten Fläche entspricht, welche zu ihr parallel liegt.

142. Wir behaupten nun, die Kegelfläche sei die asymptotische Fläche des Hyperboloides; denn man denke sich, die Erzeugungslinie $(l\,k, l'\,k'')$ sei bei der Umdrehung in die Stellung $(e\,f, g'\,h'')$ gekommen, wo sie der vertikalen Projektionsebene sowie der Hauptmeridianebene $i\,k$ parallel ist. In dieser Stellung wird $(g\,a\,h, g'\,m'\,h'')$ ihre Projektion in der Meridianebene sein und diese Projektion ist nach §. 117 III eine Asymptote der Hyperbel; sie ist aber auch eine gerade Erzeugungslinie der Kegelfläche, denn e muß sich in die Meridianebene nach g projiciren, m nach a, und g gehört nothwendig dem Kreise der Kegelfläche an, welcher von den Punkten o oder g beschrieben worden, womit obige Behauptung begründet ist.

143. Die asymptotische Kegelfläche in projektiver Weise zu bestimmen, bieten sich somit folgende Wege. War in Fig. *126* der Hauptmeridian $(i\,k, i'\,b'\,i''\,\ldots\,k'\,b''\,k''\,\ldots)$ gegeben und mit ihm der Kehlkreis der Fläche, so bestimmte man die Projektionen $(e\,f, g'\,h'')$ einer der beiden geraden Erzeugungslinien des Hyperboloides, welche zur vertikalen Projektionsebene parallel stehen. Die Projektion $g'\,h''$ war zugleich eine der Asymptoten des Hauptmeridianes. Indem man diese ansieht als in der Hauptmeridianebene liegend, muß sie in (g', g) die Horizontalebene durchschneiden und der aus a mit dem Radius $g\,a$ beschriebene Kreis ist die Grundlinie der Kegelfläche in der Ebene $i'\,k'$, oder auch die Projektion jenes ihrer Parallelkreise, welche in der Ebene $i''\,k''$ liegt. War dagegen von dem Hyperboloid die Axe $(a, a'\,a'')$ gegeben, nebst einer beliebigen geraden Erzeugungslinie $(l\,k, l'\,k'')$ und beider kürzeste Entfernung $(a\,n, m'\,n')$, so wird nur erfordert, durch (a, m') eine Parallele $(o\,a\,q, o'\,a'\,q'')$ mit der Erzeugungslinie zu legen, den Fußpunkt (o', o) der Parallelen zu konstruiren und mit dem Radius $a\,o$ den Kreis $g\,o\,q$ zu beschreiben. Grundlinie und Scheitel aber genügen, eine Kegelfläche jeder graphischen Arbeit zugängig zu machen.

144. Der Konstruktion zufolge steht $e\,g\,c$ senkrecht auf $i\,k$ und man kann dies $e\,g\,c$ als den Horizontalriß einer Ebene betrachten, in welcher die Erzeugungslinie $(e\,f, g'\,h'')$ liegt, $g'\,h''$ wäre dann die Vertikalprojektion der Ebene. Wird nach §. 117 III die Erzeugungslinie des zweiten Systems

gesucht, welche mit der ersten in der Ebene $g\,g'\,h''$ liegt, so findet sich $(c\,d, g'\,h'')$ als solche; die beiden Erzeugungslinien, wie gleichfalls aus der vollführten Konstruktion erhellet, haben parallele Horizontalprojektionen, sie sind also unter sich selbst und auch der Meridianebene $i\,k$ parallel. Weil aber $e\,g'$ in g Tangente sein muß an die Grundlinie $g\,o\,h$ der asymptotischen Kegelfläche, so ist die Ebene $g\,g'\,h''$ eine tangirende Ebene dieser Kegelfläche (§. 103) und berührt dieselbe längs der Erzeugungslinie $(g\,a\,h, g'\,m'\,h'')$. Somit ist dargethan, wie die Ebene $g\,g'\,h''$ das Hyperboloid nach zwei unter sich parallelen geraden Erzeugungslinien durchschneide, wie sie die asymptotische Kegelfläche nach einer dritten Parallelen berühre, und wie diese Berührungslinie Asymptote sei zu dem hyperbolischen Meridiane, in dessen Ebene die Berührungslinie liegt.

Diese Ergebnisse und Beziehungen gründen sich keineswegs auf irgend eine besondere Lage der Ebene $g\,g'\,h''$, sie würden vielmehr fortbestehen bei einer Rotation der Ebene und der drei in ihr liegenden Parallelen, und wir dürfen somit als allgemein giltigen Satz aussprechen: eine jede berührende Ebene an die asymptotische Kegelfläche des Umdrehungshyperboloides von einem Netze durchschneidet die letztere Fläche nach zwei geraden Erzeugungslinien, welche der Berührungslinie mit der Kegelfläche parallel sind.

145. Gleichwie von der Asymptote einer Hyperbel behauptet werden darf, sie sei eine Tangente der Linie, deren Berührungspunkt in unendlicher Entfernung liegt, also läßt sich auch von der im letzten Satze genannten tangirenden Ebene behaupten, sie berühre das Hyperboloid in unendlicher Entfernung; denn sie enthält hier den Berührungspunkt des hyperbolischen Meridianes mit seiner Asymptote, sie enthält diese Asymptote oder Tangente selbst, und steht endlich senkrecht auf der Meridianebene des Berührungspunktes, durch welche Merkmale die Eigenschaft einer tangirenden Ebene hinreichend dargethan wird. Wir dürfen somit im Allgemeinen sagen: jede tangirende Ebene der asymptotischen Kegelfläche eines Umdrehungshyperboloides ist auch eine asymptotische Ebene an das Hyperboloid selbst.

Anmerkung. In graphischer Beziehung haben wir bei Fig. *126* gehandelt, als seien Hyperboloid und asymptotische Kegelfläche gleichzeitig vorhanden.

146. Fig. *127*. In der Hauptmeridianebene $g\,h$ sei eine Hyperbel $i'\,s'\,k' \ldots i''\,s''\,k'' \ldots$ gegeben, deren wirkliche Axe $s'\,s''$ vertikal steht und

in ihrer Verlängerung als Rotationsaxe $(a, a' a'')$ dient. $g' h'', h' g''$ sind in derselben Ebene die Asymptoten der Hyperbel. Durch die Rotation der Figur entsteht einerseits das Umdrehungs-Hyperboloid von zwei Netzen oder nach anderm Namen das hyperbolische Conoid, andererseits entsteht die asymptotische Kegelfläche. Durch die horizontale Projektionsebene wird die Kegelfläche nach einem Kreise geschnitten, von welchem $g a$ ein Radius, und das Conoid wird nach einem Kreise geschnitten, welcher $i a$ oder $a k$ als Radius hat; als obere Begränzung beider Flächen nehmen wir zwei Parallelkreise, deren Radien paarweise jener der unteren Kreise gleich sind, und deren Horizontalprojektionen folglich mit den Erstgenannten in Eines zusammenfallen.

Aufgabe. Es soll die berührende Ebene an irgend einem Punkte der asymptotischen Kegelfläche konstruirt werden.

Nach §. 164 berührt diese Ebene die Kegelfläche längs einer geraden Erzeugungslinie und enthält die Tangenten aller Parallelkreise der Fläche an den Punkten, wo diese von der geraden Erzeugungslinie geschnitten werden.

Der Einfachheit willen sei (g, g') als Berührungspunkt der Kegelfläche und tangirenden Ebene gegeben. In dieser Ebene liegt einmal die Tangente des Kreises $g m h$ am Berührungspunkte g, die Senkrechte $g g'$ ist diese Tangente, und zugleich der Horizontalriß jeder Ebene, welche durch sie gelegt wird, also auch Horizontalriß der gesuchten Tangirenden. Diese Ebene geht ferner durch den Mittelpunkt (a, m') der Kegelfläche, daher ist $g' m' h''$ Vertikalriß der tangirenden Ebene und zugleich Vertikalprojektion derselben, weil die Ebene auf der Vertikalebene senkrecht steht (§. 22).

Ich sage nun, daß diese tangirende Ebene $g g' h''$ in unendlicher Entfernung auch das Conoid berühre, denn die hyperbolischen Aeste und die Asymptoten, welche in der Meridianebene liegen, berühren sich in unendlicher Entfernung; der Berührungspunkt gehört der Ebene $g g' h''$ an. Diese Ebene steht aber auch im Unendlichen immer noch senkrecht auf der Meridianebene $g h$, also berührt sie im Unendlichen auch das Conoid. Weil diese Beziehungen unverändert bleiben, wenn man die Meridianebene $g h$ nebst der Ebene $g g' h''$ und allen in ihnen liegenden Linien um die Axe rotiren läßt, so sind wir zu dem Aussprechen des allgemeinen Satzes berechtigt: Jede tangirende Ebene der asymptotischen Kegelfläche eines hyperbolischen Conoides berührt das Conoid selbst in unendlicher Entfernung, ist also eine asymptotische Ebene dieser Fläche.

Ringflächen (Annuloide).

147. Unter dieser Benennung fassen wir jene Flächenformen zusammen, welche erzeugt werden können durch die Rotation einer in sich geschlossenen Linie um eine Axe, die nicht zugleich Symmetrieaxe der Linie als solcher ist (vergl. die Erklärung §. 122).

Dreht ein Kreis sich um eine Axe, welche in seiner Ebene liegt, ohne den Umfang zu durchschneiden, dann entsteht dadurch die gewöhnliche runde Ringfläche, welche wir bereits im ersten Theile §. 90 besprochen.

Fig. 128. Fig. 129. Fig. 130.

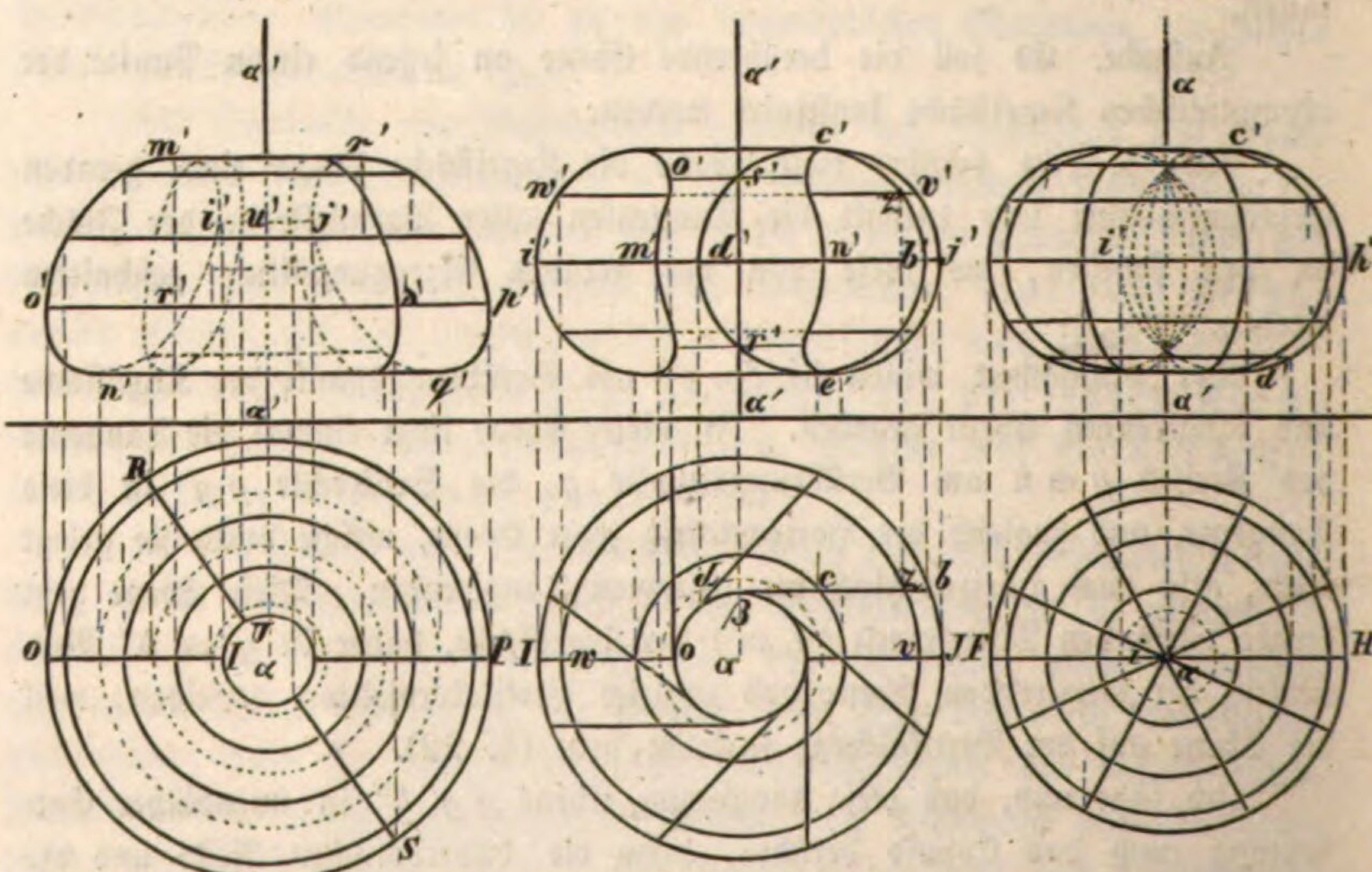


Fig. 128 $(\alpha, \alpha' \alpha'')$ sei die Rotationsaxe und O P die Hauptmeridianebene, in welcher eine Ellipse $(o' n' i' m', \text{O I})$ gegeben ist, schief gegen $\alpha' \alpha'$ gestellt und diese Gerade weder schneidend noch berührend. Durch die Rotation dieser Ellipse entsteht ein elliptisches Annuloid oder eine elliptische Ringfläche.

Nachdem an die Erzeugungsellipse zwei senkrechte Tangenten gezogen und die Berührungspunkte o', i' bestimmt werden *), so sind die Abstände

*) An eine Ellipse die Tangenten zu ziehen, welche einer bestimmten Richtung m (Fig. a) parallel sind, benimmt man sich praktisch in folgender Art: die

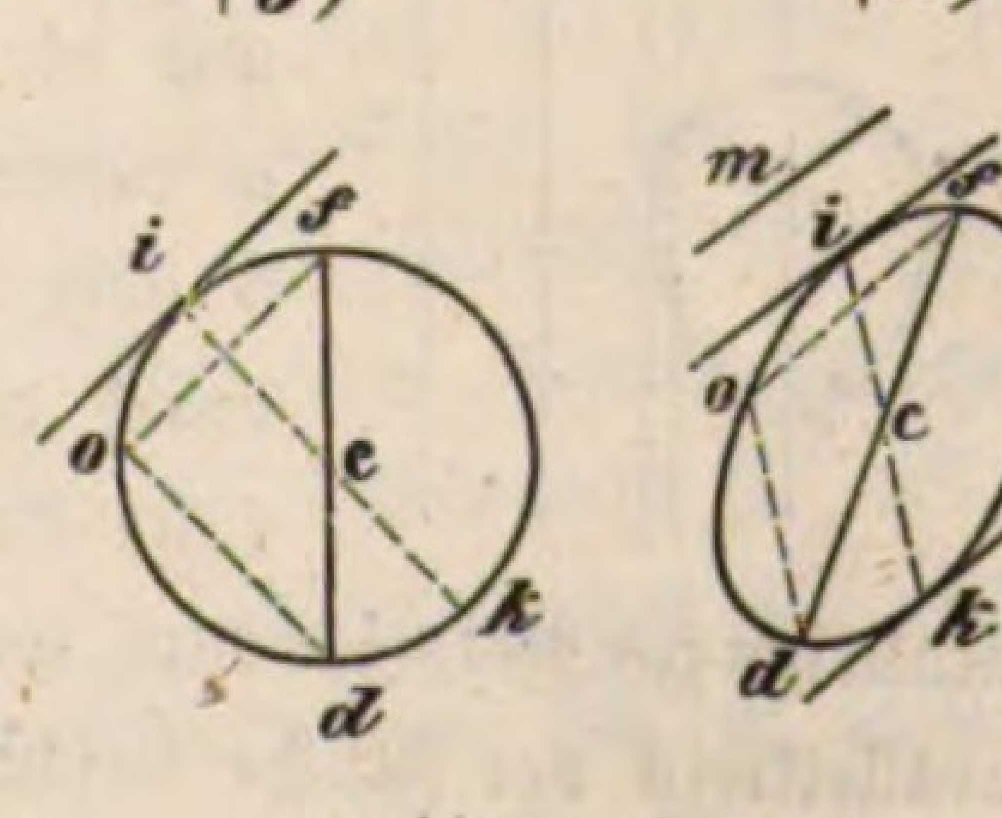
dieser Punkte von $\alpha' \alpha'$ gleich den Radien des größten und kleinsten Parallelkreises der Fläche, deren Horizontalprojektionen als umgränzende Konturen erschienen. Nach einer halben Umdrehung projicirt sich die erzeugende Ellipse nach $j' q' p' r'$ in symmetrischer Stellung zu $i' m' o' n'$. Zwei wagrechte Tangenten $n' q'$, $m' r'$ an beide Ellipsen vollenden den Kontur der Vertikalprojektion. Zur Vervollständigung wurden noch die Projektionen einiger Parallelkreise beigefügt, worunter wir den obersten und untersten namhaft machen. Der Durchmesser des ersten ist gleich dem Abstande der zwei Berührungspunkte m', r', welche, wie in der Anmerkung gelehrt, konstruirt werden können; der Durchmesser des untersten Parallelkreises ist gleich dem Abstande der zwei Berührungspunkte n', q' der Meridianellipsen und ihren unteren wagrechten Tangenten.

Die Projektion des Meridianes der beliebig angenommenen Ebene **R S** sieht man gleichfalls gezeichnet.

148. Zweites Annuloid, Fig. *129*. Ein vertikaler Kreis, dessen Ebene zur vertikalen Projektionsebene parallel steht, projicirt sich horizontal als die gerade Linie $d\,b$, welche zur Grundlinie parallel ist, und seine Vertikalprojektion ist der Kreis $c' d' e' j'$! Der Kreis dreht sich um eine vertikale Axe $(\alpha, \alpha' \alpha')$, welche nicht in seiner Ebene liegt. Durch die Rotation der Linie um diese Axe entsteht ein Annuloid, dessen Hauptmeridianschnitt (I J, $i' w' o' m' \ldots e' n' c' j' \ldots$) konstruirt werden soll. Dieser Schnitt wird wiederum gebildet aus der Reihe von Punkten, in welchen die einzelnen Parallelkreise der Fläche von der Ebene I J getroffen werden. Der von dem Punkte (z, z') z. B. beschriebene Kreis wird von der Ebene I J in (w, w') und (v, v') geschnitten. Unter den übrigen Parallelkreisen ziehe man zur Konstruktion vorzugsweise folgende bei:

Tangenten werden bei i und k mechanisch vermittelst Lineal und Winkelmaße gezogen, worauf die Berührungspunkte i, k zu bestimmen bleiben; hiezu benützt man irgend einen Durchmesser $d\,c\,f$, zieht $f\,o$ parallel zu m, verbindet o mit d und zieht den Durchmesser $i\,c\,k$ parallel mit $o\,d$. Für den Kreis Fig. (b) ist die Richtigkeit dieser Vorschrift einleuchtend, sobald man nur erwägt, daß der Winkel $d\,o\,f$ ein rechter sei. Denkt man sich den Kreis jedoch in eine Ebene projicirt, daß er dabei zur Ellipse wird, so bleiben $i\,k$ und $d\,f$ noch Durchmesser der Linie; $o\,f$ bleibt der Tangente, und $i\,k$ der Sehne $o\,d$ parallel.

(b) (α)



1. jene, welche von dem obersten Punkte (c', e') oder dem untersten (e', c) beschrieben werden.

2. jene, welche durch die Enden (b', b), (d', d) des wagrechten Durchmessers gehen. Der erste ist der größte aller Parallelkreise. Der andere bildet eine innere Gränzlinie der Horizontalprojektion und erscheint hier als punktirte Linie.

3. lege man durch die Rotationsaxe eine Ebene $\alpha\ \beta\ \alpha'$, welche auf der Kreisebene $b\ d$ senkrecht steht und welche den Kreisumfang in zwei Punkten (r', β), (s', β) schneidet; die Parallelkreise, welche von diesen Punkten beschrieben werden, sind die kleinsten und bilden in ihrer gemeinsamen Horizontalprojektion $\beta\ o$ . . eine dritte Gränzlinie des Annuloides. Das Stück $\beta\ d$ der Projektion $b\ d$ des Erzeugungskreises zwischen dem Berührungspunkte β und dem Endpunkte d mußte als nicht sichtbar punktirt werden.

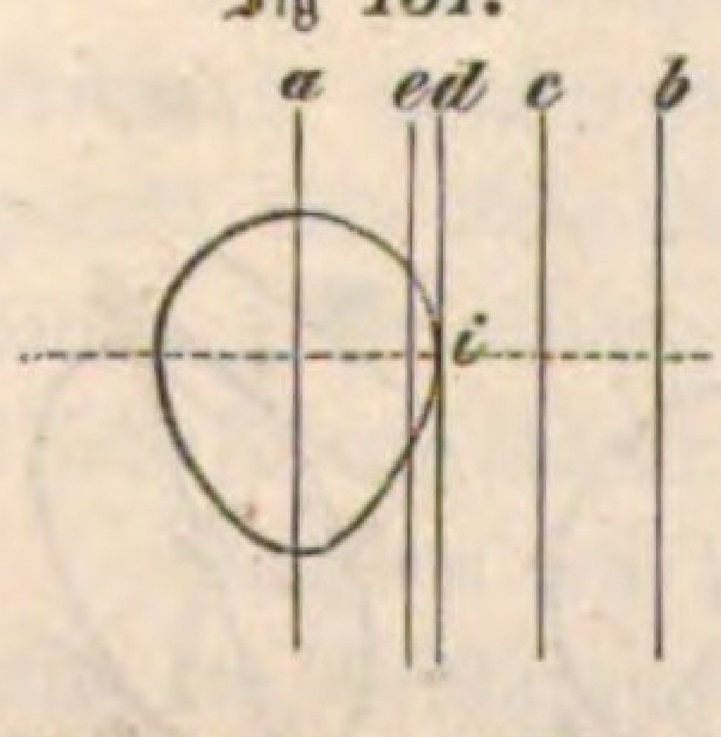
Die Vertikalprojektion wurde im Uebrigen so behandelt, als ob hier die vordere Hälfte des Annuloides hinweggeschnitten wäre.

Der Horizontalprojektion hat man die Angabe einer Reihe von Kreis-Erzeugungslinien beigegeben, sie stellen sich sämmtlich dar als Tangenten an den Kreis vom Radius $\alpha\ \beta$ und sind durch die beiden Kreise vom Radius $\alpha\ b$ und $\alpha\ d$ begränzt. Ihre Stücke zwischen diesem letzteren und dem kleinsten Kreise wurden punktirt.

Melonoide.

149. Sicherlich besteht ein Merkmal der Ringform darin, daß zwischen der Axe und der Fläche noch ein leerer Raum sich befinde, oder, um richtiger geometrisch zu sprechen, daß wenn der kleinste Kreis der Fläche genommen wird als Grundlinie einer Cylinderfläche von gleicher Rotationsaxe wie die Ringfläche, kein Punkt derselben innerhalb dieses Cylinders liege. Zur Uebersicht des Folgenden diene die Fig. 131. Hier sei eine geschlossene krumme Linie gegeben und a ihre Symmetrieaxe, b, c, d, e seien verschiedene Parallelen zu dieser Axe in derselben Ebene wie die krumme Linie. Läßt man diese um ihre Axe a rotiren, so erzeugt sie ein Sphäroid. Wird dagegen b oder c als Rotationsaxe genommen, dann entsteht durch die Umdrehung der krummen Linie ein Annuloid. i sei der Berührungspunkt der Erzeugungslinie mit einer Parallelen zur Rotationsaxe, welche dieser am nächsten liegt; das i wird den kleinsten Parallelkreis der Fläche beschreiben und kein Punkt derselben kann innerhalb der Cylinderfläche liegen, von welcher die Tangente $d\ i$ eine gerade Erzeugungslinie.

Fig 131.



Nimmt man aber eine Rotationsaxe an, welche zwischen d und a liegt, so ist die entstehende Umdrehungsfläche weder den Ringen noch den Sphäroiden beizuzählen, sie bildet vielmehr den Uebergang der einen Art zur andern, und wir legen ihnen die Benennung Melonoide, apfelförmige Umdrehungsflächen, bei.

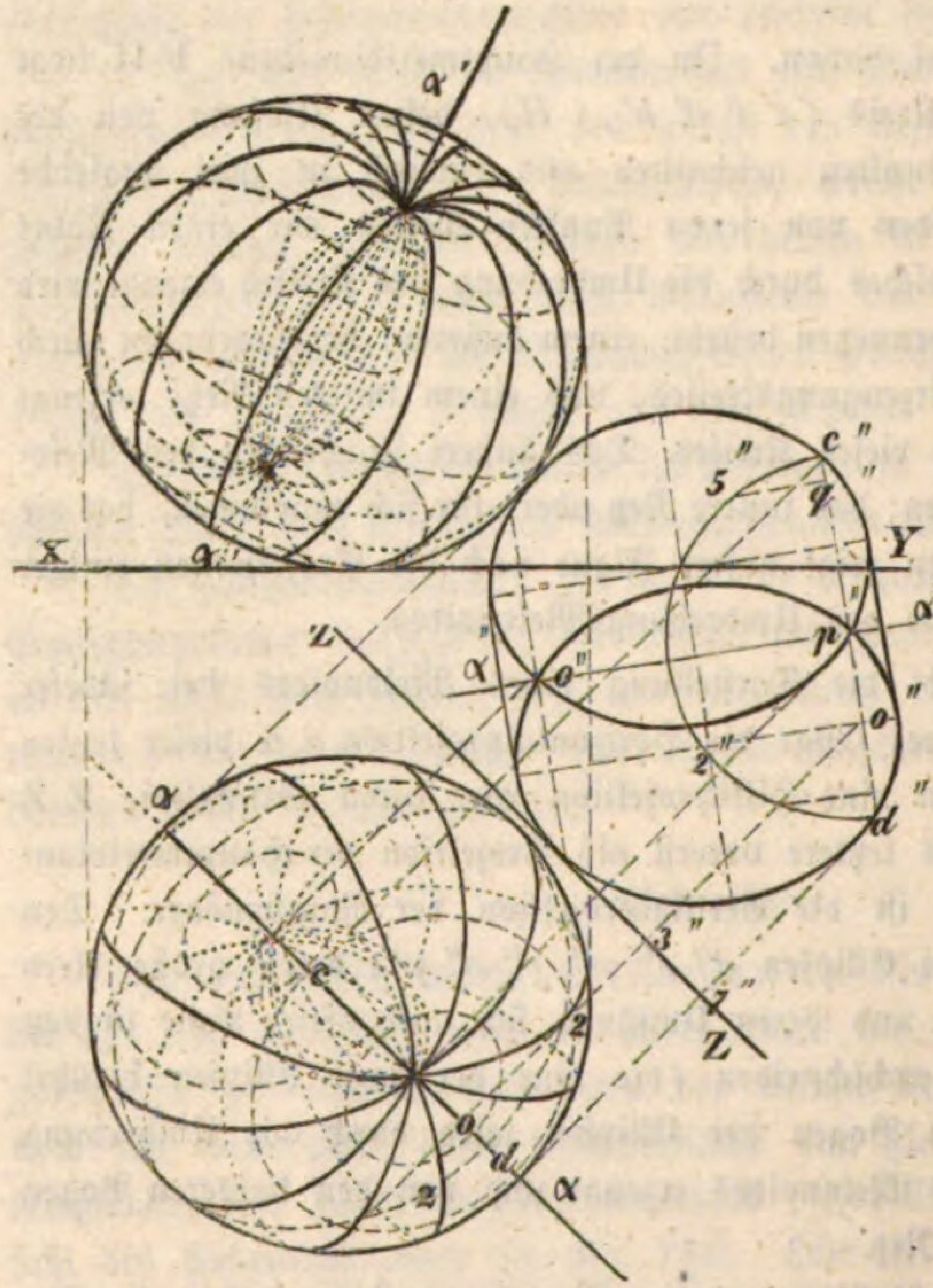
Fig. *130* ein Beispiel davon. In der Hauptmeridianebene F H liegt als Erzeugungslinie ein Kreis $(c'\ i'\ d'\ h',\ i\ H)$, dessen Umfang von der Rotationsaxe α in zwei Punkten geschnitten und dadurch in zwei ungleiche Bogen getheilt wird. Jeden von jenen Punkten wollen wir einen Nabel des Melonoides nennen, welches durch die Umdrehung des Kreises erzeugt wird und welches aus zwei Flächennetzen besteht, einem äußeren, hervorgebracht durch den größeren Bogen des Erzeugungskreises, und einem inneren Netze, erzeugt durch den kleineren Bogen dieses Kreises. Das äußere Flächennetz des Melonoides ähnelt den Ringflächen; das innere Netz aber, für sich genommen, hat die Spindelform. Im Uebrigen zeigt unsere Figur noch die Projektionen einiger Parallelkreise und Meridiane des Umdrehungs-Melonoides.

150. Fig. *131* giebt die Darstellung eines Melonoides bei schiefer Stellung seiner Rotationsaxe. War die Horizontalprojektion $\alpha\ \alpha$ dieser letzten angenommen, ordnete man eine Hilfsprojektion an, deren Grundlinie Z Z parallel stand zu $\alpha\ \alpha$, dies letztere vorerst als Projektion der Hauptmeridianebene betrachtend. $\alpha''\ \alpha''$ ist die Vertikalprojektion der Rotationsaxe. Den Hauptmeridian bilden zwei Ellipsen $d''\ o''\ p''$, $c''\ o''\ p''$, deren große Axen zu $\alpha''\ \alpha''$ parallel liegen, und deren Umfänge sich auf dieser Linie in den beiden Punkten o'', p'' durchschneiden (die eine der zwei Ellipsen berührt Z Z). Von den größeren Bogen der Ellipsen wird durch die Umdrehung das äußere Flächennetz des Melonoides erzeugt und von den kleineren Bogen das innere spindelförmige Netz.

Ueber die schließliche Ausführung der Figur noch Folgendes: alle Parallelkreise der Fläche stellen sich in der Hilfsprojektion als gerade Linien dar, welche wie $c''\ d''$ auf $\alpha''\ \alpha''$ senkrecht stehen. Man hat die Hälfte des Parallelkreises bei $d''\ 2''\ 5''\ c''$ auf die Hilfsebene umgeklappt, den Umfang von d aus in 6 gleiche Theile zerlegt und aus den Theilpunkten die Senkrechten $2''\ o''$, $5''\ q''$ . . . auf $c''\ d''$ gefällt. Nach dem Wiederaufrichten des Parallelkreises mußten o'', q'' 2c. die Projektionen der Theilpunkte $2''$, $5''$ 2c. sein. Weil dabei die Ordinaten $2''\ o''$, $5''\ q''$ . . 2c. senkrecht gegen die Bildfläche Z Z, also horizontal zu stehen kamen, projicirten sie sich in wahrer Größe auf die Horizontalebene. Man projicirte daher die Punkte d'', o'' . . 2c.

auf $\alpha\,\alpha$ nach $d, o \ldots$ 2c., trug die Ordinaten $2''\,o''$ 2c. von o nach 2 und 2 2c. und $d\,2\,c\,2$ war die Horizontalprojektion desselben Parallelkreises, wovon $c''\,d''$ die vertikale Hilfsprojektion. Ferner sind $7''\,d''$, $3''\,o''$ 2c. die Höhen der einzelnen Punkte dieses Kreises, aus deren Kenntniß sich dann die gewöhnliche Vertikalprojektion über der Grundlinie XY ableitet. Hat man in solcher Weise die Projektionen aller angenommenen Parallelkreise verzeichnet, sie alle vom Hauptmeridian $\alpha\,\alpha$ aus in dieselbe Zahl gleicher Theile getheilt und alle Theilpunkte von demselben Meridian aus gleichmäßig beziffert, dann gehören alle Punkte 1, 1, 1 .... und 1′, 1′, 1′ .... sowie 2, 2, 2 .... und 2′, 2′, 2′ .... 2c. 2c. Ellipsen an, und dies sind die Projektionen derjenigen Meridiane, welche durch die angenommenen Theilpunkte der Parallelkreise gehen. Die Konturen einer jeden Projektion oder Ansicht sind nun solche Linien, welche die Projektionen der Meridiane und Parallelkreise umhüllen. Sie bestehen aus einem sichtbaren Kontur des äußeren Flächennetzes und aus einem nicht sichtbaren Kontur des innern Netzes.

Fig. 132.

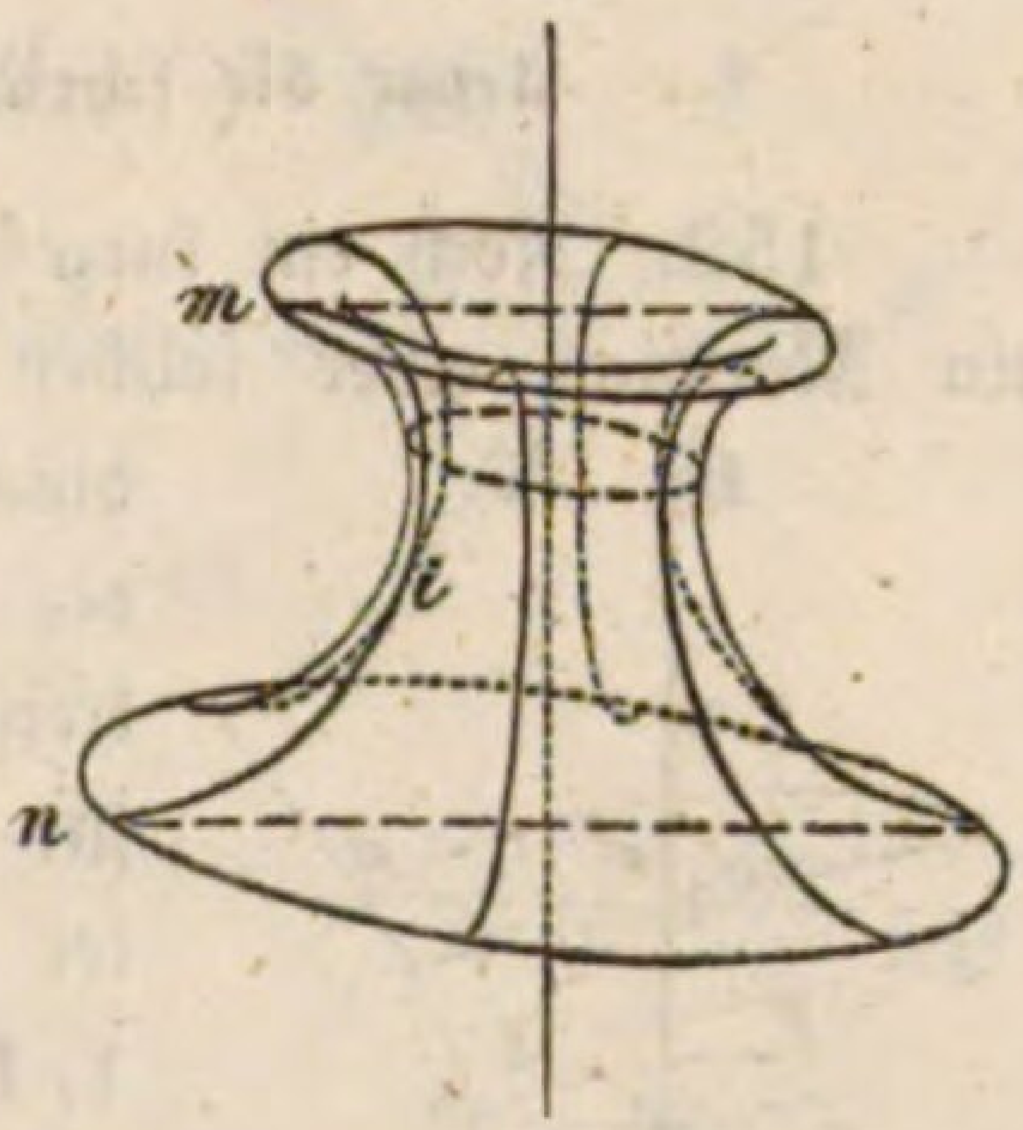


Einige Zusätze.

151. Flächen von unendlicher Ausdehnung, wie Kegel und Conoide, können als physische Oberflächen von Körpern begreiflich nur stück- oder theilweise vorkommen, aber auch die geschlossenen Flächenformen treten in der

äußern Welt seltener als ein Ganzes auf, denn als Theile oder Bruchstücke: man trifft weit häufiger Stücke von Sphäroiden als völlig geschlossene Oberflächen dieser Art. Wenigen unserer Leser mag der elliptische Ring Fig. *128* als körperliche Oberfläche vorgekommen sein. Aber nehmen sie eine halbe Ellipse *m i n*, Fig. *133* (in schräger Projektion gezeichnet), welche in vertikaler Ebene so liegt, daß die Tangenten ihrer Endpunkte *m*, *n* horizontal sind, und lassen sie diese um eine vertikale Axe drehen, so bringen sie die Oberfläche der Einziehung an einem Bilder- oder Säulenfuß hervor, eine allbekannte Form, welche nichts Weiteres ist als die innere Hälfte eines elliptischen Annuloides.

Fig. *133*.



152. Die Oberfläche einer Spinn-Spindel ist erzeugt durch die Umdrehung eines Kreisbogens $\alpha\,\beta\,\alpha$ Fig. *134* (schräge Projektion), um seine Sehne $\alpha\,\alpha$ als Rotationsaxe. Daß diese Oberfläche dem inneren Netze eines Melonoides angehöre, ist uns bekannt.

Man kennt die eigenthümlichen Hängezapfen (pendentifs) der englisch-gothischen Rippengewölbe; ihre Oberfläche ist zu betrachten als erzeugt durch

Fig. *135*.

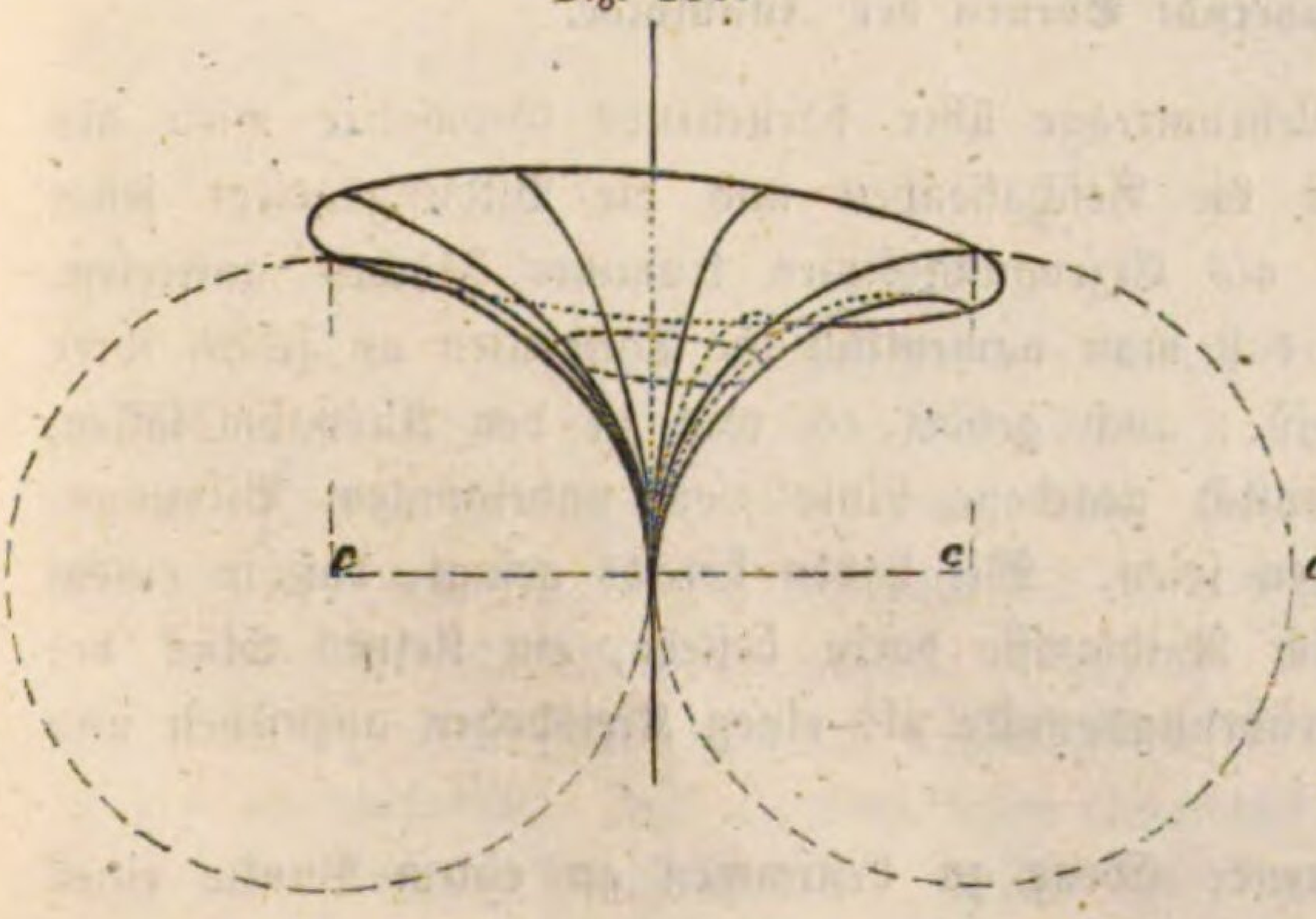
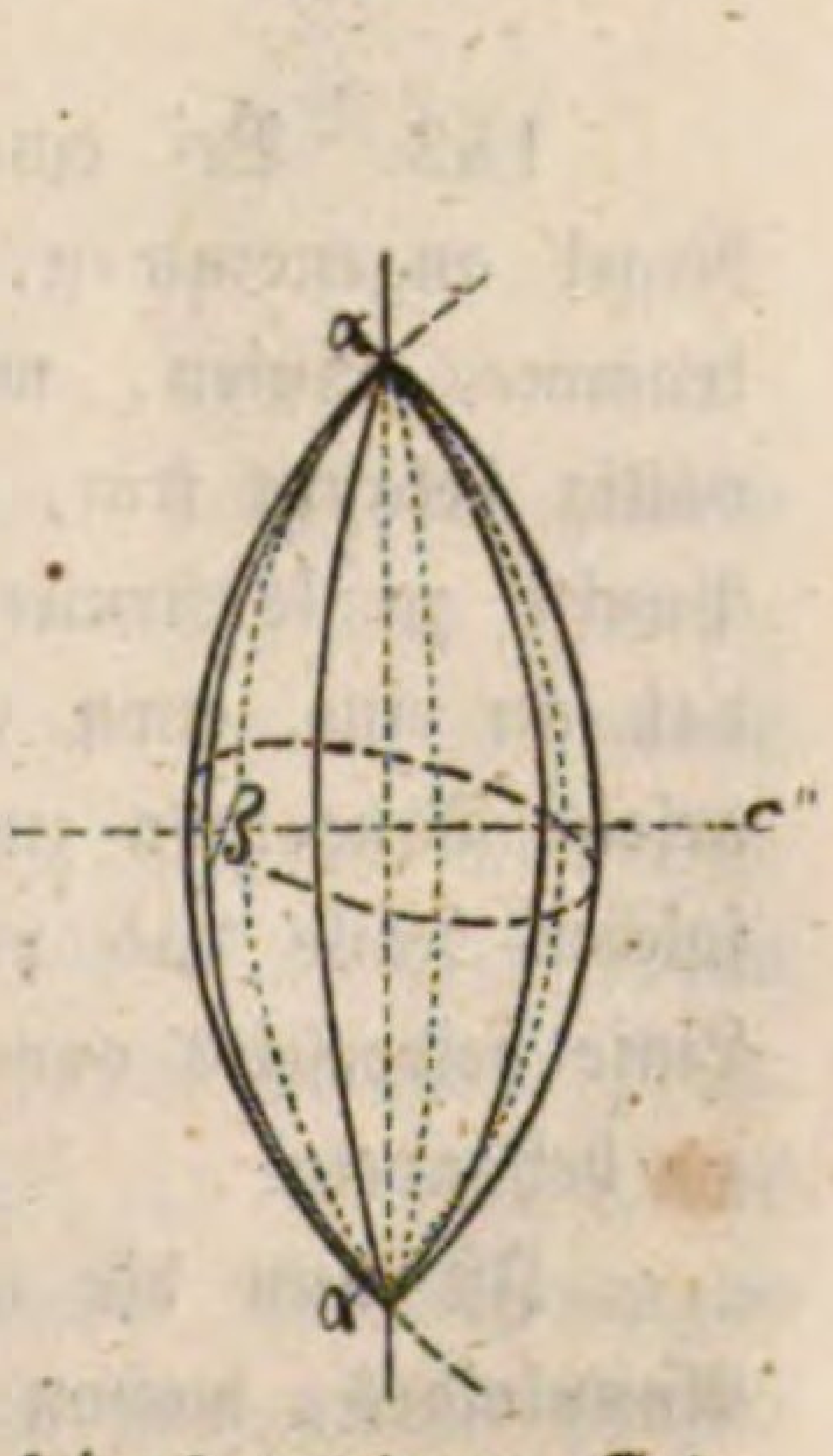


Fig. *134*.



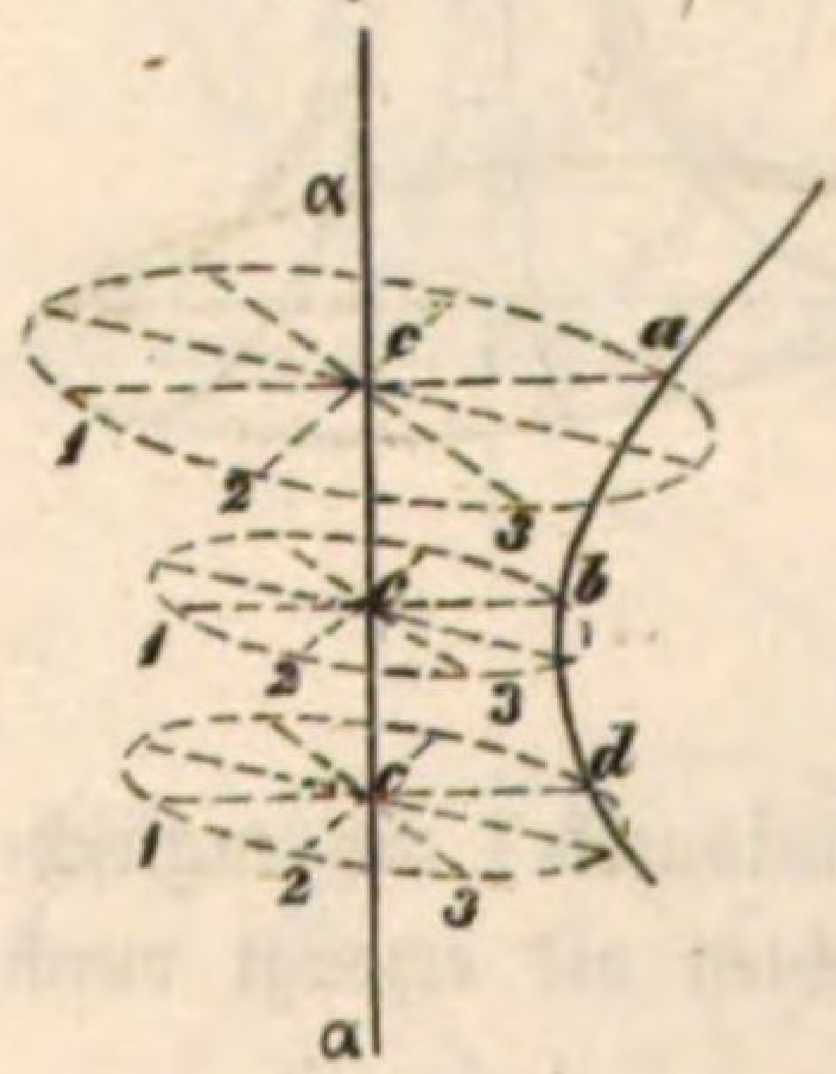
die Rotation eines Viertelskreises um die Tangente seines unteren Endpunktes, Fig. *122*. Diese Flächenform wird in manchen architektonischen Büchern ein Conoid genannt. Aber man verlängere den Viertelskreis zum

vollen Umfange und lasse diesen um die vertikale Tangente rotiren; dann wird sogleich erkannt werden, wie durch diese Rotation eine Fläche erzeugt de, welche die Gränze oder den Uebergang bildet von Melonoiden und Annuloiden. Als sprachüblich mag man die Benennung Conoid für die fragliche Form allenfalls gelten lassen, wissenschaftlich zu rechtfertigen ist sie aber nicht.

Ueber die schräge Projektion von Umdrehungsflächen.

152. Noch ein kurzes Wort: $\alpha\alpha$, Fig. *136*, sei die Axe und *a b d* . . . ein Meridian einer solchen Fläche. Aus verschiedenen Punkten des Meridianes fällt man Perpendikel *a c*, *b c*, *d c* . . . auf die Axe; ein jeder ist der Radius eines Parallelkreises, dessen schräge Projektion man zeichnet, indem für den Umfang stets dieselbe Anzahl gleich entfernter Punkte 1. 2. 3 . . . konstruirt wird. Alle Punkte 1, 1, 1 . . . 2, 2, 2 . . . 3, 3, 3 . . . gehören je einem Meridian der Fläche an, deren Kontur eine umhüllende Linie ist an die Projektionen sämmtlicher Meridiane und Parallelkreise.

Fig. *136*.



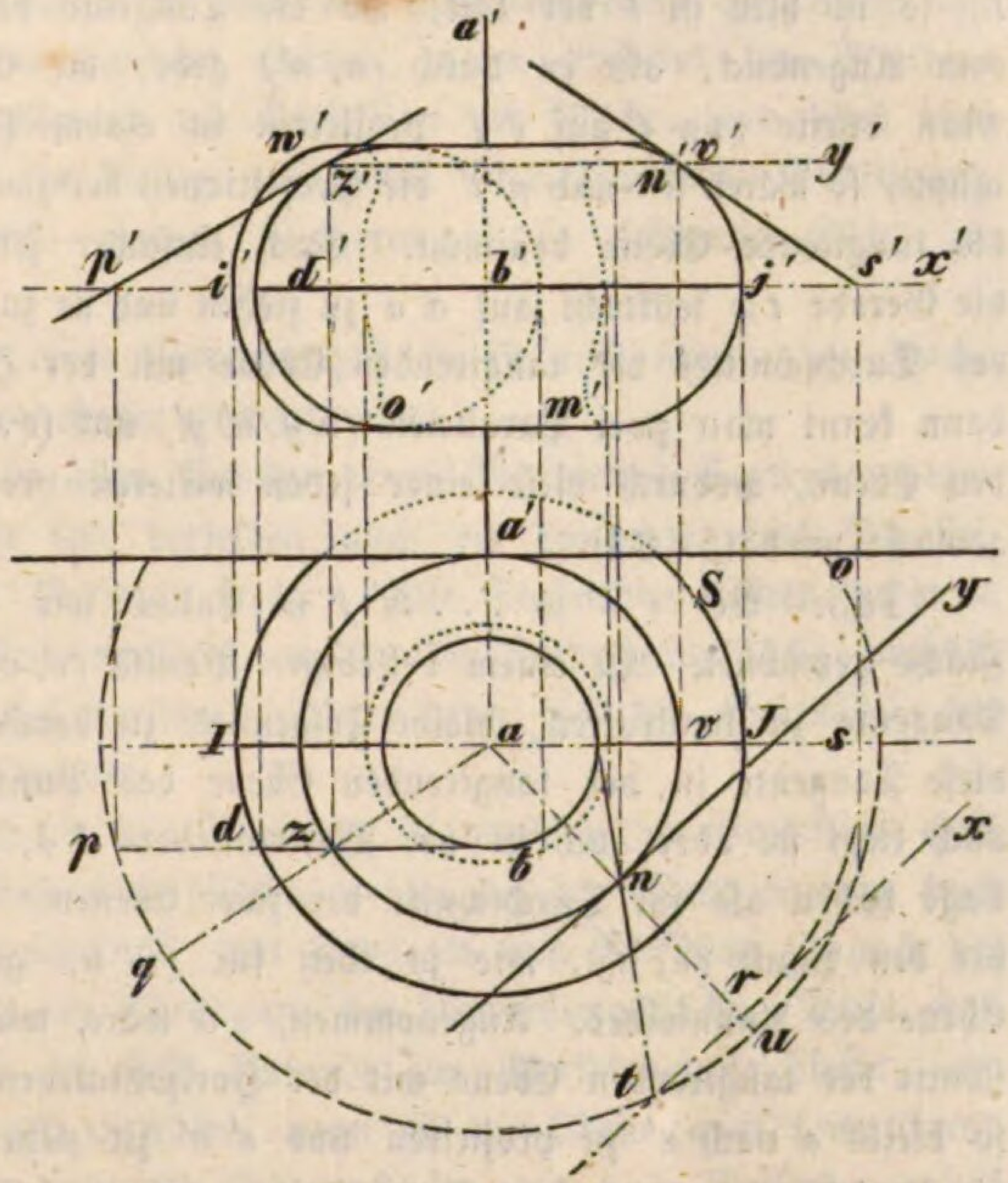
Berührende Ebenen der Annuloide.

153. Bei einem Lehrvortrage über darstellende Geometrie wird als Regel angenommen, daß die Beschaffenheit und die Bildungsgesetze jener krummen Linien, welche als Erzeugungslinien krummer Flächen auftreten, völlig bekannt sein, und daß man namentlich die Tangenten an jedem ihrer Punkte zu konstruiren wisse; auch gehört es rein zu den Ausnahmsfällen, daß an eine etwa mechanisch gegebene Linie von unbekanntem Bildungsgesetze Tangenten zu ziehen seien. Wir haben bereits gesagt, daß in einem solchen Falle das praktisch Rathsamste darin bestehe, ein kleines Stück der Linie beiderseits vom Berührungspunkte als einen Kreisbogen anzusehen und zu behandeln.

Ist nun die tangirende Ebene zu bestimmen an einem Punkte eines Annuloides, wovon ein Meridian und die Axe gegeben sind, so kann die allgemeine Methode des §. 127 und die Art, wie sie in Fig. *122* auf ein Sphäroid angewendet worden, hier gleichfalls und fast buchstäblich wiederholt werden. — Etwas anders aber tritt die Frage auf, wenn die Erzeugungs-

linie des Annuloides nicht ein Meridian der Fläche ist, wie die Fig. 129, Seite 222, einen Fall behandelt. Wir wollen die Aufgabe der tangirenden Ebene bezüglich auf diese Fläche behandeln und stützen uns dabei auf die Erklärungen von §. 148.

Fig. 137.



Der Kreis $(d' z' b', d b)$, welcher zur vertikalen Projektionsebene parallel steht, ohne in der Hauptmeridianebene zu liegen, dreht sich um die Axe $(a, a' a')$; ein Punkt (z, z') des Kreises beschreibt bei der Rotation den Parallelkreis $(z n v, z' v')$. Auf diesem Parallelkreise ist ein Punkt (n, n') des Annuloides gegeben, in welchem die berührende Ebene verlangt wird.

154. Konstruktion. Die Tangente $(n y, n' y')$ des Parallelkreises ist eine erste Gerade in der tangirenden Ebene.

Während der Erzeugungskreis bei seiner Rotation durch den Punkt (n, n') geht, fixire man ihn in dieser Stellung und ziehe an seinen Umfang in (n, n') die Tangente. Dies wird eine zweite Gerade der berührenden Ebene sein, und setzt, in Verbindung mit der ersten, die Lage der Ebene fest.

Zur Konstruktion der zweiten Tangente kann der Erzeugungskreis $(d' c' b', d b)$ verwendet werden. Man ziehe in (z, z') die Tangente $(z p, z' p')$ an denselben, und markire deren Durchschnitt (p', p) mit der Ebene $i' j'$ des größten Parallelkreises, welche wir, weitgehende Verlängerungen unserer Linien zu vermeiden, für einen Augenblick als horizontale Projektionsebenen betrachten. Nachdem durch (z, z') und durch (n, n') die Meridianebenen $a z q$, $a b u$ gelegt worden, lasse man den Kreis $(d b, d' z' b')$ um die Axe rotiren, bis sein Punkt (z, z') in (n, n') angekommen ist, indem

zugleich die Tangente $(z\,p, z'\,p')$ mit herum geführt wird. Dabei muß diese Linie ihre Lage gegen die rotirende Meridianebene $\alpha\,z$ unverändert beibehalten und $(p'\,p')$ wird in der Ebene $i'\,j'$ einen Kreisbogen $p\,q\,t$ gleich $q\,t\,u$ beschreiben. Das Bogenmaß $p\,q$ trage man deßhalb von u nach t, so ist hier in t der Ort, wo die Tangente des Erzeugungskreises, in dem Augenblick, als er durch (n, n') geht, die Ebene $i'\,j'$ durchschneidet. Man dürfte nun t auf $i'\,j'$ projiciren in einem Punkte, welcher t' heißen müßte, so wären $n\,t$ und $n'\,t'$ die Projektionen der zweiten Tangente und damit die tangirende Ebene bestimmt. Noch einfacher jedoch erscheint es, durch t die Gerade $t\,x$ senkrecht auf $a\,u$ zu ziehen und sie zu betrachten als Projektion des Durchschnittes der tangirenden Ebene mit der Horizontalebene $i'\,j'$; alsdann kennt man zwei Parallelen $(n\,y, n'\,y')$ und $(t\,x, i'\,x')$ in der tangirenden Ebene, wodurch diese einer jeden weiteren projektiven Arbeit zugängig gemacht wird (§. 23).

155. Bei $i'\,o'\,w' \ldots m'\,j'\,v'$ haben wir den Hauptmeridian der Fläche gezeichnet. An einem beliebigen Punkte (v, v') dieses Meridianes die Tangente zu konstruiren, bleibt Folgendes zu beachten. Nach §. 100 liegt diese Tangente in der tangirenden Ebene des Punktes (v, v'); ihrer Natur nach liegt sie aber auch in der Meridianebene I J, kann daher keine andere Lage haben als im Durchschnitt der zwei Ebenen. Man konstruire deßhalb für den Punkt (v, v'), wie so eben für (n, n) geschehen, die tangirende Ebene des Annuloides. Angenommen, $s\,o$ wäre, wie vorher $t\,x$, als Durchschnitt der tangirenden Ebene mit der Horizontalebene $i'\,j'$ gefunden worden, so bleibt s nach s' zu projiciren und $s'\,v'$ zu ziehen. Denn dies $s'\,v'$ ist die Projektion des gesuchten Durchschnittes der zwei Ebenen, also die Tangente des Meridianes im Punkte (v, v').

Insoferne (v, v') auf einem und demselben Parallelkreise liegt mit dem Punkte (n, n'), für welchen der Horizontalriß $t\,x$ der berührenden Ebene schon bestimmt worden, so genügte es, um den Riß $s\,o$ zu finden, lediglich den Abstand $a\,r$ nach $a\,s$ zu tragen 2c., weil bei einer gleichzeitigen Rotation der Meridianebene $a\,n$ und der tangirenden Ebene des Punktes (n, n') der Fußpunkt r nothwendig einen horizontalen Kreisbogen $r\,s$ beschreiben muß. —

156. Die tangirende Ebene des Punktes (v, v') steht gleich jeder andern tangirenden Ebene der Umdrehungsfläche senkrecht auf der Meridianebene des Berührungspunktes, deßhalb ist $s'\,v'$ auch die Vertikalprojektion der ganzen Ebene und so kann ebenmäßig eine jede andere Tangente des Meri-

dianes $v' j' m \ldots o' i' w'$ betrachtet werden als die Projektion einer berührenden Ebene, welche senkrecht steht auf der Meridianebene I J. Der Berührungspunkt v' einer jeden solcher Tangenten ist zugleich die Projektion der Tangente $v\,o$ des Parallelkreises, welcher dem Punkte (v, v') entspricht. Nun kann aber jede Meridianebene auch als Projektionsebene genommen und die Fläche auf diese Ebene projicirt werden, dann erscheint der Meridian dieser Ebene zugleich als Kontur der Projektion der Fläche, und alles eben Gesagte findet wiederum in Bezug auf diesen Meridian seine Bestätigung. Wir wollen solches nebst einigen Folgerungen in folgende Sätze zusammenfassen.

I. Jeder Meridian einer Umdrehungsfläche ist auch Kontur der Fläche, wenn diese in die Meridianebene projicirt wird.

II. Errichtet man in allen Punkten eines Meridianes Senkrechte gegen die Meridianebene, so ist jede derselben auch die Tangente eines Parallelkreises da, wo dieser den Meridian kreuzt. Alle Senkrechten bilden daher in ihrer Gesammtheit eine Cylinderfläche, welche die Umdrehungsfläche umhüllt und längs des Meridianes berührt. Dieser kann als die Grundlinie der Cylinderfläche genommen werden.

III. Jede Tangente an den Meridian ist zugleich die Projektion einer tangirenden Ebene der Umdrehungsfläche, welche auf der Meridianebene senkrecht steht. Der Berührungspunkt von Tangente und Meridian ist auch der Berührungspunkt zwischen der Ebene und der Umdrehungsfläche. Dreht man die Ebene der Art, daß sie stets senkrecht zur Meridianebene bleibt, und stets tangirend zur Umdrehungsfläche, dann ist die Ebene auch fortwährend tangirend an die vorhin genannte Cylinderfläche und nach Vollendung des Umdrehens wird der Berührungspunkt den Umfang des Meridianes durchlaufen haben.

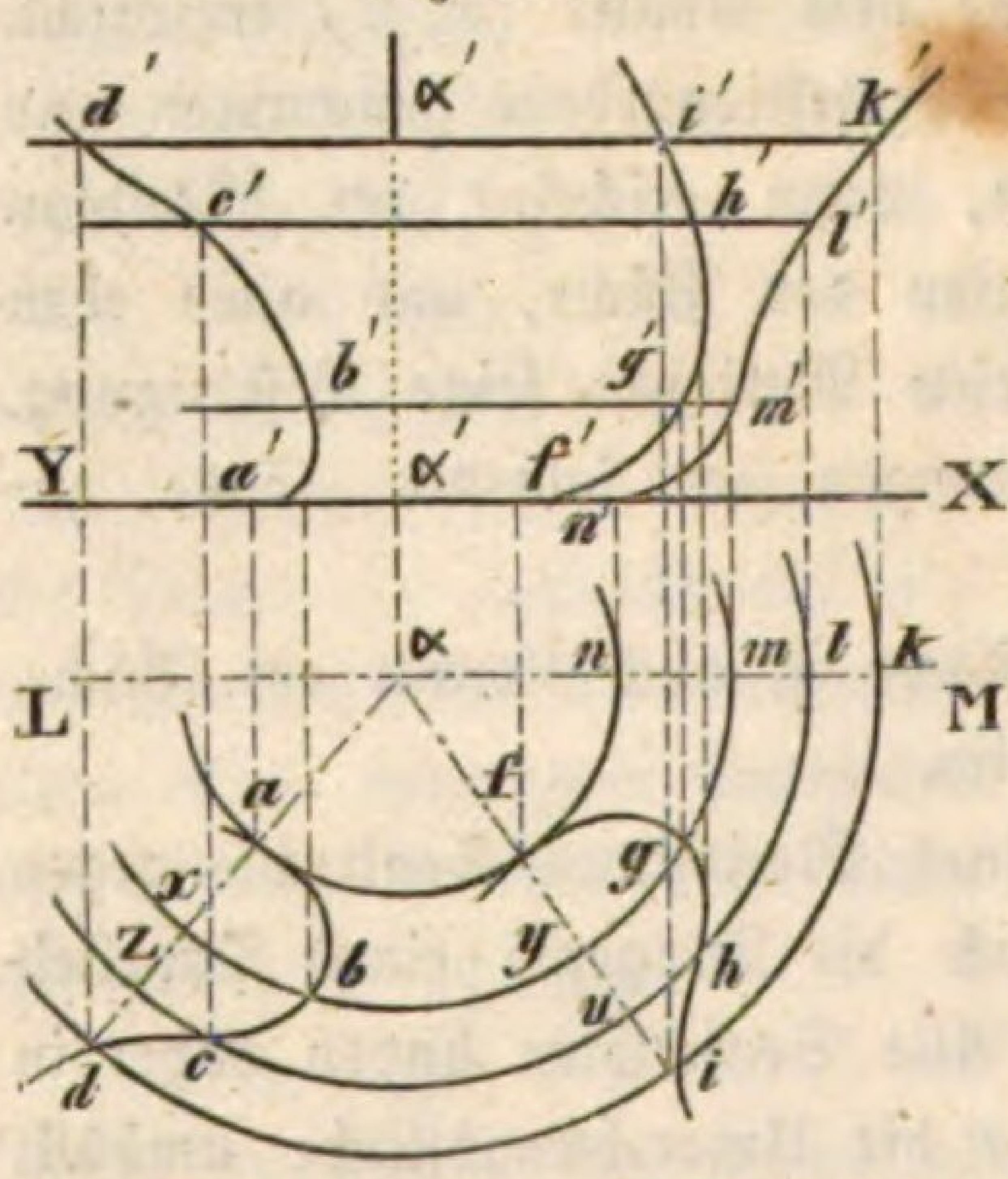
Allgemeine Umdrehungsflächen.

157. Dieser Klasse zählen wir jene Flächen bei, deren Erzeugung an keinerlei besondere Bedingung geknüpft ist, weder in Bezug auf die Gestalt der Erzeugungslinie noch hinsichtlich deren Stellung gegen die Rotationsaxe.

Erstes Beispiel. Fig. *138.* $(a\,b\,c\,d,\ a'\,b'\,c'\,d' \ldots)$ sei eine beliebige krumme Linie, welche um die vertikale Axe $(\alpha, \alpha'\,\alpha')$ rotirt. Der Punkt (a, a') beschreibt in der Horizontalebene einen Kreis $(a\,f\,n,$ X Y); man verlangt die Projektionen $f\,g\,h\,i,\ f'\,g'\,h'\,i'$ der Erzeugungslinie in der Stellung, welche sie bei ihrem Durchgange durch den Punkt (f, f') des ge-

nannten horizontalen Kreises einnimmt. — Durch (a, a') und (f, f') lege man zwei Meridianebenen, deren Projektionen die Radien $\alpha\, a\, d$, $\alpha\, f\, i$ sein werden; man beschreibe die Kreise, welche von verschiedenen Punkten (b, b'), (c, c') ꝛc. der Erzeugungslinie durchlaufen werden. Nachdem dies in beiden Projektionen geschehen, trage man die Bogenlänge $x\, b$ von y nach g; den Bogen $z\, c$ von u nach h ꝛc., so sind g, h, i ꝛc. Punkte der Horizontalprojektion. Ihre Vertikalprojektionen werden in g', h', i' ꝛc. auf den zugehörigen Horizontalen $b'\, m'$, $c'\, l'$, $d'\, k'$ ꝛc. liegen.

Fig. 138.



Man verlangt zweitens den Hauptmeridianschnitt. Wie stets, wird dieser Schnitt gebildet durch die Reihe von Punkten (k, k'), (l, l'), (m, m') ꝛc., in welcher die Meridianebene M L und die verschiedenen Parallelkreise sich begegnen.

158. Die tangirende Ebene an irgend einem Punkte der vorliegenden Umdrehungsfläche zu konstruiren, müßte man das Gesetz der Erzeugungslinie $(a\, b\, c \ldots, a'\, b'\, c' \ldots)$ kennen, um danach die Tangente an jedem Punkte derselben zu bestimmen. Dies soll an Fig. 139 erläutert werden.

Fig. 139.

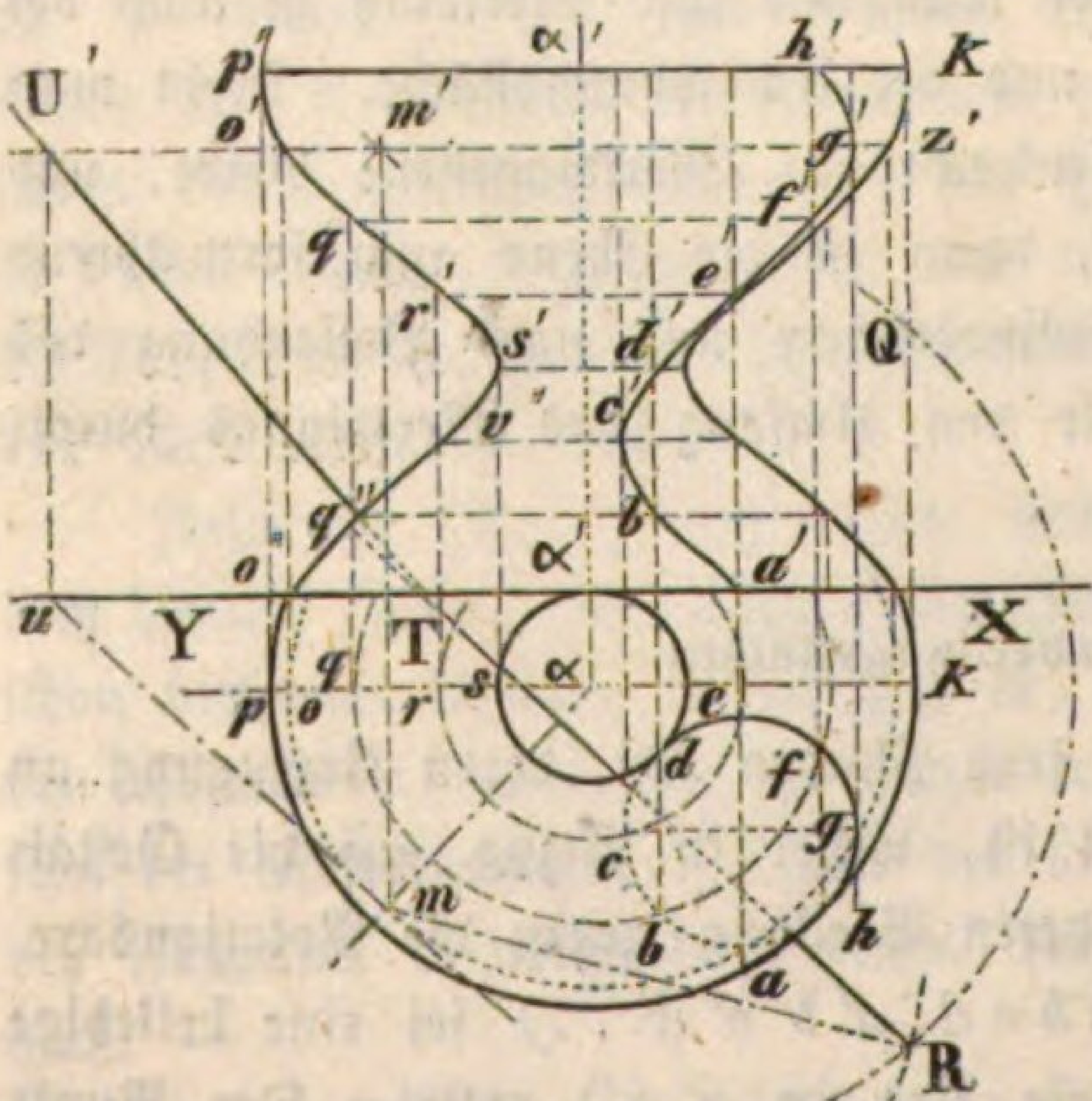


Fig. 139. Eine Schraubenlinie mit vertikaler Axe hat als Horizontalprojektion den Kreis $a\, b\, c\, d \ldots$ und als Vertikalprojektion die Linie $a'\, b'\, c' \ldots h'$ (I. Th., §. 106). Der Kreis ward in acht gleiche Theile zerlegt und durch jeden Theilpunkt dachte man sich eine vertikale Linie. Die Vertikalprojektionen derselben sind $h\, h'$, $g\, g'$ .. ꝛc. Nach (a, a') verlegte man den Fußpunkt oder Ursprung der Schraubenlinie und $^7/_8$ eines Umganges wurden als Ausdehnung derselben festgesetzt; daher h die Horizontalprojektion ihres oberen Endpunktes. Zwischen X Y und der Wagerechten $k'\, p'$ zog man in gleichen

Abständen 6 andere Wagerechte jede als Projektion einer horizontalen Ebene. Damit ergaben sich der Reihe nach b', c', d' .... h' als Vertikalprojektionen jener Punkte der Spiralen, denen wiederum der Reihe nach b, c d ... h als Horizontalprojektionen entsprechen — (α, α' α') die Umdrehungsaxe. — Die Parallelkreise der Fläche, welche je durch einen Theilpunkt der Erzeugungsspirale gehen, projiciren sich als konzentrische Kreise und ihre Radien sind gegeben durch die Abstände αa, αb ... ꝛc. Als Vertikalprojektionen derselben Kreise treten wieder die zuerst gezogenen Parallelen k' p', z' o' ... ꝛc. auf. Wie sofort der Hauptmeridian p' o' q' r' ..., k' z' ... zu bestimmen war, bedarf keines Hinweises mehr. In der Horizontalprojektion bilden die Parallelkreise der Punkte (d, d') und (h, h') den scheinbaren Kontur der Fläche.

159. Konstruktion der tangirenden Ebene. Auf dem Parallelkreise des Punktes (g, g') der Erzeugungsspirale ist (m, m') als Berührungspunkt gegeben. — In der Tangente ($m u$, m' U') dieses Parallelkreises hat man eine erste Gerade in der berührenden Ebene. — Als zweite Gerade konstruiren wir die Tangente der Erzeugungsspiralen in dem Augenblick, als sie während ihrer Rotation durch den Punkt (m, m') geht. Hierzu wurde (m, m') zurückgeführt nach (g, g') und hier die Tangente der Spiralen gezeichnet. Diese liegt (nach §. 86) in der tangirenden Ebene des Cylinders, welcher den Kreis $a b g$ als Grundlinie hat. Weil nun der Durchmesser $g c$ parallel zu X Y steht, so ist die Senkrechte $g g'$ Tangente an den Kreis im Punkt g, und diese Tangente ist zugleich die Projektion der fraglichen tangirenden Ebene. Der Bogen $a b g$, welcher $^7/_8$ des Umfanges beträgt, muß nun verstreckt und seine Länge auf $g g'$ aufgetragen werden, wo sie von g bis Q reicht. Die Tangente der Erzeugungsspirale am Punkte (g, g') wird in Q die Horizontalebene durchschneiden. Läßt man die Tangente mit der Spiralen um die Axe rotiren, so wird Q einen Horizontalkreis Q R beschreiben und der Abstand g Q unverändert bleiben. Man faßt also diesen Abstand g Q und beschreibt damit aus m einen Bogen, welcher den vorigen in R kreuzt, und m R muß die Horizontalprojektion der Spiraltangente sein für den Punkt (m, m'), so wie R der Ort, wo die Tangente durch die Horizontalebene dringen wird. R gehört also dem Horizontalriß der tangirenden Ebene des Punktes (m, m') an, und weil dieser Riß der Kreistangente $m u$ parallel, beziehungsweise auf der Meridianebene αm senkrecht stehen muß, so ist seine Richtung R T bestimmt. Für den Vertikalriß T U′ der tangirenden Ebene hat man erstlich den Punkt T auf X Y,

zweitens den Durchschnittspunkt (u, U') der Kreistangente und der Vertikalebene. — Die gefundene tangirende Ebene wird ihrer Lage nach den untern Theil der Umdrehungsfläche noch durchschneiden, was wir aber hier nicht weiter verfolgen.

Würde an einem Punkte des Hauptmeridianes, z. B. in (q, q'), die tangirende Ebene bestimmt, so erschiene ihr Vertikalriß als Tangente der Linie $p'\,o'\,q'$ . . ꝛc.

160. Wir schließen unsern Vortrag über Umdrehungsflächen, indem wir in den Figuren *140* bis *144* theils in größerer Ausdehnung, theils in beliebigen Stellungen gegen die Projektionsebene einige Darstellungen solcher Flächen geben, welche erzeugt sind durch die Rotation einer konischen oder cylindrischen Spiralen bei paralleler Lage der Linienaxe und der Rotationsaxe.

Ueber die Erzeugungslinie von Fig. *140*, einer konischen Spirale Folgendes. Sie ward nebenan in Fig. *140* (a) wiederholt. Der Kreis 0, 1, 2, 3 . . . liegt in der horizontalen Projektionsebene und dient als Basis einer geraden Kegelfläche, deren Scheitel in (s, s'). Den Umfang der Basis hat man in 8 gleiche Theile getheilt, dieselben von 0 aus rechts herum beziffert und dann nach 0′, 1′, 2′, 3′ . . . ꝛc. auf die Grundlinie projicirt. Die 8 geraden Erzeugungslinien, welche durch die Theilpunkte gehen, projiciren sich nach $0s$, $1s$, $2s$, $3s$ . . ., sowie nach $0's'$, $1's'$, $2's'$ . . . u. s. f. Den Radius des Grundkreises sowie die Höhe des Kegels theilte man in 7 gleiche Theile und fügte von den letzteren Theilen nach 2 über s' hinaus bei. Durch die Theilpunkte 1″, 2″ . . . ꝛc. zog man wagerechte Linien, welche als Projektionen von Parallelkreisen der Kegelfläche betrachtet werden mögen. 0 ist der Anfangspunkt der Spirale. Nach $^1/_8$ Umdrehung von $(s\,0, s'\,0')$ ist der Punkt um $^1/_7$ ihrer Länge gegen die Spitze gerückt, welche er nach $^7/_8$ Umdrehung erreicht, um noch $^2/_8$ weiter zu steigen. Es waren also $^1/_7$ der Radius $s\,5$ von 1 nach α zu tragen; $^2/_7$ von 2 nach β, $^3/_7$ von 3 nach γ ꝛc. Die Linie $o\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ . . . ist dieser Konstruktion zufolge eine archimedische Spirale und zugleich die Horizontalprojektion der konischen

Fig. *140* (a).

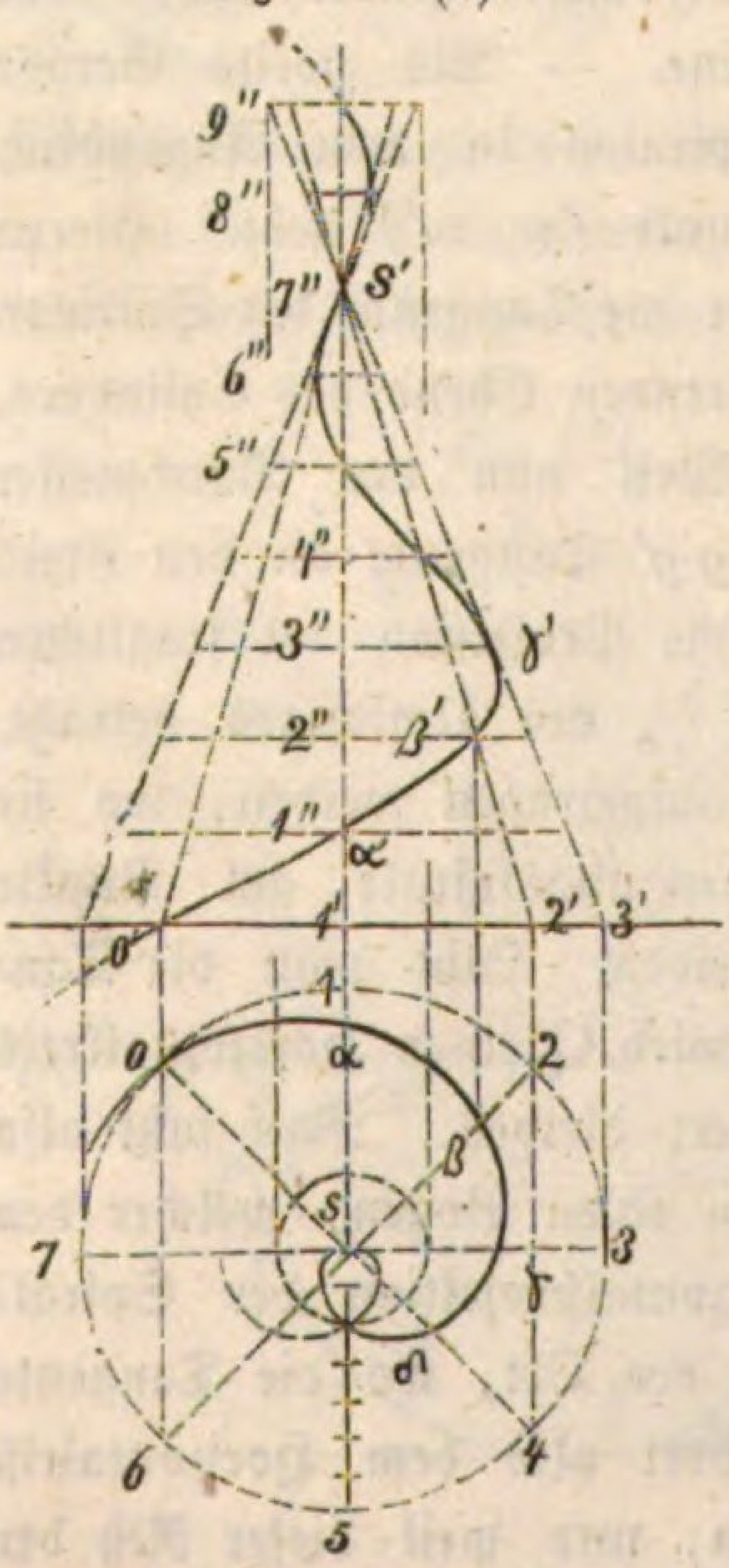
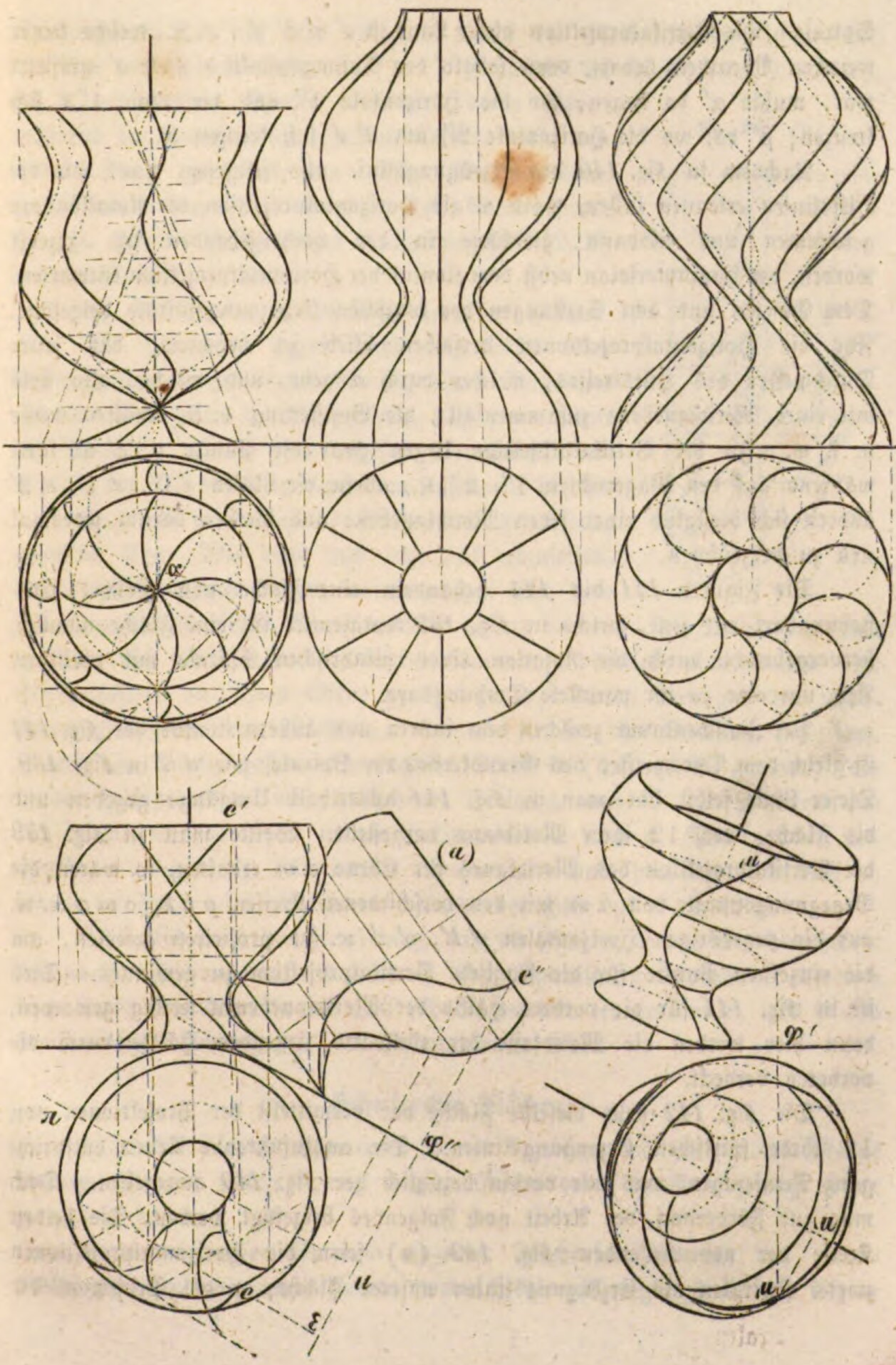


Fig. 140—144.



Spirale. Die Vertikalprojektion dieser Linie ist $o' \alpha' \beta' \gamma' \ldots$ 2c., welche keiner weiteren Vorarbeit bedarf, denn sobald der Anfangspunkt o nach o' projicirt war, mußte α' da liegen, wo die Horizontale $1''$ und die Linie $1' s'$ sich kreuzen; β' da, wo die Horizontale $2''$ um $2' s'$ sich kreuzen 2c.

Nachdem in Fig. *140* die Erzeugungslinie also festgesetzt war, wie die Hilfslinien erkennen lassen, ward α als Horizontalprojektion der Rotationsaxe genommen und alsdann, gleichwie in den vorhergehenden §§. gezeigt worden, der Hauptmeridian nebst dem Kontur der Horizontalprojektion entworfen. Dem Ganzen sind acht Stellungen der konischen Erzeugungsspirale beigefügt. Für die Horizontalprojektionen derselben blieb zu beachten, daß jener Durchmesser des Hilfskreises, welcher durch α geht, und welcher also stets mit einer Meridianebene zusammenfällt, die Bezifferung 1. 5. erhalten müsse u. s. w. In der Vertikalprojektion liegen zwar die Punkte α', β' 2c. fortwährend auf den Wagerechten $1''$, $2''$ 2c., allein die Linien $s' 0'$, $s' 1'$, $s' 2'$ ändern sich bezüglich einer jeden Meridianebene und bleiben darum jedesmal neu zu verzeichnen.

Die Figuren *141* bis *144* behandeln eine Fläche von gleicher Entstehungsart wie jene, welche in Fig. *139* repräsentirt ist, eine Fläche nämlich, hervorgebracht durch die Rotation einer cylindrischen Spirale mit vertikaler Axe, um eine zu ihr parallele Drehungsaxe.

Der Zwischenraum zwischen dem innern und äußern Kontur der Fig. *141* ist gleich dem Durchmesser des Grundkreises der Spirale, wie $d\,h$ in Fig. *139*. Dieser Linie selbst hat man in Fig. *141* anderthalb Umgänge gegeben und die Fläche durch 12 ihrer Meridiane dargestellt. Wollte man in Fig. *139* die Vertikalprojektion des Meridianes der Ebene $\alpha\, m$ erhalten, so wären die Begegnungspunkte von $\alpha\, m$ mit den verschiedenen Kreisen $p\,h\,k$, $o\,m\,a$ 2c. 2c. auf die zugehörigen Horizontalen $p'\,k'$, $o'\,z'$ 2c. zu projiciren gewesen, um die einzelnen Punkte für die fragliche Vertikalprojektion zu gewinnen. Dies ist in Fig. *141* für die vordere Hälfte der Meridianebenen nöthig geworden, denn hier werden die Meridiane der rückwärts liegenden Hälfte durch die vorderen verdeckt.

Die Fig. *142* stellt dieselbe Fläche dar vermittelst der Projektionen von 12 ihrer spirischen Erzeugungslinien. Die auszuführende Arbeit entspricht ganz Demjenigen, was wir vorhin bezüglich der Fig. *140* angegeben. Doch mag zur Förderung der Arbeit noch Folgendes beigefügt werden. Die beiden Kreise der nebenstehenden Fig. *142* (a) seien die Horizontalprojektionen zweier Spiralen als Erzeugungslinien unserer Fläche; a die Projektion der

Drehungsaxe, 1 α auf dem untersten Kreise die Meridianebene, in welcher die Axe der Spirale liegt und (1, 1′) Fußpunkt der Linie; (2, 2′), (3, 3′), (4, 4′) ꝛc. weitere Punkte derselben, deren Höhen während der Rotation unverändert bleiben. Für den andern Kreis giebt sich nun auf der Meridianebene, welche durch sein Centrum geht, der Anfangspunkt (1, 1′), und bei gleichmäßiger Eintheilung sind (2, 2′) weitere Punkte der Linie.

Fig. 142 (a).

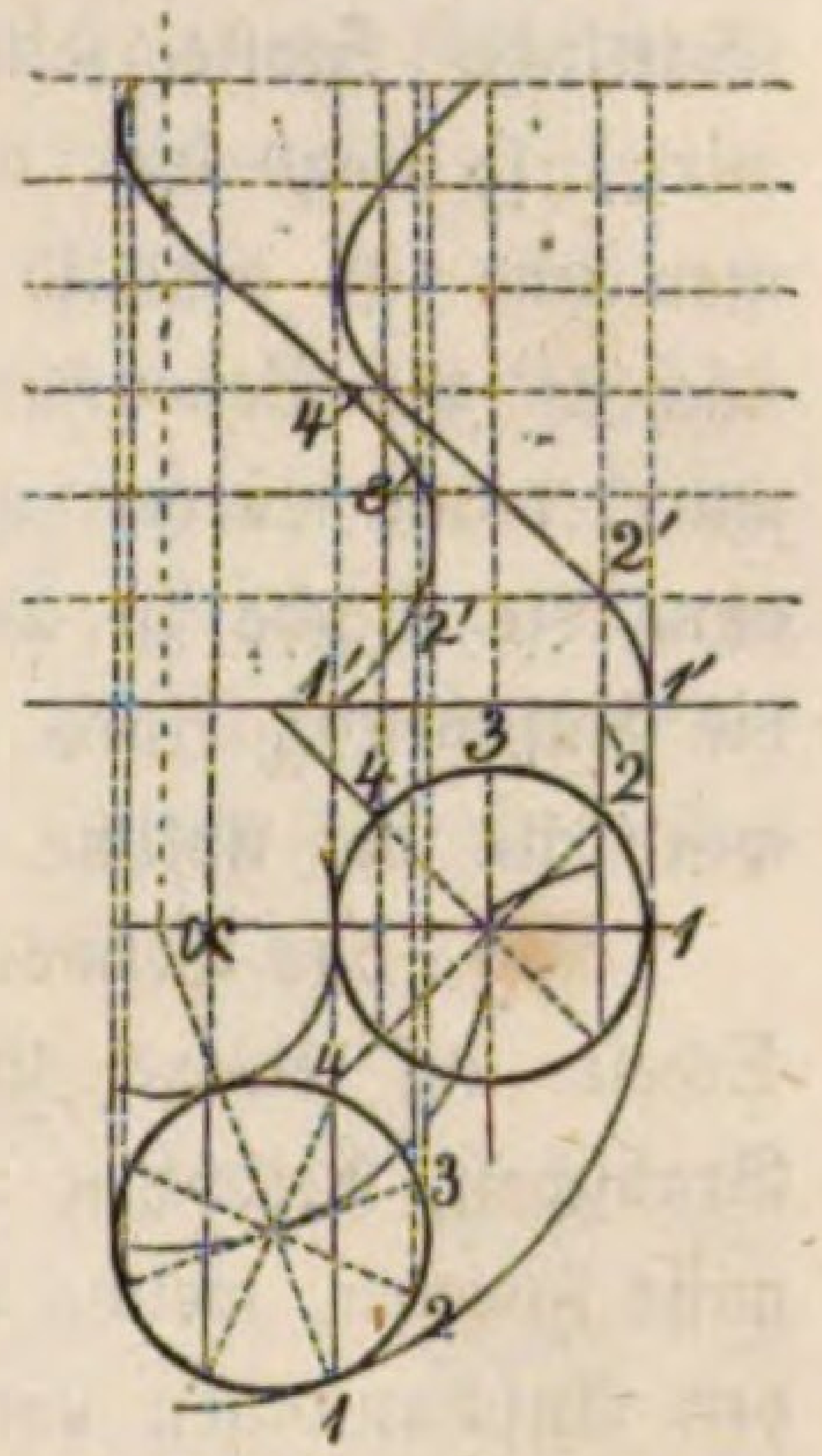


Fig. *143* ist ein andres Stück derselben Flächenart. Als erzeugende Figur wurde ein Stück einer Schraubenspirale genommen von $^5/_6$ eines Umganges und der Art gegen die Axe gestellt, daß jener Punkt der Spiralen, welcher dem kleinsten Parallelkreis angehört, um $^1/_6$ des Umganges vom Fußpunkte absteht.

Fig. *144* zeigt dasselbe Flächenstück bei schräg gestellter Axe. Wie diese aus Fig. *143* abzuleiten, dürfte als genugsam bekannt vorauszusetzen sein; doch mögen nochmals einige Worte darüber gesagt werden. Die Drehung geschah der Art, daß die Rotationsaxe in der Ebene $\pi \mu$ verblieb; man ordnete eine Hilfsprojektion an, deren Ebene parallel zu $\pi \mu$ stand; man gab der gefundenen Projektion eine Drehung, wodurch sie in die Stellung *(a)* kam. Irgend ein Punkt, dessen ursprüngliche Stelle in *(l, l′)* z. B. gewesen, kam in der Hilfsprojektion nach geschehener Drehung nach l'' und projicirte sich von da auf's neue herab in die Horizontalebene nach ε. Dies ε blieb unmittelbar in die Fig. *144* nach ε überzutragen und projicirte sich nach ε′, indem die Höhe φ′ ε gleichgemacht wurde der Höhe $\varphi'' e''$ u. s. w.

Schließlich noch die Bemerkung, daß die Flächen, welche wir hier zuletzt behandelt, obschon durch Umdrehung von Spirallinien entstanden, dennoch keine Spur von Gewundenem „an sich tragen und tragen können, weil solches durch einfache Umdrehung" nie hervorgebracht wird.

Scheitrechte Flächen.

161. Mit diesem allgemeinen Namen bezeichnen wir jene endlose Menge krummer Flächen, welche erzeugt werden können durch die Bewegung einer geraden Linie.

Wenn wir unser Studium einzelner Flächenfamilien mit den „Umdrehungsflächen" begonnen haben, wodurch die „Bewegungsart" der Erzeu-

gungslinie als Eintheilungsgrund hingestellt scheint, so könnte dem Schema unserer Eintheilung der Vorwurf einer Unfolgerichtigkeit insofern gemacht werden, als wir für die zweite Klasse derselben die „Gestalt der Erzeugungslinie" zum Merkmal hervorheben. Allein abgesehen davon, daß für wissenschaftliche Stoffe selten ein überall bequemes Fachwerk gefunden werden wird, so liegt hier das Ungehörige nicht sowol in der Sache als im Namen und ist deßhalb ohne Bedeutung. Denn man setze für „Umdrehungsflächen" die Benennung „runde Flächen", was ganz zu rechtfertigen gewesen wäre, dann würden unsere Ueberschriften auf gleichartige Merkmale hinweisen, ohne die Sache zu ändern doch schien uns das Ganze nicht erheblich genug, die Einführung eines neuen Namens zu versuchen, welcher keineswegs besser wäre als der übliche.

Was das Beiwort „scheitrecht" an sich betrifft, so deutet das Wurzelwort Scheit auf etwas Geradliniges, daher noch die Ableitungen Richtscheit, Grabscheit, Reibscheit u. s. w. In der Architektur nennt man scheitrecht gewisse Formen, welche nach dem Richtscheite gebildet sind, und so lag es nahe, den Anschauungen von §. 105 gemäß, die Benennung „scheitrechte Flächen" in dem allgemeinen Sinne unserer Ueberschrift zu gebrauchen. Allein wir sehen uns sogleich gemüßigt, dies verbreitete Flächengeschlecht wieder in zwei große Stämme zu zerlegen, deren erstem wir die Benennung „aufwickelbare Flächen" beilegen, während dem zweiten der Name windische Flächen zufällt. Den Grund davon besprechen wir gleich näher. Was von den scheitrechten Flächen zugleich auch zu den Umdrehungsflächen gehört, kennen wir bereits. Man lasse sich, nach den Darstellungen von Seite 195, einen cylindrischen, einen konischen und einen hyperboloidischen Körper als Modell anfertigen.

Bei den beiden ersten wird das Geradlinige daran alsogleich und entschieden, ja noch deutlicher als das Runde hervortreten, allein es wird des Beweises durch den Augenschein bedürfen, sich zu überzeugen, daß auf der hyperboloidischen Oberfläche die Kante eines Richtscheites nach gewissen Richtungen angelegt werden könne. Man weiß ferner, wie leicht ein Papierblatt nach der Form einer Cylinder- oder Kegelfläche zusammengerollt werden kann, während jeder Versuch zeigen wird, daß die hyperboloidische Gestalt durch Zusammenrollen unter keinerlei Umständen herbeizuführen ist. Das Warum wird ersichtlich, wenn man die drei Flächenarten nach ihrer Erzeugung durch die gerade Linie betrachtet und dabei die Aufeinanderfolge der geraden Erzeugungslinie ins Auge faßt.

162. Wir nennen aufeinander folgende Erzeugungslinien einer krum-

men Fläche zwei so nahe aufeinander folgende, daß die Stelle einer dritten zwischen ihnen nicht mehr anzugeben ist. Nun sind die auf einander folgenden geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche unter sich parallel, liegen also paarweise in einer und derselben Ebene, und das Flächenelement, welches sie einschließen, ist ein ebenes Element. Gleichmäßig verhält es sich mit der Kegelfläche, bei welcher je zwei auf einander folgende gerade Erzeugungslinien sich im Scheitel durchkreuzen, also wiederum in einer Ebene liegen. — Auch die Begriffe von „Berührungen", welche §. 103 entwickelt worden, haben zu dem Ergebniß geführt, daß die Elemente der Kegel- und Cylinderflächen zwischen zwei auf einander folgenden geraden Erzeugungslinien als ebene Elemente zu betrachten seien, und es gilt dies nicht nur von den cylindrischen oder konischen Umdrehungsflächen, sondern überhaupt von all' jenen Cylinder- oder Kegelflächen, deren bereits in §. 89 *a* und *b* gedacht worden.

Begriff von Abwickelung krummer Flächen.

163. Denkt euch nun, auf einer solchen Fläche seien eine Reihe aufeinander folgender gerader Erzeugungslinien gezogen, und, wenn nöthig, sei die Fläche nach der ersten dieser Linien durchschnitten; dann betrachtet die zweite Gerade als eine Art Charnier und drehet das erste Flächenelement um dies Charnier, bis es mit dem zweiten Elemente in einer Ebene liegt; die beiden also vereinten Elemente drehet um die dritte gerade Erzeugungslinie, bis sie mit dem dritten Elemente wieder in derselben Ebene liegt. Es wird einleuchten, daß kein Hinderniß besteht, diese Arbeit fortzusetzen, bis die ganze Fläche auf- oder abgewickelt ist und die Gestalt einer ebenen Fläche angenommen hat. Sind auf dieser ebenen Fläche noch die einzelnen geraden Erzeugungslinien markirt geblieben, so kann auch auf umgekehrtem Wege durch fortgesetztes Drehen um je eine der geraden Linien nach der andern der ebenen Fläche wiederum die ursprüngliche Form der Kegel- oder Cylinderfläche zurückgegeben werden. Solches Auf- oder Abwickeln der Fläche geschieht ohne Zerreißen oder gewaltsames Drehen einzelner Stellen.

Wovon das Nichtaufwickelbare bei scheitrechten Flächen herrühre.

164. Schon das Umdrehungs-Hyperboloid von einem Netze (Fig. *109*) ist geeignet, hiervon den Nachweis zu liefern. Je zwei seiner auf einander folgenden geraden Erzeugungslinien können sich weder durchschneiden, noch parallel sein, denn kein Punkt der Linie bleibt fest während der Rotation auch der kleinsten, was sein müße, wenn die Linien sich durchschneiden sollten. Dann beschreiben die Punkte der Erzeugungslinie kleine Kreisbogen von gleicher

Drehungsquantität, aber von wachsendem oder abnehmendem Radius, weßhalb die Linie nach keiner, auch der geringsten Drehung mehr parallel sein kann zu ihrer Anfangsstellung. Zwei gerade Linien aber, welche sich weder durchschneiden noch parallel sind, können nicht zugleich in einer und derselben Ebene liegen und somit kann das Flächenelement zwischen zwei auf einander folgenden geraden Erzeugungslinien dieser Rotationsfläche kein ebenes Element sein, vielmehr sind die Flächenelemente des Hyperboloides unendlich klein nach allen Richtungen. Wo aber die Elemente einer scheitrechten Fläche, soweit sie zwischen den aufeinander folgenden geraden Erzeugungslinien der Fläche liegen, nicht die Eigenschaft ebener Elemente haben, da kann es auch nicht möglich sein, dieselben auf- oder abzuwickeln, d. h. ohne Aufheben ihres Zusammenhanges in eine Ebene auszubreiten.

In dem schon angezogenen §. 89 sind noch mehrere Vorschriften der Bewegung für die gerade Linie aufgeführt worden; die krummen Flächen, welche dadurch hervorgebracht werden können, gehören sämmtlich zu den scheitrechten. Es wird aber von der besondern Gestalt und der gegenseitigen Stellung der Leitlinien abhängen, ob die aufeinander folgenden Erzeugungslinien paarweise in gleiche Ebene zu liegen kommen oder nicht. Im ersten Falle sind die Flächenelemente zwischen je zwei der aufeinander folgenden Geraden unendlich schmale ebene Elemente von unbegränzter Längenausdehnung und die Fläche, welcher sie angehören, besitzt die Eigenschaft der Aufwickelbarkeit. Im andern Fall, wenn nämlich je zwei aufeinander folgende Erzeugungslinien nicht in einer Ebene liegen, kann das Flächenelement, welches sie begränzen, kein Theil einer ebenen Fläche sein; es trägt etwas Gedrehtes, Gewundenes an sich; wir nennen es ein windisches Element, und die aus solchen Elementen zusammengesetzte krumme Fläche eine windische Fläche. Schon die äußere Erscheinung der scheitrechten Flächen zeigt an ihnen die Hörigkeit zu dem Stamme der aufwickelbaren oder zu jenem der windischen Flächen. Das aber kann vorkommen, daß eine scheitrechte Fläche an einer oder der andern Stelle ebene Elemente habe, deren Nachbarelemente wiederum die windische Form annehmen.

Aufwickelbare Flächen.

165. Sofern alle Cylinderflächen hervorgebracht werden können durch die gleitende Bewegung einer geraden Erzeugungslinie auf einer krummen Leitlinie, während die erstere einer bestimmten Richtung parallel bleibt, und alle Kegelfläche durch die gleiche Bewegung einer Geraden auf einer

krummen Leitlinie, während sie stets durch einen festen Punkt außerhalb der Leitlinie geht, insoferne gehören diese Cylinder- und Kegelflächen zu den aufwickelbaren; dies folgt aus den Darlegungen des vorhergehenden §. Häufig nennt man die Leitlinie auch Grundlinie, Basis der Kegel- oder Cylinderfläche, namentlich in dem Falle, wenn diese Linie zugleich als Begränzung der Fläche auftritt. Nach der Natur der Grundlinie erhalten die einzelnen Arten der fraglichen Flächen ihre Sondernamen; so sind elliptische, cykloidische Kegelflächen, parabolische Cylinderflächen u. s. w. Kegel und Cylinder, deren Grundlinie eine Ellipse, eine Cykloide *), eine Parabel u. s. w. Die Beinamen schief oder gerade erhalten die Flächen je nach der Stellung ihrer geraden Erzeugungslinien oder ihrer Axen gegen die Ebene der Grundlinie.

Eine schiefe kreisrunde Cylinderfläche hat einen Kreis als Grundlinie und die geraden Erzeugungslinien stehen schief oder schräg gegen die Kreisebene. Gerade oder schief wird man eine elliptische Kegelfläche nennen, je nachdem die Axe, d. i. die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Centrum der Basis, senkrecht steht oder schief gegen die Ebene dieser Basis.

Schließlich werde noch bemerkt, daß alle Kegel- oder Cylinderflächen, deren Basis eine Linie zweiter Ordnung (eine Ellipse oder ein Kreis, eine Parabel oder Hyperbel), den Flächen zweiter Ordnung zugehören (§. 87).

Graphische Darstellung aufwickelbarer Flächen.

166. Schiefe kreisrunde Cylinderfläche. Fig. *145*.

Ein Kreis hat als Projektionen die Ellipsen $o\,p\,q\,r$, $o'\,p'\,q'\,r'$, er dient als Leitlinie einer Cylinderfläche, deren gerade Erzeugungslinien mit der Geraden (g, g') parallel sein sollen. Dies (g, g') aber steht nicht senkrecht gegen die Kreisebene, was daran zu erkennen, daß die Projektionen g, und g' nicht senkrecht stehen auf den großen Axen der bezüglichen Ellipsen $o\,p\,q \ldots$ und $o'\,p'\,q' \ldots.$ (§. 30). **)

Zur projektiven Darstellung der Fläche wurden eine Reihe gerader Erzeugungslinien der Fläche wiedergegeben, so wie deren Durchschnitte mit den beiden Projektionsebenen.

Die geraden Erzeugungslinien gehen durch einzelne Punkte (o, o') (p, p') .... 2c. der cirkulären Leitlinie.

*) Die Cykloide oder Radlinie wird beschrieben durch einen Punkt des Reifes beim Rollen des Rades auf geradliniger Bahn.

**) Wir geben alsogleich noch einige Erläuterungen hierüber.

D G F J Durchschnittslinie der Cylinderfläche mit der Horizontalebene; sie wird gebildet durch die Reihe von Punkten, in welchen die einzelnen geraden Erzeugungslinien durch die Horizontalebene dringen, z. B. (o, o') ein Punkt der Leitlinie; $(o\ F, o'\ f')$ gerade Erzeugungslinie, welche durch $(o\ o')$ geht; (f', F) Durchschnitt dieser Erzeugungslinie und der Horizontalebene. Sonderpunkte des Schnittes D G F J. Dies sind erstlich die Punkte E und J, welche auf den Umrissen der Horizontalprojektion liegen. Der Berührungspunkt i z. B. ward nach i' auf die Linie $o'\ p'\ q' \ldots$ projicirt, die Projektion $i'\ j'$ gezogen und der Durchschnitt J der geraden $(i\ J, i\ j')$ mit der Horizontalebene bestimmt.

Zweitens gehören zu den Sonderpunkten jene, wie D, an welchen die Tangenten $D\ d'$ senkrecht gegen die Grundlinie gerichtet sind. Zur Konstruktion von D mußte der Berührungspunkt q' des Umrisses $L'\ d'$ auf $o\ p\ q \ldots$ herabprojicirt werden, wo er nach q fiel; dadurch war die Erzeugungslinie $(q'\ d', q\ D)$ angezeigt, auf welcher (d', D) liegen muß.

L′ K′ H′ M′ ... Durchschnitt der schiefen Cylinderfläche mit der vertikalen Projektionsebene.

Allgemeine Punkte dieses Durchschnittes: (o, o') ein beliebiger Punkt der Leitlinie, $(F\ o\ k, f'\ o'\ K')$ gerade Erzeugungslinie des Punktes (o, o'); (k, K') Durchschnitt der Erzeugungslinie und der Vertikalebene rc.

Sonderpunkte des Schnittes L′ K′ H′ M′ .... Es sind erstlich diejenigen, welche gleich L′ und M′ den Konturen $r'\ M'$ und $q'\ L'$ angehören. Die Berührungspunkte q' und r' wurden herabprojicirt nach q und r; $q\ l$ entsprechende Horizontalprojektion von $q'\ L'$, daher (l, L') gesuchter Durchschnittspunkt. $r\ m$ Horizontalprojektion, welche zu $r'\ M'$ gehört, (m, M') Durchschnitt von $(r\ m, r'\ M')$ und der Vertikalebene.

Zweitens. Punkte wie H′, I′, an welchen die Tangenten vertikal stehen. Sie gehören jenen schon genannten und bezeichneten geraden Erzeugungslinien an, deren Horizontalprojektionen $h\ i$, $E\ e$ die Konturen der gleichnamigen Projektion bilden.

167. Berührende Ebenen der schiefen Cylinderfläche.

n sei die Horizontalprojektion eines beliebigen Punktes unserer Fläche und man verlangt die berührende Ebene der Cylinderfläche an diesem Punkte. Denkt euch in n eine Senkrechte errichtet, so wird diese die Cylinderfläche zweimal durchschneiden, zuerst in ihrem unteren und dann in dem oberen Theile. Ein jeder von diesen Punkten hat n als Horizontalprojektion und es muß erläutert werden, ob an dem oberen oder dem unteren oder an allen

Fig. 145.

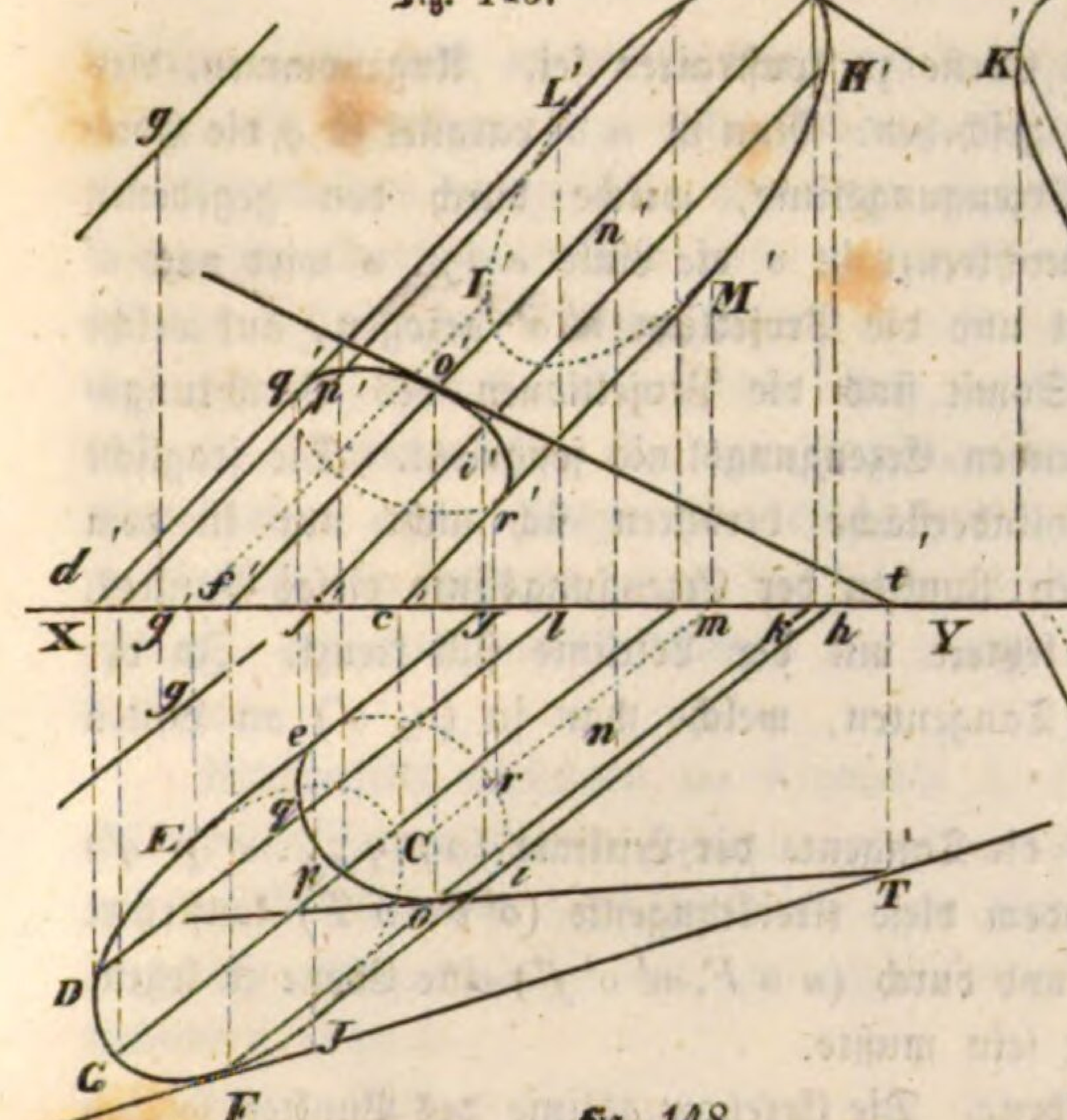


Fig. 149.

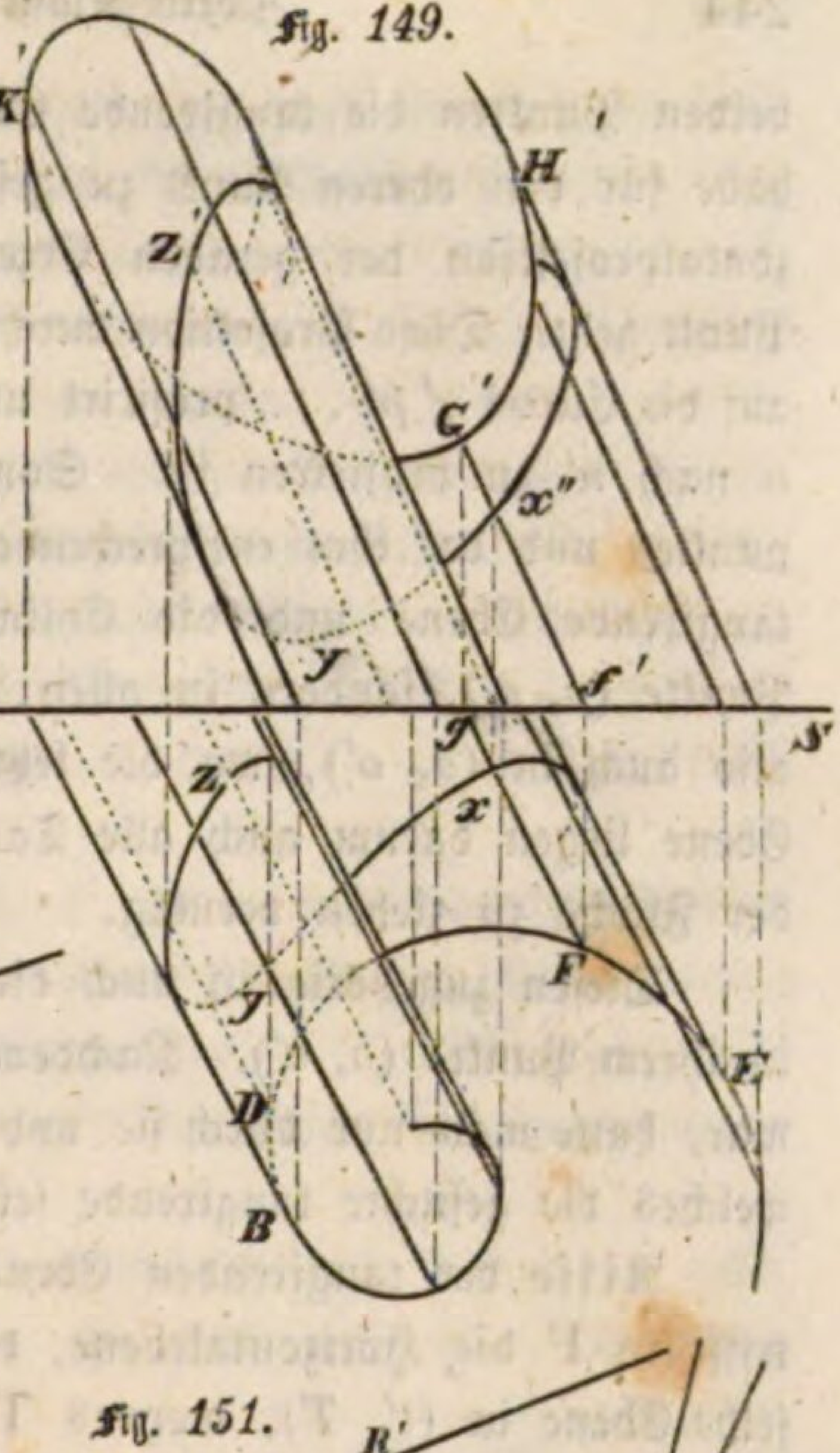


Fig. 148.

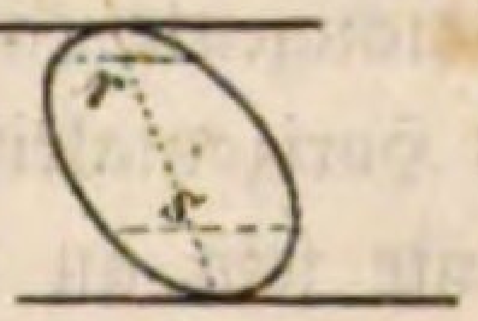


Fig. 150.

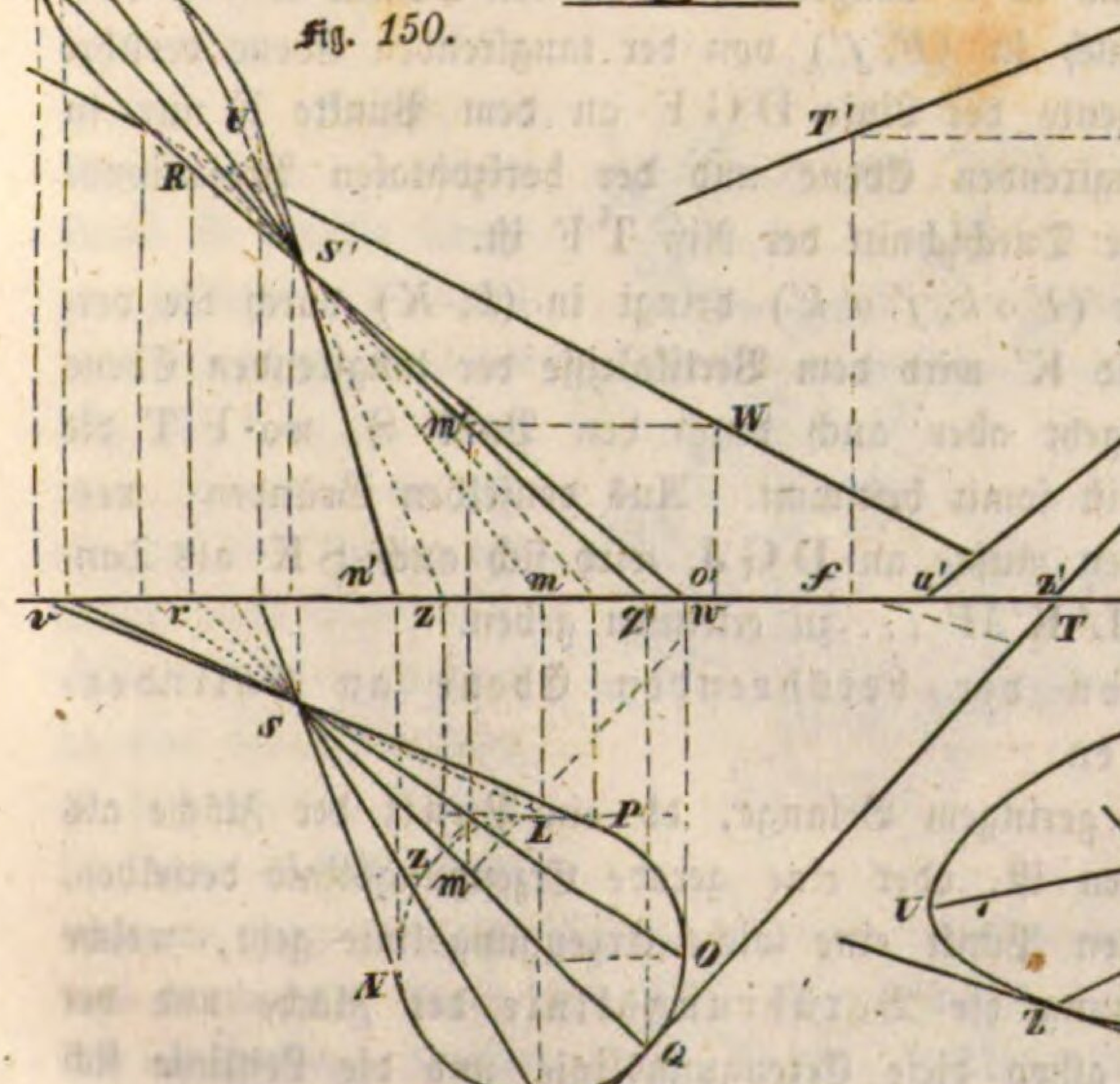
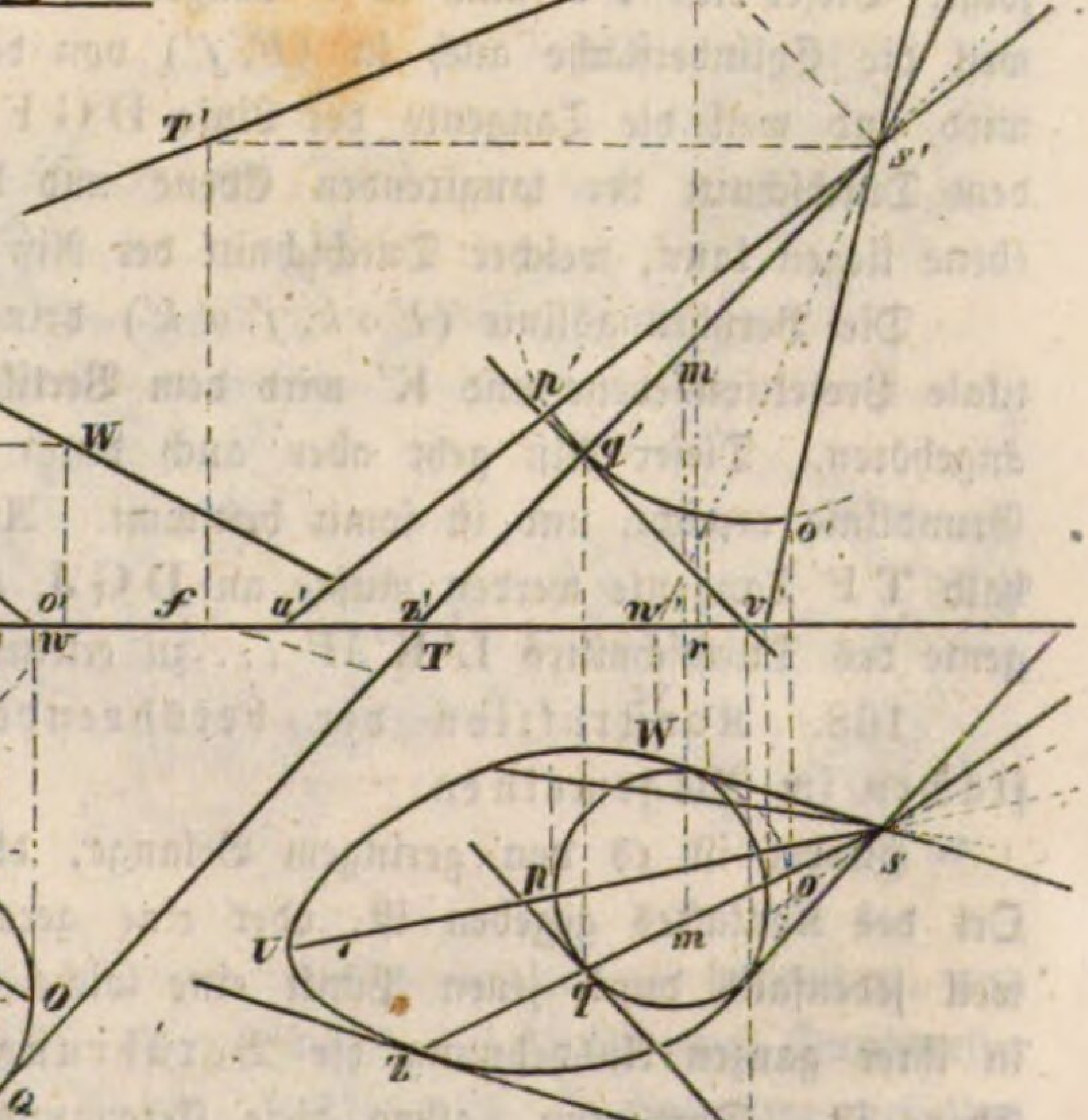


Fig. 151.



beiden Punkten die tangirende Ebene zu konstruiren sei. Angenommen, dies habe für den oberen Punkt zu geschehen. Nun ist $n\,o$ parallel zu g die Horizontalprojektion der geraden Erzeugungslinie, welche durch den gegebenen Punkt geht. Diese Projektion durchkreuzt in o die Linie $e\,q\,p$. o wird nach o' auf die Curve $q'\,p'\ldots$ projicirt und die Projektion $n'\,o'$ gezogen, auf welche n nach n' zu projiciren ist. Somit sind die Projektionen des Berührungspunktes und der ihm entsprechenden Erzeugungslinie festgesetzt. Die fragliche tangirende Ebene und die Cylinderfläche berühren sich nicht nur in dem Punkte (n, n'), sondern in allen Punkten der Erzeugungslinie dieses Punktes, also auch in (o, o'), wo die letztere mit der Leitlinie sich kreuzt. In der Ebene liegen darum auch alle Tangenten, welche man in (o, o') an Linien der Fläche zu ziehen vermag.

Diesen zugehörig ist auch die Tangente der Leitlinie $(o\,p\,q \ldots o'\,p'\,q')$ in ihrem Punkte (o, o'). Nachdem diese Kreistangente $(o'\,t', o\,T)$ konstruirt war, hatte man nur durch sie und durch $(n\,o\,F, n'\,o'\,f')$ eine Ebene zu legen, welches die gesuchte tangirende sein mußte.

Risse der tangirenden Ebene. Die Erzeugungslinie des Punktes (n, n') trifft in F die Horizontalebene, die Kreistangente $(o'\,t', o\,T)$ schneidet dieselbe Ebene in (t', T), woraus T F als Horizontalriß der tangirenden Ebene folgt. Dieser Riß T F muß in F Tangente sein an den Schnitt D G F ..., weil die Cylinderfläche auch in (F, f') von der tangirenden Ebene berührt wird und weil die Tangente der Linie D G F an dem Punkte F nur in dem Durchschnitt der tangirenden Ebene und der horizontalen Projektionsebene liegen kann, welcher Durchschnitt der Riß T F ist.

Die Berührungslinie $(F\,o\,k, f'\,o'\,k')$ dringt in (k, K) durch die vertikale Projektionsebene und K′ wird dem Vertikalrisse der tangirenden Ebene angehören. Dieser Riß geht aber auch durch den Punkt S, wo F T die Grundlinie erreicht, und ist somit bestimmt. Aus denselben Gründen, weshalb T F Tangente werden mußte an D G J, wird sich auch S K′ als Tangente des Durchschnittes L′ K′ H′ ... zu erkennen geben.

168. Konstruktion der berührenden Ebene an Cylinderflächen im Allgemeinen.

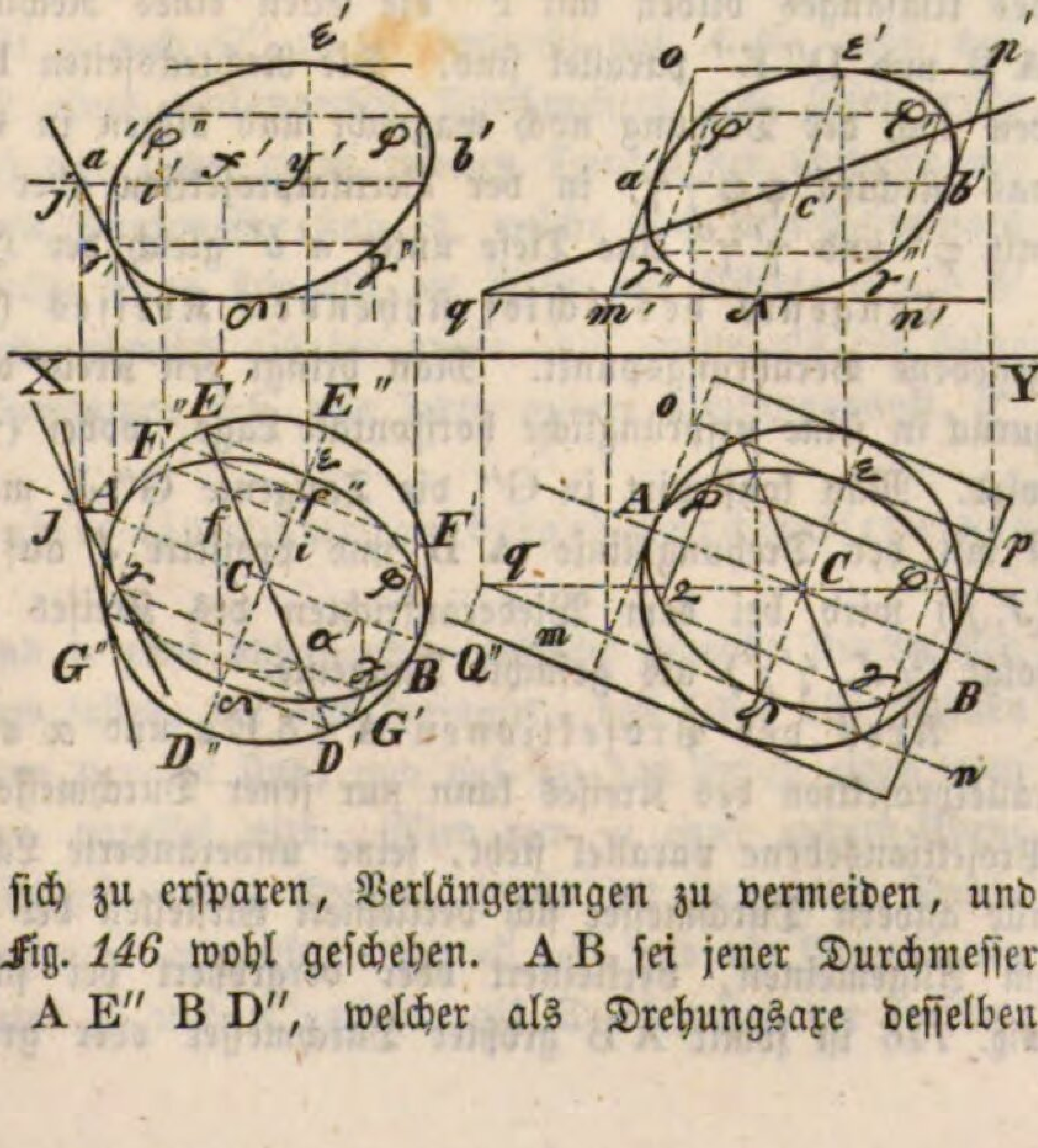
Hierbei ist es von geringem Belange, ob ein Punkt der Fläche als Ort des Kontaktes gegeben ist, oder eine gerade Erzeugungslinie derselben, weil jedenfalls durch jenen Punkt eine solche Erzeugungslinie geht, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Berührungslinie der Fläche und der Ebene ist. Dort nun, allwo diese Erzeugungslinie und die Leitlinie sich

kreuzen, zieht man an die Leitlinie eine Tangente und legt endlich durch Tangente und Erzeugungslinie eine Ebene. Wird die Cylinderfläche von einer Projektionsebene geschnitten, oder von irgend einer anderen Ebene, so ist die gerade Durchschnittslinie dieser und der tangirenden Ebene eine Tangente an den Schnitt der Cylinderfläche und derselben Ebene, wie dies Letztere bei Fig. *145* sich kund gegeben. Hier, gleichwie in allen ähnlichen Fällen, sind die Konturen *J h*, *E y* der Horizontalprojektion zu betrachten als die Projektionen zweier tangirenden Ebenen der Cylinderfläche, welche auf der Horizontalebene senkrecht stehen; sie haben die Senkrechten *h H'*, *y I'* als Vertikalrisse und diese müssen deshalb den Schnitt L' K' M' .... in I' und H' berühren.

Andererseits erscheinen die Konturen *L' d'*, *M' c'* der Vertikalprojektion als die Vertikalprojektionen zweier tangirenden Ebenen der Cylinderfläche, welche auf der Vertikalebene senkrecht stehen; die Senkrechten *c' C*, *d' D* sind deren bezügliche Horizontalrisse und zugleich in *C*, *D* Tangenten des horizontalen Schnittes D G J.

169. Einige Zusätze über die Projektion des Kreises. Wir geben diese gelegenheitlich der Erklärung von Fig. *145*, weil eben bei einem Lehrvortrage, wie im gemeinen Leben, es gerathen scheint, die Gelegenheit zu erfassen, wo sie sich giebt. — Einen Kreis in schiefer Ebene zu zeichnen, benimmt man sich ähnlich wie bei Fig. *30*, S. 123, wenn man sich dort an die Stelle des Polygones einen Kreis denkt, welcher aus der wagrechten in eine schiefe Stellung zu bringen ist. Allein in der Praxis sucht man wo möglich Linien sich zu ersparen, Verlängerungen zu vermeiden, und dies kann beim Kreise Fig. *146* wohl geschehen. A B sei jener Durchmesser des wagrechten Kreises A E″ B D″, welcher als Drehungsaxe desselben

Fig. 146. Fig. 147.



dienen soll; $a'\,b'$ die Vertikalprojektion von A B. Anstatt nun, wie in Fig. *30*, die Hilfsprojektion (a) links seitwärts stellen, legen wir sie in Fig. *146* durch das Centrum des Kreises. Der Durchmesser $D''\,E''$ steht auf A B senkrecht und wird als Grundlinie der Hilfsprojektion genommen. Der Durchmesser $D'\,E'$ gilt als Hilfsprojektion des um A B gedrehten Kreises und $E'\,C\,\varepsilon$ ist somit der Drehungswinkel. E projicirt sich nach ε und $E\,\varepsilon$ ist gleich der Höhe, welche E durch die Drehung erhalten hat. Eben so projicirte sich D' nach δ und $D'\,\delta$ ist gleich der Tiefe von D'. Macht man daher auf den Senkrechten, welche in δ und ε errichtet worden, von $a'\,b'$ aus gezählt, die Höhe $y'\,\varepsilon'$ und die Tiefe $x'\,\delta'$ gleich $E'\,\varepsilon$ oder gleich $D'\,\delta$, so ist ε' der höchste, δ' der tiefste Punkt der Vertikalprojektion, F'' ein beliebiger Punkt des Umfanges. Wird $F''\,G''$ senkrecht auf A B gezogen, so hat man damit die Projektion der Ebene, in welcher F'' seine Drehung macht. F'' projicirt sich anfänglich nach f'' und dieser Punkt kommt in Folge der Drehung des Kreises nach f'. Wird $i\,f'\,\varphi$ senkrecht auf $D''\,E''$ gezogen, so schneidet dies auf $F''\,G''$ den Punkt φ ab, welcher dem gesuchten Ellipsumfang angehört. $i\,f'$ drückt die Höhe aus, welche F'' erhalten hat; macht man daher über $a'\,b'$ die Höhe $i'\,\varphi''$ gleich $i\,f'$, so ist φ'' die Vertikalprojektion des ursprünglich in F'' gelegenen Cirkumferenzpunktes. Drei Punkte F', G', G'' des Umfanges bilden mit F'' die Ecken eines Rechteckes, dessen Seiten zu A B und $D''\,E''$ parallel sind. Die Rechtecksseiten $F''\,F'$ und $G''\,G'$ bleiben nach der Drehung noch wagrecht und bilden in der Horizontalprojektion das Rechteck $\varphi\,\varphi\,\gamma\,\gamma$, in der Vertikalprojektion aber erhält φ' gleiche Höhe mit φ'' und $\gamma'\,\gamma''$ eine Tiefe unter $a'\,b'$ gleich der Höhe $i'\,\varphi''$.

Tangente des schief stehenden Kreises (γ, γ') sei der beliebig gegebene Berührungspunkt. Man bringt den Kreis durch Drehung um A B zurück in seine ursprüngliche horizontale Lage, wobei (γ, γ') nach G'' kommen wird. Man konstruirt in G'' die Tangente $G''\,J$, markirt deren Durchschnitt J mit der Drehungslinie A B und projicirt J auf $a'\,b'$ nach j'. Dies (J, j') wird bei dem Wiederaufrichten des Kreises fest bleiben und somit folgt ($\gamma\,J, \gamma'\,j'$) als gesuchte Tangente.

Axen der Projektionen $A\,\gamma\,\delta\,E\,\varepsilon$ und $\alpha'\,\varepsilon'\,b'\,\delta'$. Bei einer Parallelprojektion des Kreises kann nur jener Durchmesser desselben, welcher der Projektionsebene parallel steht, seine unveränderte Länge erhalten, während alle andern Durchmesser sich verkleinert darstellen bei gerader Projektion und, im Allgemeinen, verkleinert oder vergrößert bei schräger Projektion. In Fig. *146* ist somit A B größter Durchmesser oder große Axe der Projektion

des Kreises in seiner schrägen Stellung und δ ε wird die kleine Axe dieser Projektion sein. Was die Axen der Vertikalprojektion betrifft, so haben wir dieselben in Fig. *147* gezeichnet, in welcher man übrigens nur eine Wiederholung von Fig. *146* erblicken wolle. Es handelt sich hier darum, jenen Durchmesser des Kreises zu finden, welcher der vertikalen Projektionsebene parallel liegt. Die Horizontalprojektion desselben kann keine andere sein, als eine durch das Centrum C gehende Parallele zur Grundlinie XV, also die Gerade Cq. q liegt auf der Wagrechten des Punktes (δ, δ′) und projicirt sich nach q', daher hat $c'q'$ die Richtung der großen Axe der Projektion $a' \varepsilon' b' \delta'$. Die Größe dieser Axe kann keine andere sein als jene des Durchmessers A B.

170. Fortsetzung. Es könnte verlangt werden, man solle die Endpunkte der beiden Axen in der Vertikalprojektion 147 durch eine direkte Konstruktion bestimmen, und hierbei wäre folgender Weg einzuhalten. Um den wagrecht liegenden Kreis ist ein Quadrat beschrieben, wovon zwei Seiten der Drehungslinie A B parallel; nach dem Aufrichten des Kreises, wobei das Quadrat mitgeführt wird, projicirt sich dasselbe als das Rechteck $m\,n\,p\,o$ und als das Parallelogramm $m'\,n'\,p'\,o'$. Die Parallele zur XY, welche durch Centrum C gezogen worden, nämlich C q, schneidet das verlängerte $m\,n$ in q, und nachdem Kreis wie Quadrat wieder in die horizontale Lage zurückgeführt worden, füllt q noch Q'' ($q\,Q''$ senkrecht auf $A\,B$), man verbindet Q'' mit C mittelst eines verlängerten Durchmessers (der Leser möge die Linien sich entwerfen) und ziehet einen zweiten Durchmesser senkrecht auf jenen ersten. Diese beiden Durchmesser sind es, welche nach dem Verbringen des Kreises in seine schräge Lage sich als die Axen der Ellipse $a' \varepsilon' b' \delta'$ projiciren werden; der erste nämlich als die große, der zweite als die kleine Axe. Ihre Endpunkte bestimmen sich wie jeder andere Umfangspunkt F″ Fig. *146*.

171. Was konjugirte (zusammengehörige) Durchmesser einer Ellipse seien.

In einem Kreise sind je zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser, welche D' und D'' heißen sollen, der Art konjugirt, daß jeder alle Sehnen halbirt, welche dem andern parallel sind, und daß an den Enden eines jeden die Tangente dem andern parallel wird. Wird nun in einer andern Ebene die gerade oder schräge Projektion des Kreises, sowie der genannten Durchmesser, Sehnen und Tangenten entworfen, und d', d'' sind die Projektionen von D' und D'', so treten d' und d'' wieder als Durchmesser der entstan-

denen Ellipse auf, aber nicht mehr als Axen, den einzigen Fall ausgenommen, wenn sie in der Projektion abermals rechte Winkel unter sich bildeten, und ich sage, *d'* und *d''* sind der Art konjugirte Durchmesser der Ellipse, daß jeder parallel ist zu den beiden Tangenten an den Endpunkten des andern, und daß jeder durch die Mitten aller Sehnen geht, welche dem andern parallel sind. Denn der Parallelismus zweier geraden Linien wird weder durch die gerade noch durch die schräge Projektion aufgehoben, und gleiche Theile einer geraden Linie bleiben in beiden Arten der Projektion gleich groß.

Das Quadrat, welches in Fig. *147* um den Kreis beschrieben worden, projicirt sich auf der Vertikalebene als das Parallelogramm $m'\,n'\,p'\,o'$ und das Rechteck, Fig. *146*, F'' F' G' G'', dessen Seiten den Quadratseiten parallel liegen, projicirt sich nach $\gamma'\,\gamma''\,\varphi''\,\varphi'$, und die beiden ursprünglich im rechten Winkel gegen einander stehenden Durchmesser A B, D'' E'' projiciren sich als die konjugirten Durchmesser $a'\,b'$, $\varepsilon'\,\delta'$. An den Enden von $a'\,b'$ sind die Tangenten $m'\,o'$, $n'\,p'$ zu $\delta'\,\varepsilon'$ parallel und an den Enden von $\delta'\,\varepsilon'$ sind die Tangenten $m'\,n'$, $o'\,p'$ zu $a'\,b'$ parallel. $a'\,b'$ halbirt die zu $\delta'\,\varepsilon'$ parallelen Sehnen $\varphi'\,\gamma'$, $\varphi''\,\gamma''$, gleichwie $\delta'\,\varepsilon'$ die zu $a'\,b'$ parallelen Sehnen $\gamma'\,\gamma''$, $\varphi'\,\varphi''$ halbirt.

Zusatz. Wir veranschaulichen in Fig. *148* (S. 243) eine praktische Anwendung des vorhergehenden Satzes von den konjugirten Durchmessern einer Ellipse. An eine Ellipse wurden zwei parallele Tangenten gezogen und man verlangt deren Berührungspunkte. Diese ergeben sich als die Enden eines Durchmessers, welcher durch die Mitten *r, s'* von zwei den Tangenten parallelen Sehnen der Ellipse geht. (Vergl. §. 148.)

Zweiter Zusatz. Die Eigenschaften der konjugirten Durchmesser gehören auch der Hyperbel an und, mit einiger Modifikation, der Parabel; doch lassen sie sich für diese Linien nicht aus der Parallel-Projektion des Kreises ableiten, wohl aber aus dessen polarer oder perspektivischer Projektion.

172. Allgemeine Form einer cylindrischen Fläche. Fig. *149* ($x\,y\,z\,\ldots\,x'\,y'\,z'\,\ldots$) ist eine beliebige Kurve, welche hier als Leitlinie einer cylindrischen Fläche auftritt. Durch den Punkt (x, x') dieser Leitlinie geht eine gerade Erzeugungslinie ($g\,x\,F$, $G'\,x'\,f'$) der Fläche; sie schneidet in (f, F) die horizontale, in (g, G') die vertikale Projektionsebene. Man hat durch andere Punkte der Leitlinie weitere gerade Erzeugungslinien gelegt, ihre Durchschnitte mit bei den Projektionsebenen bestimmt. Dadurch fanden sich

Punkte für die krumme Linie DFE, den Durchschnitt der Cylinderfläche mit der Horizontalebene, sowie für die krumme Linie $K'G'H'$, nach welcher die Cylinderfläche von der Vertikalebene geschnitten wird. Bei dieser Konstruktion sind die Punkte, wie B, D, E rc., zu berücksichtigen gewesen, welche den Konturen der Fläche entsprechen.

173. Schiefe kreisrunde Kegelfläche Fig. 150.

Ein Kreis $NMOP$, welcher in der Horizontalebene liegt, ist gegeben als Leitlinie, zugleich als Basis einer Kegelfläche, deren Scheitel in (s, s'), und deren graphische Darstellung vermittelst der Projektionen einer Reihe ihrer geraden Erzeugungslinien geschah.

$V'R'U'$ ... Durchschnitt der Kegelfläche mit der vertikalen Projektionsebene; er wird gebildet aus jenen Punkten, in welchen die einzelnen Erzeugungslinien durch die Vertikalebene dringen. Z. B. (Q, q') ein Punkt der Leitlinie, $(Q s r, q' s' R')$ gerade Erzeugungslinie, welche durch (Q, q') geht, (r, R') Durchdringung der Erzeugungslinie und der Vertikalebene.

Berührende Ebene der Kegelfläche. m sei die Horizontalprojektion des Berührungspunktes. $m\ s$ Horizontalprojektion der geraden Erzeugungslinie dieses Punktes. Die Erzeugungslinie kann die Basis in Q oder in Z durchkreuzen, was zu entscheiden bleibt. Angenommen, Z sei nur der scheinbare, Q der wirkliche Kreuzungspunkt, so ist dieser nach q' zu projiciren, daraus $q'\ s'$ Vertikalprojektion der Erzeugungslinie und m' auf $q'\ s'$ Vertikalprojektion des Berührungspunktes (m, m').

Die tangirende Ebene und die Kegelfläche berühren sich nun in der ganzen Ausdehnung der Geraden $(m\ Q, m'\ q')$, sie berühren sich also auch in Q und die Tangente $O\ T$ der Leitlinie im Punkte Q gehört der berührenden Ebene an; weil ferner diese Tangente, wie der Kreis, dem sie entspricht, in der Horizontalebene liegt, so ist sie zugleich Horizontalriß der tangirenden Ebene; eine Parallele $(m\ w, m'\ W')$ zu $Q\ T$, durch (m, m') gehend, liegt gleichfalls in der tangirenden Ebene und schneidet die Vertikalebene in einem Punkte (w, W') des Vertikalrisses $T\ W'$.

Dieser Vertikalriß muß, verlängert, auch durch den Punkt (r, R') der Vertikalebene gehen, wo diese von der Berührungslinie $(Q\ m\ r, q'\ m'\ R')$ durchschnitten wird, und der Riß muß in diesem Punkte Tangente sein an den Schnitt $V'R'U'$ ....

Sonderpunkte des Schnittes der Kegelfläche und der Vertikalebene. Diese liegen auf den geraden Erzeugungslinien, welche durch

nachbemerkte Punkte der Basis gehen. 1. Durch die Berührungspunkte N, P der aus s an den Kreis gezogenen Tangenten, welche die Konturen der Horizontalprojektion vorstellen; sie liefern Punkte wie (V', v) auf der äußersten Senkrechten $v\,V'$, welche zu betrachten ist als der Riß einer vertikal stehenden tangirenden Ebene $P\,v\,V'$ der Kegelfläche.

2. Durch die Berührungspunkte O, N der Basis mit den zwei vertikalen Tangenten $O\,o'$, $N\,n'$. Die Erzeugungslinien dieser Punkte bilden in der Vertikalprojektion den Kontur der Fläche und ergeben somit die Berührungspunkte wie U' von $n'\,s'$ und dem Schnitte $V'\,R'\,U' \ldots$ Denn die Umrißlinie $s'\,o'$ z. B. ist zu betrachten als Vertikalprojektion einer berührenden Ebene der Kegelfläche, welche auf der Vertikalebene senkrecht steht, und welche die Gerade $o'\,O$ als Horizontalriß hat.

3. Durch die Berührungspunkte M, L der Basis mit solchen Tangenten, welche der Grundlinie parallel sind, denn auf den Erzeugungslinien dieser Berührungspunkte liegen der höchste und der niederste Punkt des Schnittes $V'\,R'\,U' \ldots$. In der That denke man sich durch die Tangente bei L eine tangirende Ebene an die Kegelfläche gelegt, so wird deren Vertikalriß gleich dem Horizontalrisse der Grundlinie parallel, also selbst horizontal sein müssen. Wo aber die Tangente einer Ellipse horizontal ist, da wird auch der Berührungspunkt höchster oder tiefster Punkt der Kurve sein.

174. Allgemeine Form einer Kegelfläche Fig. *151*.

Wir nehmen hier (s, s') als Scheitel der Fläche und als Leitlinie eine solche Kurve, deren Horizontalprojektion ein Kreis $o\,q\,p \ldots$ ist und die Vertikalprojektion ein Kreisbogen $o'\,q'\,p' \ldots$

(q, q') ein beliebiger Punkt der Leitlinie, $(s\,q, s'\,q')$ die gerade Erzeugungslinie dieses Punktes; (Z, z') dessen Durchschnitt mit der Horizontalebene. Mehrere Punkte, wie (U, u'), (W, w'), auf gleiche Weise bestimmt, bezeichnen den Durchschnitt der Kegelfläche mit der Horizontalebene. Sonderpunkte dieses Schnittes werden nach gleichen Anschauungen wie bei Fig. *150* erkannt und fixirt.

Tangirende Ebene. (m, m') der Berührungspunkt, gegeben auf einer geraden Erzeugungslinie $(s\,m\,p, s'\,m'\,p')$; (p, p') Kreuzung der Erzeugungslinie mit der Leitlinie; $(q\,V, q'\,v')$ Tangente der Leitlinie im Punkte (q, q') [die Projektionen $q\,V$ und $q'\,v'$ sind ihrerseits Tangenten der Linien $p\,q\,o$ und $p'\,q'\,o'$]. (v', V) und (z', Z) Durchschnitte der Tangente und der Erzeugungslinie mit der Horizontalebene; daher $V\,Z$ Horizontalriß der tangirenden Ebene, zugleich auch Tangente des Schnittes $W\,U\,Z \ldots$ im Punkte Z.

$T' R'$ Vertikalriß der tangirenden Ebene; (r, R') Punkt auf einer Parallelen zur Tangente $(q\ V, q'\ v')$; T' Punkt auf einer Parallelen zum Risse $V\ Z$, beide Parallen durch den Scheitel (s, s') gehend.

175. **Konische und cylindrische Flächen als projicirende Flächen betrachtet.**

Man denkt sich im Raume irgend eine krumme Linie und dazu noch eine Ebene, auf oder in welche die Linie projicirt werden soll; durch jeden Punkt der krummen Linie geht eine projicirende Gerade, und die Gesammtheit dieser Geraden bildet eine scheitrechte Fläche, welche wir die projicirende Fläche der krummen Linie genannt haben. Die Projektion dieser Linie ist nun der Durchschnitt der Projektionsebene und der projicirenden Fläche. Bei der Parallelprojektion wird durch die Gesammtheit der projicirenden Linien stets eine cylindrische Fläche gebildet. So sind in der Fig. 151 die beiden projicirenden Flächen der Kurve $(p\ o\ q\ \ldots, p'\ o'\ q'\ \ldots)$ zugleich gerade kreisrunde Cylinderflächen, weil $p\ o\ q \ldots$ ein Kreis und $p'\ o'\ q'$ ein Kreisbogen. Die Kurve, welche als Leitlinie der Kegelfläche genommen ward, ist demnach entstanden aus dem wechselseitigen Durchschnitte zweier geraden Cylinderflächen. — Bei der perspektivischen Projektionsart gehen alle projicirenden Geraden durch den Mittelpunkt des Augapfels; soll darum irgend eine krumme Linie perspektivisch in eine Ebene projicirt werden, so bildet die Gesammtheit der projicirenden Geraden eine konische Fläche. Diese Vorstellung läßt sich auf die Kegelfläche im Allgemeinen übertragen. Nimmt man den Scheitel oder die Spitze der Fläche als den Ort des Auges, welches von hier aus die Leitlinie betrachtet, so sind die geraden Erzeugungslinien zugleich die projicirenden Geraden der Leitlinie, und die Durchschnittslinie der Kegelfläche mit einer Projektionsebene erscheint als die perspektivische Projektion der Leitlinie auf dieser Ebene. In unserer Fig. 151 werde auf solche Weise (s, s') als der Ort des Auges genommen, dann sind die Erzeugungslinien $(s\ p, s'\ p')$ u. s. w. projicirende Gerade der Kurve $(p\ o\ q\ \ldots, p'\ o'\ q'\ \ldots)$, und der Schnitt $W\ U\ Z$ erscheint als deren perspektivische oder **polare Projektion** auf der Horizontalebene. Polar nämlich nennt man die perspektivische Projektionsart, wenn sie auf rein geometrische Vorgänge angewendet wird, wobei es sich nirgends um optische Effekte handelt. Das Auge wird dann als der Pol oder Drehungsmittelpunkt aller projicirenden Geraden genommen.

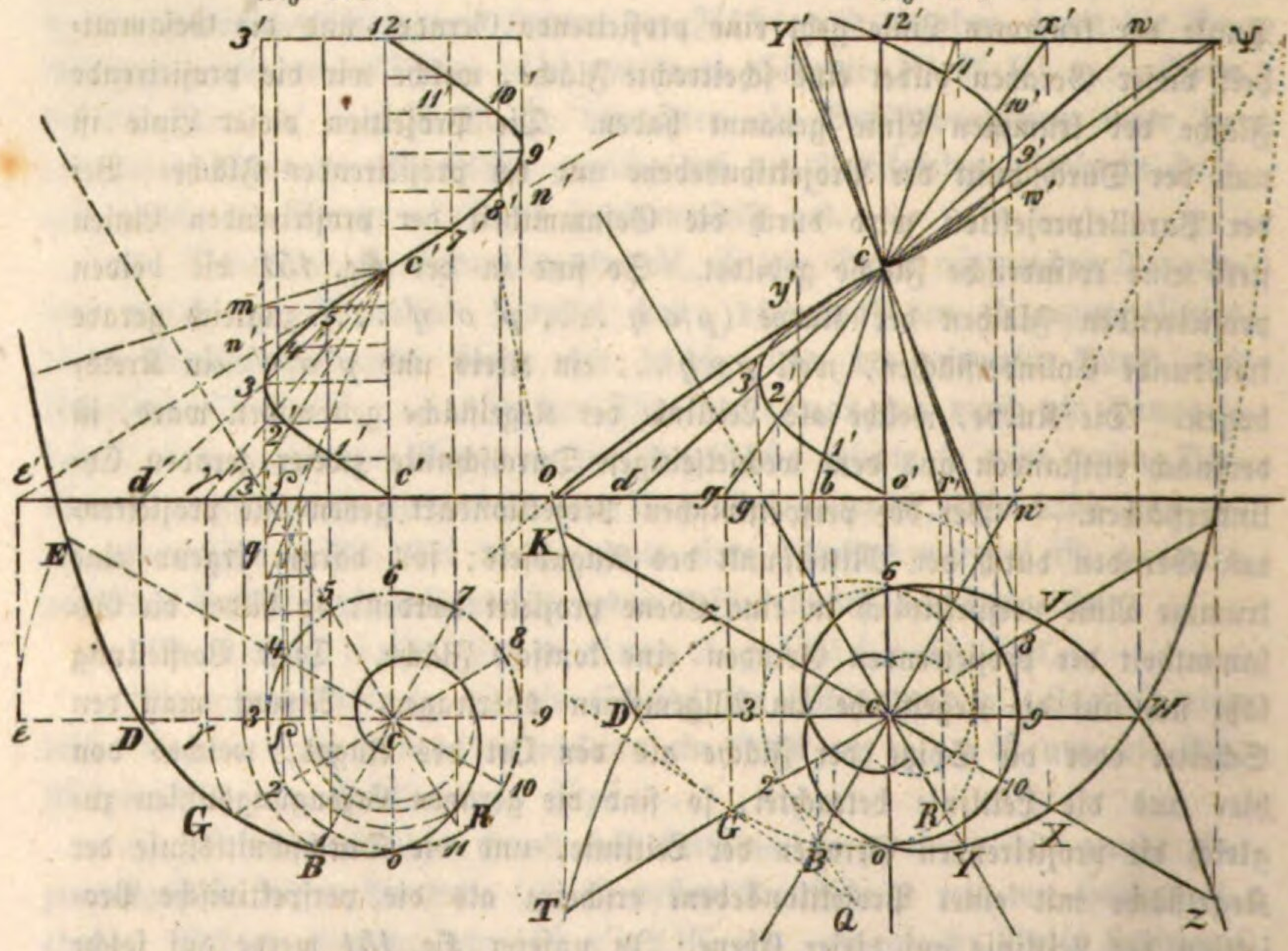
Wird gleicherweise in Fig. 150 (s, s') als Auge oder Pol genommen, dann tritt der vertikale Schnitt $V'\ U'\ R'$ auf, als die polare Projektion des

Kreises MNO ... und ist im gegenwärtigen Fall eine Ellipse. Weil aber bei zwei ebenen Figuren, deren eine die Projektion der andern, die Rollen vertauscht werden können, so läßt sich $V'R'U'$ als primitive Linie ansehen, und der Kreis MNO erscheint dann als die polare Projektion jener Ellipse.

176. Spirische Kegelfläche Fig. 153.

Fig. 152.

Fig. 153.



Als Leitlinie dient ihr eine cylindrische Spirale oder Schraubenlinie, deren Horizontalprojektion der Kreis $0.1.2.3.$ .... und deren Vertikalprojektion die Linie $0'1'2'3'$ ... $10'11'12'$ .. (die Konstruktion dieser letzteren sieht man in Fig. 153 ausführlich angegeben!). Ein Punkt (c, c') in der Axe dieser Spiralen ist als Scheitel der Kegelfläche genommen. Es vereinfachte unsere Konstruktionen, daß wir diesem Scheitel die Höhe eines Theilpunktes, $6'$ nämlich, gegeben. $(c\,0, c'\,0')$, $(c\,1, c'\,1')$, $(c\,2, c'\,2')$, $(c\,3, c'\,3')$ u. s. f. sind gerade Erzeugungslinien der Kegelfläche, sie durchschneiden die Horizontalebene in $0'\,B, G, D,$ .. ꝛc. und diese Punkte gehören der Durchschnittslinie unserer Kegelfläche mit der Horizontalebene an.

Sonderpunkte des genannten Schnittes. In dem Maße, als die Punkte (*3, 3'*), (*4, 4'*) . . ꝛc. der leitenden Spiralen weiter hinaufsteigen, erhalten die geraden Erzeugungslinien geringere Neigung gegen die Horizontalebene, und die Durchschnittspunkte *D, K,* . . ꝛc. fallen weiter hinaus. Ist man aber bei dem 6. Theilpunkte angelangt, welcher unserer Annahme zufolge gleich hoch liegt mit dem Scheitel (*c, c'*) der Kegelfläche, dann ist hier die Erzeugungslinie (*c 6, c'*) selbst horizontal geworden, kann darum die Horizontalebene nicht mehr durchschneiden, mindestens nur, wie man auch sagen kann, in einer unendlichen Entfernung. Die Linie *B G D K* dehnt sich daher bis ins Unendliche und die genannte wagrechte Erzeugungslinie, gleich wie ihre Projektion *c 6*, sind asymptotische Gerade derselben. Auf der andern Seite muß man sich die Schraubenlinie unter der Horizontalebene fortgesetzt denken und die unterhalb liegenden Theilpunkte liefern Punkte wie *R* . . ꝛc., innerhalb des Kreises *0 1 2 3* . . . . . Aber bei noch so tiefem Abwärtssteigen wird niemalen eine der geraden Erzeugungslinien senkrecht werden können, es wird sich daher die Linie *G B o R* in zahllosen Windungen stets dem Centrum nähern, ohne es jemals zu erreichen. An den beiden Eigenthümlichkeiten, welche so eben besprochen wurden, wird man erkennen, daß die Linie *R o B G D K* . . . eine hyperbolische Spirale sei. Bd. I, S. 181.

177. Fortsetzung. Unsere spirische Kegelfläche ward auch oberhalb durch eine wagrechte Ebene begränzt, in solcher Entfernung von der unteren, daß (*c, c'*) die Mitte zwischen beiden Gränzflächen einnimmt. Den Schnitt der Kegelfläche durch ihre obere Gränzfläche zu erhalten, wolle nur beachtet werden, daß die Stücke aller geraden Erzeugungslinien zwischen der oberen und unteren Ebene im Scheitel (*c, c'*) halbirt werden. Deshalb trage man *K c* von *c* nach *Z, D c* von *c* nach *W, G c* von *c* nach *V* u. s. f. und die erhaltenen Punkte *Z, W, V, 6* . . werden eine zweite hyperbolische Spirale bilden, welche zur oberen Gränze der Kegelfläche gehört. — Ich sage absichtlich „zur oberen Gränze gehört“, denn die Linie *Z W V* . . . ist mit Nichten die vollständige obere Gränze. In der That gehen die geraden Linien, welche wir so eben nach aufwärts verlängert haben und welche den Theilpunkten (*1, 1'*), (*2, 2'*), (*3, 3'*) . . ꝛc. der spirischen Leitlinie entsprechen, nicht auch durch die gleicharmigen oberen Theilpunkte (*7, 7'*), (*8, 8'*), (*9, 9'*) . . . . ꝛc. dieser Linie. Vielmehr entsprechen diesen Punkten unter andern die Erzeugungslinien (*c 9, c' 9'*), (*c 10, c' 10'*), (*c 11, c' 11'*) . . . . ꝛc., welche von der Endfläche *Y* Ψ in den Punkten (*w', W*), (*x', X*) geschnitten werden, und diese Punkte *W, X, Y* . . . gehören einer dritten hyperboli-

schen Spirale an, welche symmetrisch liegt zur zweiten bezüglich des verlängerten Durchmessers *3. 9 W.* — Werden nun die zuletzt genannten Erzeugungslinien wieder von (*s, s'*) aus nach abwärts bis zur Horizontatebene verlängert, dann durchschneiden sie dieselbe in Punkten wie *T, D, Z. 6 . . .,* welche einer vierten hyperbolischen Spiralen angehören. Diese liegt symmetrisch zur ersten und *9 3 D* ist deren Symmetrieaxe. Sonach bildet sich die gesammte obere und untere Begränzung der vorstehenden Kegelfläche aus vier, paarweise in der unteren und der oberen Gränzfläche liegenden gleichen hyperbolischen Spiralen, deren Horizontalprojektionen symmetrisch gestellt erscheinen gegen die beiden unter sich rechtwinkligen Durchmesser *0. 6* und *3. 9.* Dies Ergebniß weist darauf, daß die spirische Kegelfläche, so weit sie, wie in unserer Figur, einem Umgange der spirischen Leitlinie entspricht, aus zwei Doppelnetzen bestehe. Zwei davon werden von den ursprünglichen Ergänzungslinien gebildet, die beiden anderen durch deren Verlängerungen. Was die beiden ersten Flächennetze insbesondere anlangt, so gehen sie von der wagrechten Erzeugungslinie (*c 6, c'*) ununterbrochen ineinander über, und hier findet auch eine Beugung (inflexio) der Fläche statt, wie dies die Kurve *O y' c' w' Ψ'* .. nachweist, welche den Durchschnitt der Fläche mit der vertikalen Projektionsebene darstellt.

Anmerkung. Die Bogen *D K, D T* in Fig. *153* sollten nicht punktirt sein.

177. Tangirende Ebene der spirischen Kegelfläche. Wir unterstellen, es werde jene Ebene verlangt, welche die Fläche längs der Erzeugungslinie (*c 2 G, c' 2' g'*) berührt. Diese Erzeugungslinie geht durch (*2, 2'*) der Leitlinie. In diesem Punkte (*2, 2'*) muß die Tangente der Leitlinie konstruirt werden, welche mit (*c G, c' g'*) die Stellung der tangirenden Ebene festsetzt. Horizontalprojektion genannter Spiraltangente ist die Tangente 2 Q des Kreises 0. 1. 2. . .; weil nun (*0, 0'*) Anfangspunkt der Leitlinie, hat man den Bogen 0 1 2 zu verstrecken und seine Länge auf der Tangente aufzutragen, wo sie von 2 bis Q reicht. Q ist darum Fußpunkt der Spiraltangente und Q G Horizontalriß der berührenden Ebene. Wie deren Vertikalriß zu bestimmen bliebe, wird nach so vielfach hierüber Gesagtem klar sein.

Die Asymptote der hyperbolischen Spiralen. R O B G D . . . Weil die Erzeugungslinie (*c 6, c'*) jene ist, auf welcher im Unendlichen ein Spiralpunkt liegt, so wird die Ebene, von welcher die Kegelfläche längs dieser Erzeugungslinie berührt wird, eine asymptotische Ebene des Schnittes R O B G . . . sein, und ihr Horizontalriß die Asymptote der Linie. Man

konstruire somit die Tangente im Punkt (*6, c'*) der spirischen Leitlinie; ihre Horizontalprojektion wird die zu 3. 9 parallele Kreistangente im Punkt 6 sein. Auf diese Tangente trage man nach der gehörigen Seite (nach links) von 6 aus den verstreckten halben Kreisumfang, und der Endpunkt, welcher *R* heißen mag, wird, wie vorhin Q, dem Horizontalriß der tangirenden Ebene angehören, welcher Riß auf der Kreistangente senkrecht stehen muß. (Der Leser wird die betreffenden Linien verzeichnen, welche wir unterdrückt haben.)

178. Noch Etwas über die Zeichnung der hyperbolischen Spiralen. In Fig. *152* sieht man die Spirale R O B G D E ... aus Fig. *153* nochmals reproduzirt. Insofern es sich nur um die Zeichnung der Linie handelt, so ist die Vertikalprojektion $0' 1' 2' 3' \ldots$ der spirischen Leitlinie dabei entbehrlich. Denn nachdem die halbe Ganghöhe $0' 6'$ in so viel gleiche Theile zerlegt worden, als der halbe Umfang 0. 1. 6. (bei uns in 6 Theile), und wie die Figur zeigt, auf der Senkrechten 3. 3' die Theilpunkte m', n', 3', ... markirt, zog man die schiefen Linien $c' m'$, $c' n' \varepsilon'$, $c' 3' \delta'$, c .... $c' \rho$ q .... bis zur Grundlinie, und es blieben jetzt aufzutragen $0' \beta'$ von c nach B, $0' \gamma'$ von c nach G ...., $0' \rho'$ von c nach R u. s. w., und die Kurvenpunkte waren bestimmt. Hierbei leitete die Vorstellung, daß die einzelnen Erzeugungslinien (*c 1, c' 1'*), (*c 2, c' 2'*) ... ꝛc. um die Axe c gedreht und in die Ebene c D umgelegt worden seien, wo sie die Stellungen $c' \beta'$, $c' \gamma'$ .. ꝛc. nehmen mußten. Damit waren die Fahrstrahlen, wie $c B = 0' \beta'$, $c G = 0 \gamma$ ... ꝛc., ihrer Länge nach gefunden und nur noch gehörigen Ortes aufzutragen.

Anmerkung. In der Form ihrer Krümmung zeigt die hyperbolische (auch logarithmische) Spirale größere Mannichfaltigkeit als die archimedische und ihr Studium empfiehlt sich deshalb dem technischen Zeichner. Wir geben solchen den Rath, diese Linie noch einigemal als polare Projektion der Schraubenlinie zu entwerfen, dabei aber den Scheitel (*c, c'*) nach (*c, 12'*) und höher zu versetzen.

179. Allgemeinste Formen der aufwickelbaren Flächen.

Konische wie cylindrische Flächen sind, was ihre Stammverwandtschaft mit den aufwickelbaren Flächen im Allgemeinen anbelangt, als ganz singuläre Arten zu betrachten, an welchen die Eigenthümlichkeiten der Gattung nur wenig hervortreten. Frägt man nach der allgemeinsten Art, wie durch die Bewegung einer geraden Erzeugungslinie aufwickelbare Flächen hervorgebracht werden, so kann hierauf folgende Antwort dienen: „Denkt euch, es

sei als Leitlinie gegeben eine krumme Linie von sogenannter doppelter Krümmung, §. 72, eine Linie nämlich, deren Theile nicht in einer und derselben Ebene liegen; ferner sei an einem Punkte derselben die Tangente vorhanden; diese Tangente werde als Erzeugungslinie mobil gemacht und bewege sich der Art, daß ihr Berührungspunkt auf der Leitlinie fortgleitet, während sie selbst stets Tangente bleibt an dieser Linie. Hat nun der Berührungspunkt den ganzen Umfang der Leitlinie durchlaufen und man denkt sich die Erzeugungslinie in all' ihren Stellungen gleichzeitig vorhanden, so hat man damit auch die Gesammtheit aller Tangenten der Leitlinie und es bleibt nachzuweisen, daß die krumme Fläche, welche von diesen Tangenten gebildet wird, eine aufwickelbare sei, sowie auch, daß sie die allgemeinste Form solcher Flächen repräsentire. Zu solchem Behufe muß man sich die Leitlinie in ihre Linienelemente zerlegt denken und diese Elemente sollen der Reihe nach mit E', E'', E''', E'''' ... bezeichnet sein. Je zwei Nachbarelemente E' und E'', dann E'' und E''' ꝛc. schneiden sich in den Punkten P', P'', P''' u. s. f., welches aufeinanderfolgende Punkte der Leitlinie sind. Die Linienelemente sollen jetzt verlängert werden, ein jedes nach beiden entgegengesetzten Richtungen und dadurch zu Tangenten der Leitlinie umgewandelt. T', T'', T''', T'''' sei die Bezeichnung der aufeinanderfolgenden Tangenten. Nun müssen T' und T'' sich in P' schneiden, liegen also mit ihren angehörigen Elementen E' und E'' in derselben Ebene. T'' und T''' müssen sich in P'' durchkreuzen und liegen mit den Elementen E'' und E''' wieder in einer Ebene, welche jedoch eine andere ist als jene der zwei ersten Tangenten, weil, der Voraussetzung gemäß, die Elemente der Leitlinie nicht in einer und derselben Ebene enthalten sein dürfen. Desgleichen werden die Tangenten T''' und T'''' in dem Punkte P''' sich schneiden und nebst den Elementen E''' und E'''' in einer dritten Ebene liegen u. s. f. Soll nun die erste Tangente T' als Erzeugungslinie sich bewegen, um nach einander in die Stellungen T'', T''' ꝛc. überzugehen, so muß sie sich erstmals um P' als Centrum drehen, ohne aus der Ebene der beiden ersten Elemente oder deren Verlängerungen zu weichen; hat sie die Stellung T'' eingenommen, so wird P'' Drehungsmittelpunkt, um die Stellung T''' zu gewinnen.

So liegen also die Tangenten oder Erzeugungslinien, paarweise aufeinander folgend, immer in einer Ebene und zwar in stetig wechselnder Ebene, und die unendlich schmalen Streifen einer jeden Ebene, welche von den entsprechenden Tangenten begränzt werden, sind die Elemente der Fläche, welche somit als eine aufwickelbare erkannt ist.

Der Leitlinie, welche von den geraden Erzeugungslinien berührt wird, fällt bei dieser Fläche eine besondere Bedeutung zu, sie muß nämlich eine ausspringende scharfe Kante bilden und die Fläche in mehrere Netze spalten, wie es schon der Scheitel bei den konischen Flächen thut. Es scheint deswegen auch gerechtfertigt, der Linie einen besonderen Namen zu geben, wozu wir „Rückkehrkante" (linea regressus) gewählt haben, weil hier eine Rück- oder Widerkehr der Fläche stattfindet, ähnlich wie es bei dem Rückkehrpunkte (punctum regressus) einer krummen Linie (vergl. Fig. *181*) in Beziehung auf den Lauf dieser Linie der Fall ist. Bei den konischen Flächen sieht man die Rückkehrkante auf einen Punkt zusammen geschwunden, in welchem sich alle geraden Erzeugungslinien kreuzen, und bei den cylindrischen Flächen ist dieser Punkt in unendliche Entfernung übergegangen.

Wäre als Leitlinie oder Rückkehrkante eine ebene Kurve genommen worden, so vermöchte durch die Bewegung ihrer Tangente nur wiederum die Ebene der Linie hervorgebracht zu werden und überall keine krumme Fläche.

180. Fortsetzung. Es verbleibt uns noch die zweite Behauptung zu erhärten, daß die obige aufwickelbare Fläche mit ihrer Rückkehrkante auch die ganze Gattung in ihrer allgemeinsten Form repräsentire. Nun sind ebene Flächenelemente, jegliches begränzt durch zwei unendlich nahe auf einander folgende gerade Erzeugungslinien, die kennzeichnenden Bestandtheile der Gattung. Aber von zwei geraden Linien in einer Ebene läßt sich im Allgemeinen behaupten, daß sie sich durchschneiden. Geschieht dies erst in unendlicher Entfernung, so sind die Linien parallel. Das Durchschneiden der Geraden ist also die Regel und ihr Parallelismus nur ein besonderer Fall dieses Durchschneidens. Es werden darum auch die Flächenelemente einer aufwickelbaren Fläche in ihrer allgemeinsten Form immer von zwei geraden Linien begränzt sein, welche sich unter einem unendlich kleinen Winkel durchschneiden, und in der That kommen parallelstreifige Elemente nur den cylindrischen Flächen zu. Will man die winkelförmigen Elemente zu einer Fläche aneinander reihen, so muß dieses begreiflich in stetiger Folge geschehen. Werden dabei die Scheitel aller Elemente in einem einzigen Punkte vereint, dann erzeugt man immer eine Kegelfläche, welche bereits als besondere Art der aufwickelbaren Flächen erkannt worden. Eine allgemeinere Form zu gewinnen, werden also die Flächenelemente so aneinander gereiht oder gestoßen werden müssen, daß die Erzeugungslinien sich aufeinanderfolgend durchkreuzen. Es mögen die einzelnen Flächenelemente der Reihe nach mit F', F'', F''' ... bezeichnet werden. Die Gränzlinien der Elemente, welche zu Erzeugungslinien der aufwickelbaren

Fläche verwendet werden müssen, seien $L', L'', L'''\ldots$, nämlich L' und L'' die Gränzlinien des ersten Elementes, L'' und L''' die Gränzlinien des zweiten, L''' und L'''' die Gränzlinien des dritten Elementes u. s. f. Der Kreuzungspunkt von L' und L'' im ersten Element heiße P', der Kreuzungspunkt von L'' und L''' im zweiten Element heiße P'' u. s. w. Jetzt lassen sich die zwei ersten Elemente der Art verbinden, daß die beiden L'' in eins zusammenfallen, daß die Elemente einen unendlich kleinen, sonst beliebigen Flächenwinkel bilden, und endlich, daß P'' eine nur unendlich kleine Entfernung von P' erhalte. Den vereinten zwei Elementen füge man jetzt das dritte bei, nach gleicher Art und Weise. Das L''' des dritten Elementes muß mit dem L''' des zweiten zusammenfallen, das zweite Element muß mit dem dritten einen unendlich kleinen Flächenwinkel bilden, welcher ein anderer sein kann als jener der zwei ersten Elemente; endlich muß P''' eine unendlich kleine Entfernung von P'' erhalten. Hat man es bei solchem Gebahren dahin gebracht, aus unendlich schmalen und unbegränzt langen, ebenen Elementen eine aufwickelbare krumme Fläche zu komponiren, wie verhält sich's schließlich mit den Linien und Punkten dieser Fläche? Antwort — die geraden Erzeugungslinien $L', L'', L''', L''''\ldots$ durchschneiden sich aufeinanderfolgend in Punkten $P', P'', P'''\ldots$ ꝛc. P' und P'' liegen auf L'' und zwischen ihnen ein unendlich kleines Stückchen dieser Linie, ein Element E' derselben; P'' und P''' liegen auf L''' und zwischen ihnen ein unendlich kleines Element von L'''. Nun sind $E', E'', E''', E''''\ldots$ die Elemente einer krummen Linie, die Erzeugungslinien $L', L'', L'''\ldots$ sind Verlängerungen dieser Elemente, also Tangenten der krummen Linie; damit aber giebt diese sich zu erkennen als die Rückkehrkante unserer aufwickelbaren Fläche, welche die Gesammtheit aller Tangenten dieser Rückkehrkante in sich schließt. Auf diesem letzten synthetischen Wege kommen wir demzufolge als Ergebniß unserer Forschung bei der schon bekannten Flächenform an, deren Mustergiltigkeit bewiesen werden sollte.

181. Aufwickelbares Helikoid Fig. *154* und *155*.

Nachdem uns die cylindrische Spiral- oder Schraubenlinie als einfachste aller Linien von doppelter Krümmung bekannt, liegt die Vermuthung schon nahe, daß diese Linie, als Rückkehrkante genommen, einer aufwickelbaren Fläche von charakteristischem Gepräge das Dasein geben werde, was unsere Figuren sicherlich bestätigen. Diese stellen zwei aufwickelbare Flächen dar, erzeugt durch eine Gerade, welche als Tangente auf einer Schraubenlinie hingleitet. Das Wort Helikoid, Schneckenfläche, ward dem lateinischen helix

nachgebildet. Die Axe der Schraubenlinie steht in beiden Figuren senkrecht, und ihre Horizontalprojektion ist ein Kreis vom Durchmesser A B. In der ersten Figur ward der Abstand zwischen der horizontalen Projektionsebene und der Horizontalebene W′ V′ gleich genommen der Höhe eines Umganges der Linie, und beide Horizontalebenen begränzen die Fläche oben wie unten.

Fig. 154.

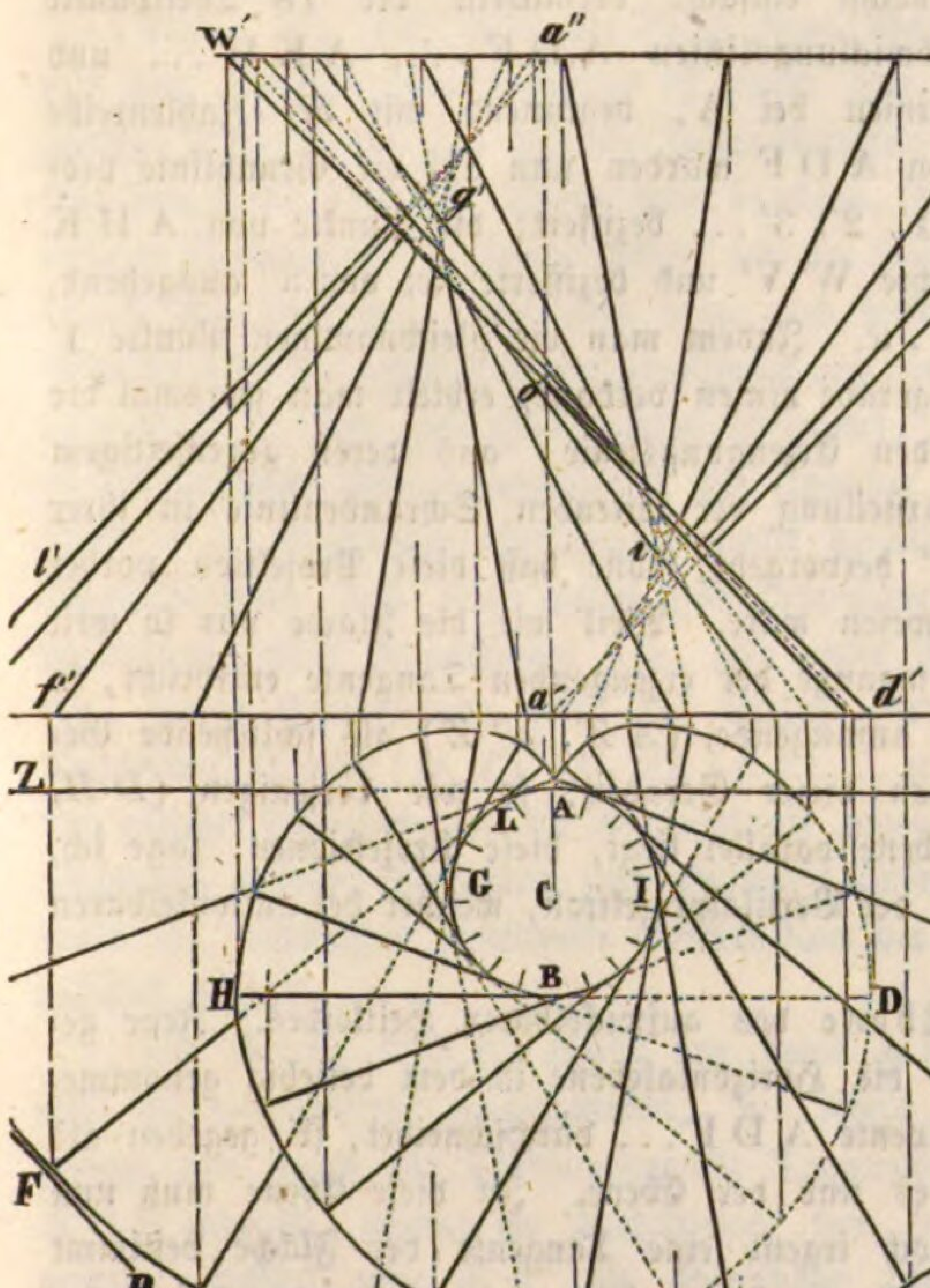
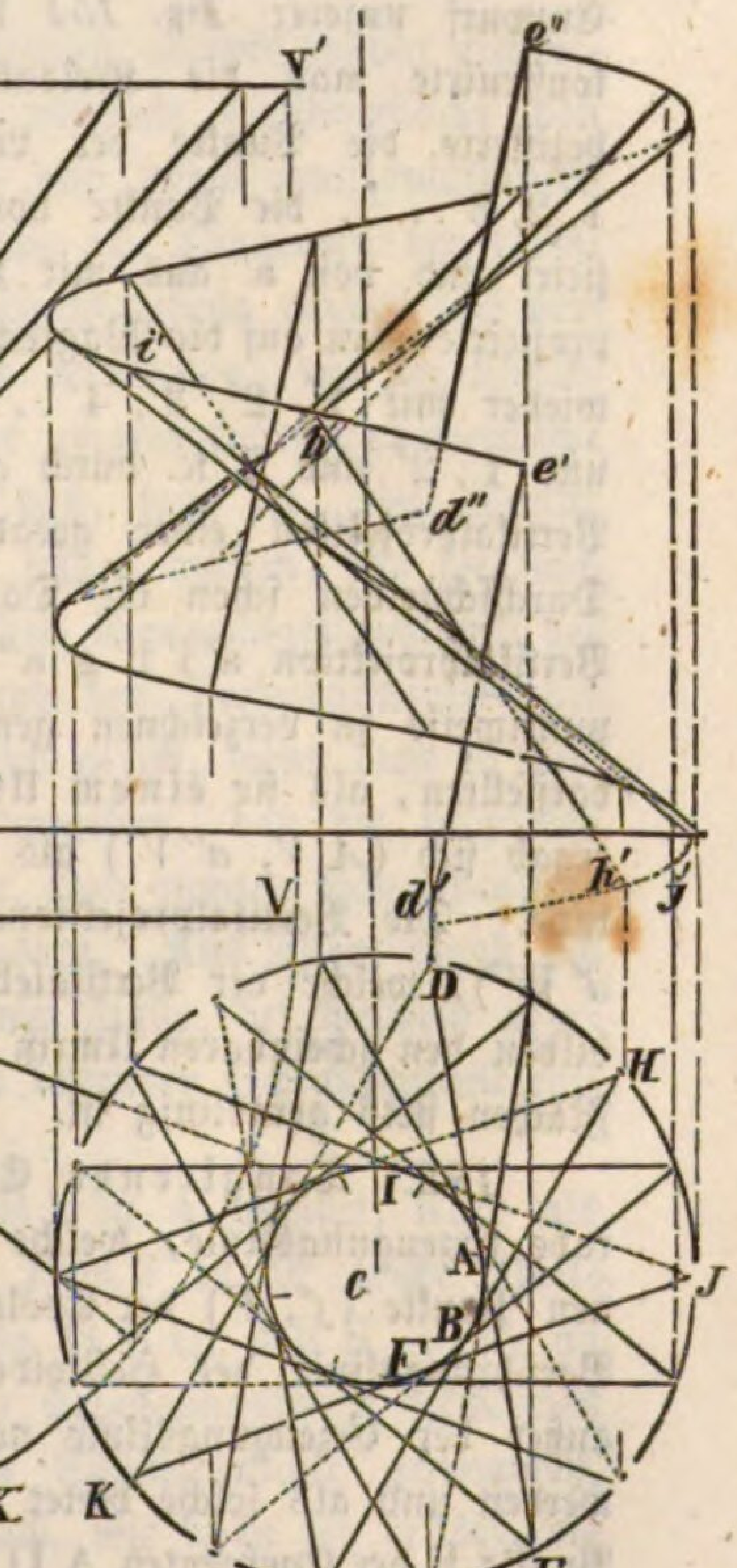


Fig. 155.



In dem Punkte (*A, a′*) der Horizontalebene nimmt die Spirale ihren Anfang und vollendet einen Umgang über jenem Punkte in (*A, a″*). Die Linie ward vermittelst 18 Hilfspunkten konstruirt und unsere Figur giebt die Projektionen der 18 Tangenten, welche den Theilpunkten entsprechen. Diese Tangenten oder Erzeugungslinien werden durch die horizontale Projektions=

ebene in den Punkten einer Linie A D F ... geschnitten, welche die untere Gränzlinie der Fläche bildet und in der man unschwer eine Abwickelungslinie des Kreises A I B, wie der Schraubenlinie (*A I B*, *a' i' b' g' a''*), erkennen wird, §§. 64 u. 69. Die obere Gränzlinie, deren Projektion A H K V, ist der Durchschnitt der Fläche und der Horizontalebene W' V', also gleichfalls eine Kreisabwickelungslinie. Das Wahrnehmen dieser Eigenthümlichkeit machte den Entwurf unserer Fig. *154* höchst einfach: vermittelst der 18 Theilpunkte konstruirte man die Kreisabwicklungslinien A D F ..., A K H ... und bezifferte die Punkte der Linien bei A, beginnend mit der Zahlenreihe 1, 2, 3 ...., die Punkte von A D F wurden nun auf die Grundlinie projicirt und von a' aus mit 1', 2', 3' ... beziffert; die Punkte von A H K projicirte man auf die Wagrechte W' V' und bezifferte sie, von a'' ausgehend, wieder mit 1', 2', 3', 4' ... rc. Indem man die gleichnamigen Punkte 1' und 1', 2' und 2' rc. durch gerade Linien verband, erhielt man jedesmal die Vertikalprojektion einer geraden Erzeugungslinie, aus deren gegenseitigem Durchschneiden schon die Darstellung der leitenden Schraubenlinie in ihrer Vertikalprojektion a' i' b' g' a'' hervorgeht, ohne daß diese Projektion vorher punktweise zu verzeichnen gewesen wäre. Weil wir die Fläche nur so weit darstellten, als sie einem Umgange der erzeugenden Tangente entspricht, so ergab sich (*A V*, *a' V'*) als anfangende, (*A Z'*, *a'' Z'*) als schließende Gerade. Die Vertikalprojektionen dieser Geraden, so wie derjenigen (*D H*, *d' W'*), welche der Vertikalebene parallel liegt, diese Projektionen, sage ich, bilden den scheinbaren Umriß der Vertikalprojektion, welcher bei aufwickelbaren Flächen stets geradlinig ist.

182. Tangirende Ebene des aufwickelbaren Helikoides. Jene gerade Erzeugungslinie, welche die Horizontalebene in dem beliebig genommenen Punkte (*f'*, *F*) der Evolvente A D F ... durchschneidet, sei gegeben als Berührungslinie des Helikoides und der Ebene. In diese Ebene muß nun außer der Erzeugungslinie noch irgend eine Tangente der Fläche bestimmt werden und als solche bietet sich am bequemsten dar die Tangente F P im Punkte F der Evolventen A D F ...., dies F P muß auf der Projektion F L senkrecht stehen und ist zugleich Horizontalriß der tangirenden Ebene.

Anmerkung. In der berührenden Ebene des Punktes F hat man sich zwei auf einander folgende gerade Erzeugungslinien zu denken, welche das Berührungselement F L begrenzen. Die linearen Berührungselemente beider Erzeugungslinien und der spirischen Rückkehrkante (*A I B*, *a' i' b' g' a''*) gehören darum beide derselben tangirenden Ebene an. Diese ist also in Bezug

auf die Rückkehrkante die oskulirende Ebene derselben, an dem Punkte, dessen Horizontalprojektion L. Denkt man sich in der Ebene und durch die Mitte eines jeden Linienelementes eine Senkrechte auf das Element errichtet, so werden beide Senkrechten sich in dem Krümmungsmittelpunkte der Schraubenlinie an dem genannten Punkte, dessen Projektion L, durchkreuzen, §. 71.

183. Fig. *145* stellt ein Stück eines ähnlichen aufwickelbaren Helikoides dar, welches aber begränzt ist durch eine vertikale Cylinderfläche von gleicher Axe, C wie die leitende Schraubenlinie und deren Horizontalprojektion der Kreis D H E. Wolle man beachten, daß alle Tangenten der cylindrischen Schraubenlinie gleiche Winkel mit der Horizontalebene machen (bei vertikaler Axe nämlich), dann wird man auch bald entnehmen, wie die Durchschnittspunkte der geraden Erzeugungslinien und der umgrenzenden Cylinderfläche (*D*, *H*, *J* . . . sind ihre Horizontalprojektionen), daß, sage ich, diese Punkte in den gleichen Höhenunterschieden auf einander folgen müssen, wie die nach A, B, F . . . projicirten Berührungspunkte derselben Erzeugungslinien mit der Schraubenlinie, daß diese letzten Höhenunterschiede den Drehungswinkeln der Erzeugungslinien proportional sind, also unter sich gleich, wenn diese es sind. Aus diesen Erwägungen wird der Schluß hervorgehen, daß die fraglichen Durchschnittspunkte (*D, d'*), (*H, h'*), (*J, j'*) . . . ꝛc. einer zweiten Schraubenlinie von gleicher Ganghöhe wie die Rückkehrkante zugehören. Aus Allem ergab sich folgendes einfache Verfahren zum Entwurfe unserer Figur, bei welchem abermals die vorgängige punktweise Konstruktion der leitenden Schraubenlinie entbehrlich erscheint.

Die Gerade D A E, welche den Kreis A B I in A berührt, ward als erste Erzeugungslinie angenommen, der Kreis D H J in 9 gleiche Theile zerlegt und durch die Theilungspunkte Tangenten H B L, J F K . . . ꝛc. an A B F gezogen, womit die Projektionen von 9 Erzeugungslinien gewonnen waren. Sofort war d′ d″ als Ganghöhe der Schraubenlinie genommen, diese Höhe in 9 gleiche Theile zerlegt und darnach, wie schon oft erklärt, die Projektion d′ h′ j′ . . . der unteren Grenzspirale verzeichnet. Dem Endpunkte (*E, e'*) gab man eine passende Höhe und zeichnete die Projektion e′ h′ j . . e″ der oberen Grenzspiralen, gleichwie die der unteren. Alsdann blieben nur noch d′ mit e′, h′ mit h′, j′ mit i′ durch gerade Linien zu verbinden, um damit der Vertikalprojektion die Vollendung zu geben.

Anmerkung. Auf fernere Erzeugungsweisen scheitrechter Flächen werden wir gelegenheitlich der Umhüllungsflächen zurückkommen.

Windische Flächen.

Wiederholen wir noch einmal: windische Flächen sind aus windischen Flächenelementen zusammengesetzt, wie die aufwickelbaren Flächen aus ebenen Elementen. Windische Elemente aber werden jedesmal erzeugt werden, wenn die geraden Erzeugungslinien, paarweise auf einander folgend, nicht in einer Ebene liegen. Ob dem also sei oder nicht, bleibt im gegebenen Falle nachzuweisen.

Das windische Paraboloid.

184. Wer hat nicht schon ein viereckiges Bret getroffen, was nicht mehr eben ist, sich geworfen hat, wie man zu sagen pflegt, windisch geworden, nach dem Ausdrucke der Holzarbeiter. Die Oberfläche des Brettes hat eine Krümmung angenommen, doch können dabei zwei Kanten, drei, ja alle vier, noch geradlinig sein. Diese Form einer gekrümmten Oberfläche, welche von vier geraden Linien eingeschlossen ist, wolle man in der Vorstellung festhalten, denn es ist die Grundform der windischen Fläche, von welcher zu handeln wir im Begriffe stehen; ja in gewissem Sinne läßt sich sagen, sie sei die Grundform aller windischen Flächen überhaupt.

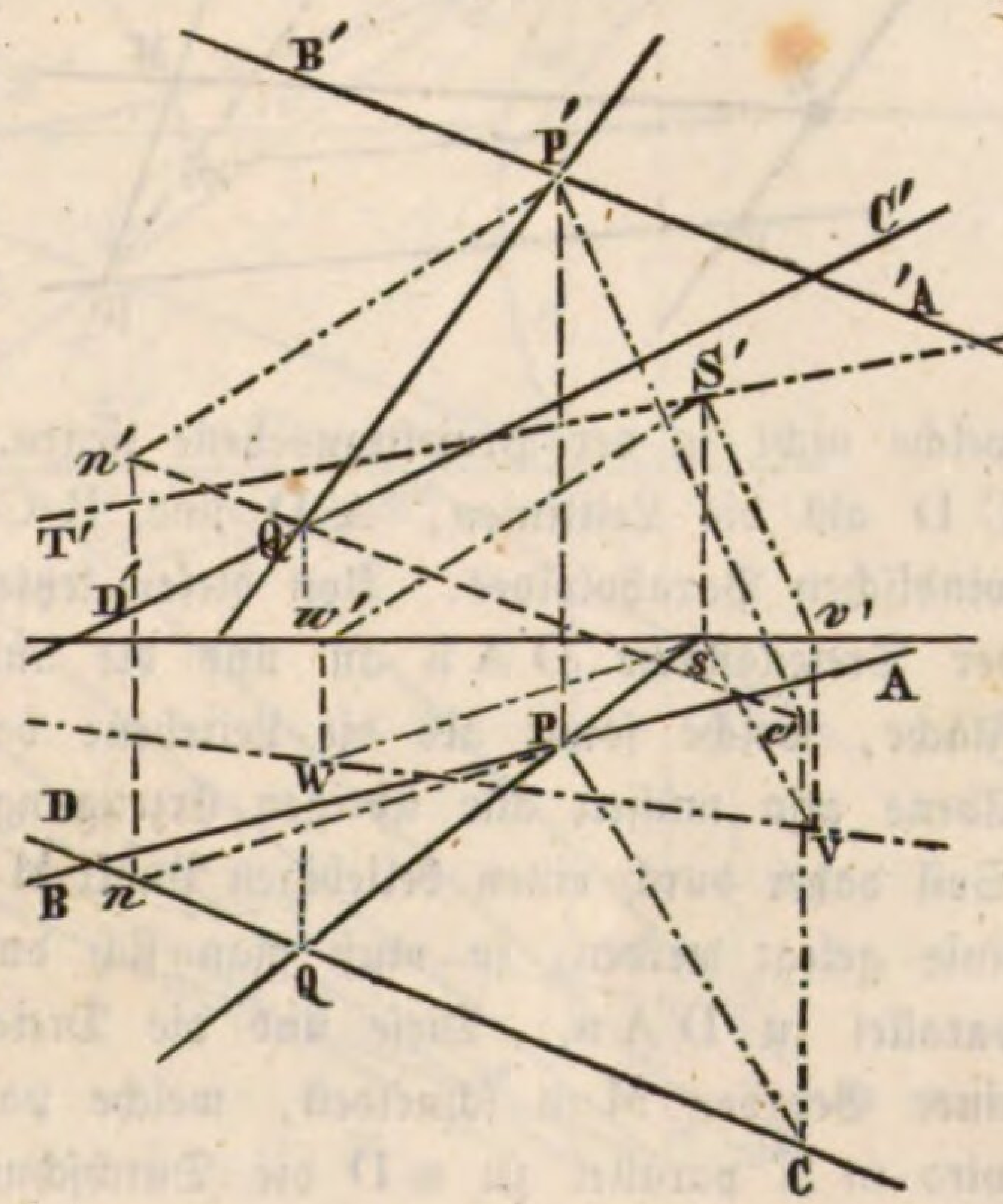
Erzeugung des windischen Paraboloides. Es sind gegeben zwei gerade Leitlinien, welche zusammen nicht in einer Ebene liegen, dies ist die conditio sine qua non, d. h. die ganz unerläßliche Grundbedingung. Eine gerade Erzeugungslinie gleitet auf beiden Leitlinien der Art hin, daß sie stets parallel bleibt zu einer Ebene, welche wir die Leitebene nennen.

Konstruktion der Fläche. Mit M sei ein Punkt der ersten Leitlinie bezeichnet, man verlangt die gerade Erzeugungslinie, welche durch diesen Punkt geht. — Durch M leget eine Ebene parallel zur Leitebene, bestimmt den Durchschnittspunkt N dieser Ebene mit der zweiten Leitlinie, verbindet mit M durch eine gerade Linie und MN wird die verlangte Erzeugungslinie sein, denn sie schneidet jede Leitlinie, liegt in einer Ebene, welche der Leitebene parallel steht, ist also selbst dieser Ebene parallel. — P sei nun auf der ersten Leitlinie ein Nachbarpunkt von M; durch P legt man wieder eine Ebene parallel zur Leitebene, sie wird die zweite Leitlinie in einem Punkte Q schneiden und PQ ist eine zweite, der ersten benachbarte Erzeugungslinie. Ich sagte jetzt, MN und P Q können nicht in einer Ebene liegen, weil die vier Punkte M, P, N, Q dieser Ebene angehören müßten; da sie aber paarweise auf den Leitlinien liegen, so müßten diese selbst in der genannten Ebene enthalten sein, was der Voraussetzung widerstreitet.

Begreiflich ist das Ergebniß unabhängig von dem Abstande MP, wäre dieser selbst unendlich klein. Im letzteren Falle aber werden MN in PQ auf einander folgende Erzeugungslinien, welche ein unendlich schmales, unbegrenzt langes windisches Flächenelement begrenzen.

185. Anwendung auf einen gegebenen Fall Fig. *156.* $(AB, A'B')$ und $(CD, C'D')$ seien die zwei geraden Leitlinien; daß diese nicht in einer Ebene liegen, geht daraus hervor, daß die Horizontalprojektionen sich in einem Punkte kreuzen, welcher nicht senkrecht unter dem Kreuzungspunkt der Vertikalprojektionen liegt. Die Linien schneiden sich nicht und daß sie nicht parallel sind, zeigt der Augenschein. S′ T′ und V W seien die Risse der Leitebene. (P, P') ein Punkt der ersten Leitlinie, dessen entsprechende Erzeugungslinie gezeichnet werden soll. Durch den Punkt muß eine Ebene parallel zur Leitebene gelegt und deren Durchschnitt (Q, Q') mit der zweiten Leitlinie gesucht werden, womit ein zweiter Punkt der Erzeugungslinie gefunden sein wird. Die Ausführung dieser Konstruktion den Verhältnissen unserer Figur anzubequemen, haben wir auf dem Vertikalrisse der Leitebene einen Punkt S′ angenommen, auf dem Horizontalrisse zwei Punkte V, W und mit diesen in der Leitebene ein

Fig. *156.*

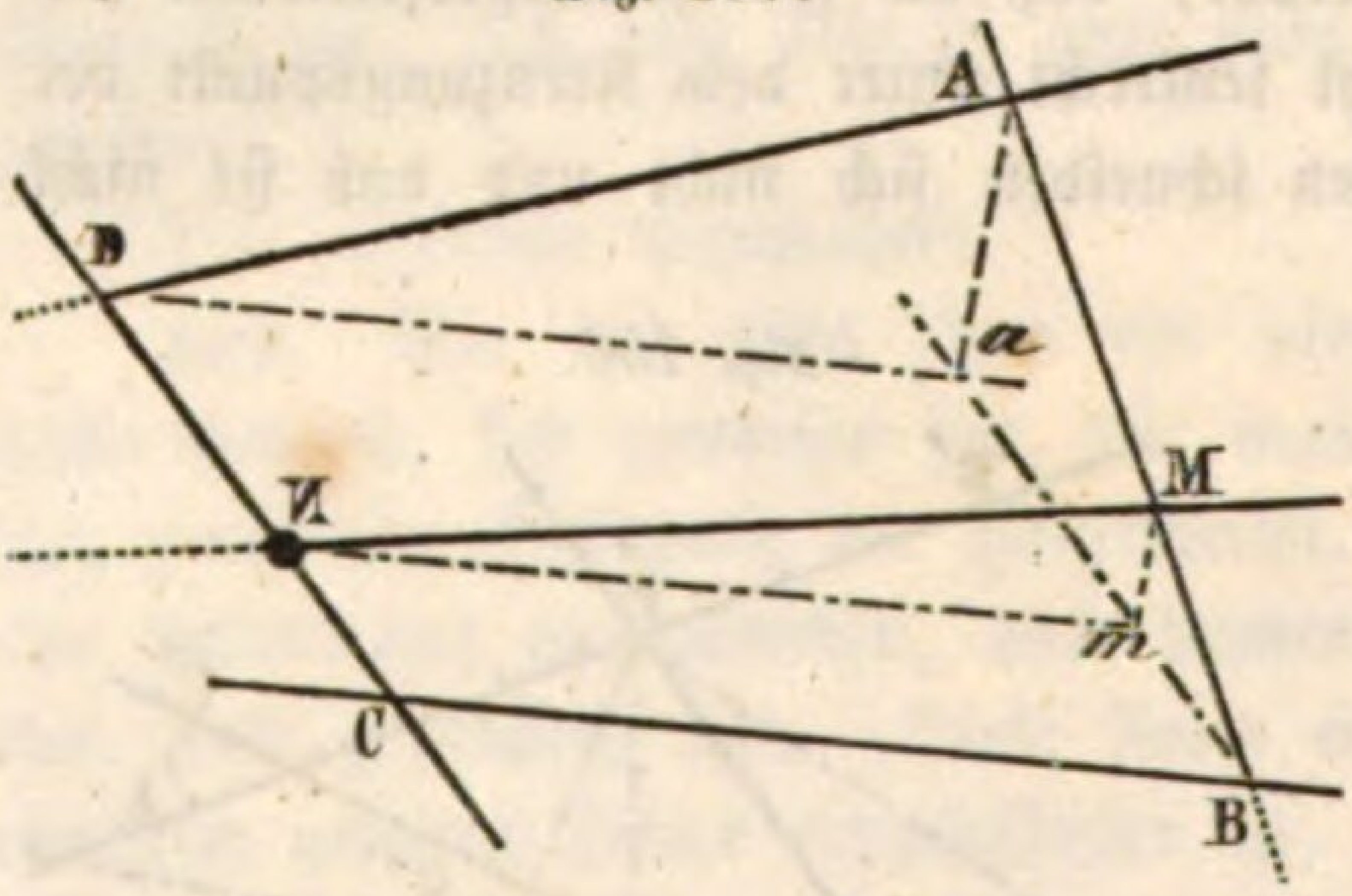


Dreieck $(V s W, v' S' w')$ gebildet. Durch (P, P') zogen wir jetzt $(PC, P'c')$ parallel zur Dreiecksseite $(s V, S' v')$ und $(Pn, P'n')$ parallel zur Dreiecksseite $(s W, S' w')$. Die Ebene, welche man sich durch dies Linienpaar gelegt denkt, wird der Leitebene parallel sein. Die erste Parallele schneidet nun die projicirende Ebene C D in (C, c'), die zweite Parallele schneidet dieselbe Ebene in (n, n'). Sonach ist c′ n′ die Vertikalprojektion des Schnittes beider Ebenen und wenn man den Kreuzungspunkt von c′ n′ und C′ D′, nämlich Q′, herab nach Q projicirt, so ist der zweite Punkt der Erzeugungslinie $(PQ, P'Q')$ bestimmt §. 29.

186. **Weitere Entwickelungen.** Zum Behufe dieser werden wir uns jetzt einigemale der geometrischen Berechnung bedienen, die übrigens nur auf die Lehre von den Proportionallinien gegründet werden soll.

Von dem Viereck A B C D Fig. *157*, welches gelten mag als in schräger Projektion gezeichnet, sollen die zwei Seiten B C, C D in der Zeichnungsfläche liegen, die beiden andern Seiten aber sollen diese Fläche in B und D durchschneiden, während A in gewisser Höhe über der Zeichnungsfläche liegt; das Ganze ist somit ein nicht ebenes oder ein windisches Viereck. Durch B werde B a parallel zu C D gezogen, durch D D a parallel zu B C. A a ist die Durchschnittslinie der zwei Dreiecksflächen D A a, B A a, welche nicht in der Projektionsebene liegen. Nun betrachte man A B und C D als die Leitlinien, A D und B C als zwei Erzeugungslinien eines windischen Paraboloides. Von diesen letzten Geraden gehört die eine, A D, der Dreiecksfläche D A a an und die andere, C B, ist parallel zu dieser Fläche, welche somit als die Leitebene betrachtet werden muß. Zu dieser Ebene also müssen alle übrigen Erzeugungslinien gleichfalls parallel liegen. Soll daher durch einen beliebigen Punkt M auf A B eine dritte Erzeugungslinie gelegt werden, so muß man sich durch M eine Ebene gehend denken, parallel zu D A a. Diese und die Dreiecksebene B A a werden sich nach einer Geraden M m schneiden, welche parallel zu A a sein muß; endlich wird m N parallel zu a D die Durchschnittslinie sein derselben Ebene mit der Bildfläche, und N auf der zweiten Leitlinie ist ein zweiter Punkt der gesuchten Erzeugungslinie.

Fig. *157*.



Nun besteht in den zwei ähnlichen Dreiecken B A a und B M m die Proportion:

$$BM : MA = Bm : ma;$$

weil aber $Bm = CN$ und $ma = ND$, kann man auch setzen

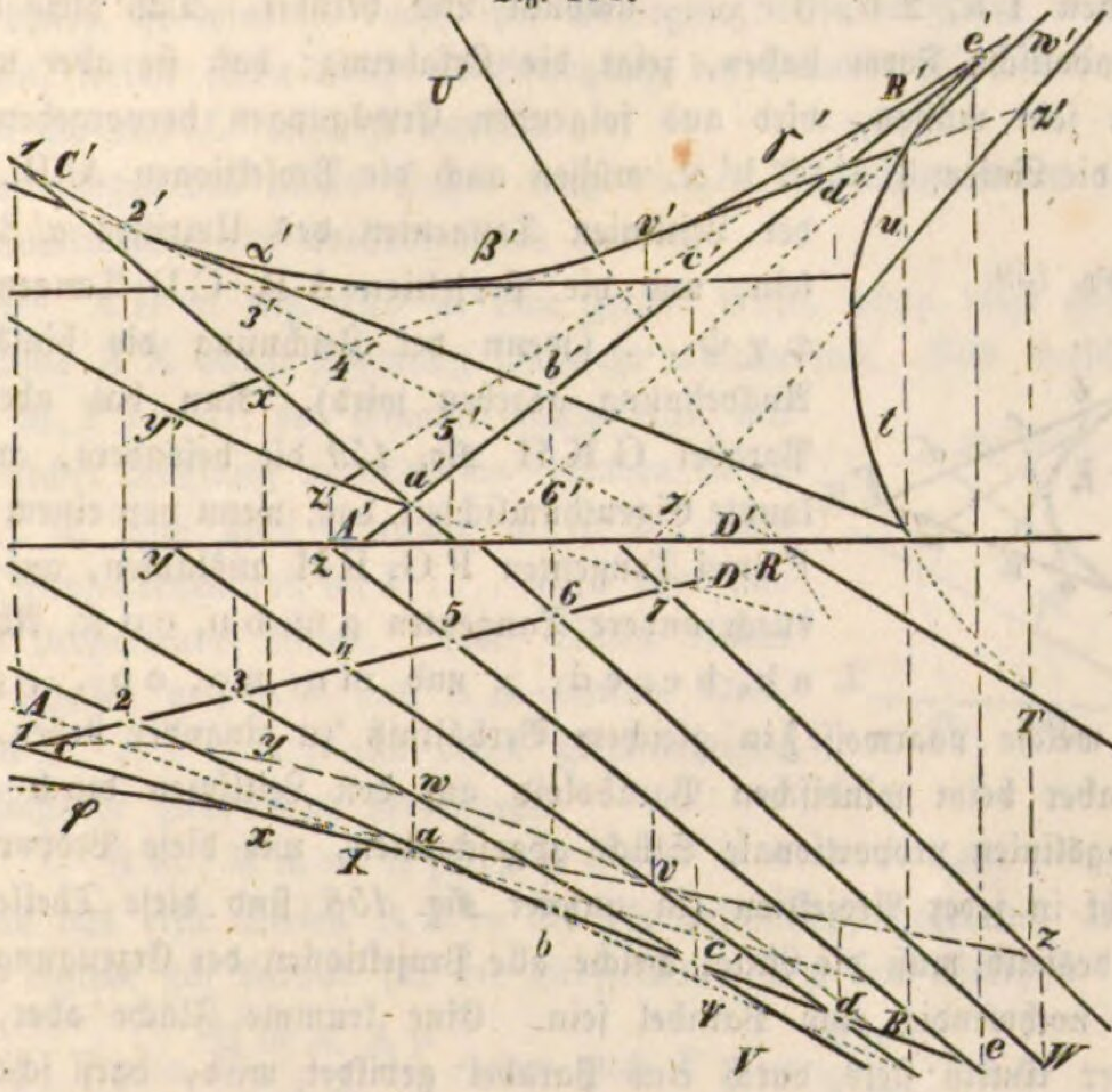
$$BM : MA = CN : ND.$$

Dies stimmt mit dem bekannten Satze überein, daß zwei beliebige gerade Linien durch drei parallele Ebenen in proportionale Theile geschnitten werden, mag aber für unsere Zwecke in nachstehender Form ausgedrückt werden: „Je drei

gerade Erzeugungslinien des windischen Paraboloides schneiden auf den zwei Leitlinien proportionale Stücke ab.“ Geschieht es demnach, daß eine Reihe von Erzeugungslinien auf der einen Leitlinie gleiche Theile abschneiden, so thun sie es auch auf der andern.

187. Es leitet uns solche Wahrnehmung zu einer sehr vereinfachten Entwurfsweise eines windischen Paraboloides, Fig. *158*. (*A B*, *A′ B′*) und

Fig. *158.*

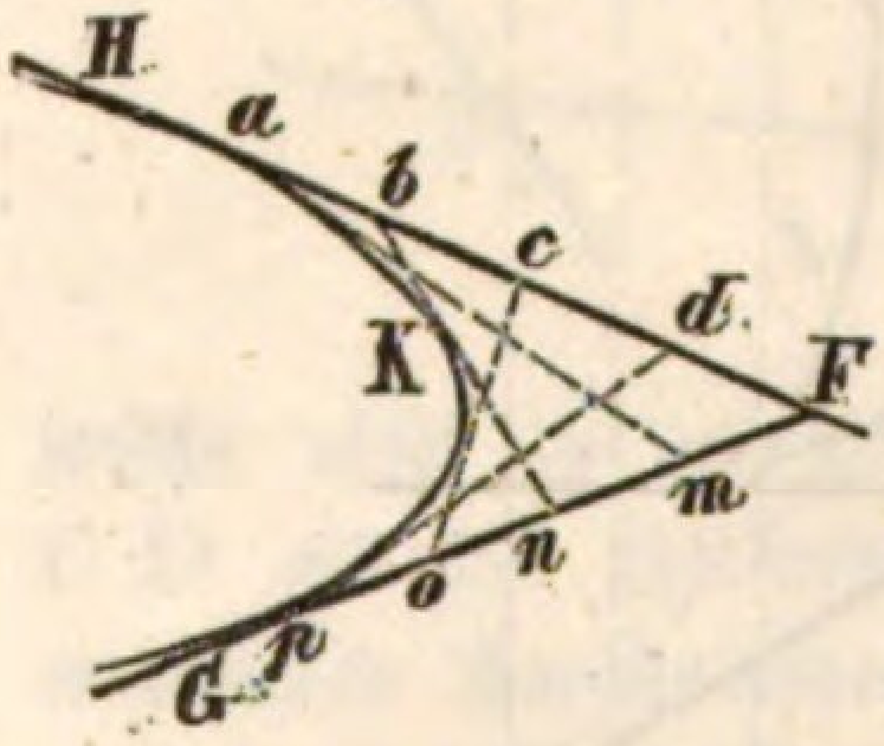


(*C D*, *C′ D′*) seien dessen beide Leitlinien; T R U′ die Leitebene, zu welcher alle Erzeugungslinien parallel sein müssen. Nach Anleitung des §. 185 hat man zwei dieser Erzeugungslinien konstruirt, welche durch zwei beliebig auf der ersten Leitlinie genommene Punkte (*1*, *1′*) und (*2*, *2′*) gehen. (*1 a*, *1′ a′*) und (*2 b*, *2′ b′*) sind diese Geraden; sie schneiden die zweite Leitlinie in den Punkten (*a*, *a′*), (*b*, *b′*). Sofort hat man den Abstand (*1.2*, *1′ 2′*) auf der ersten Leitlinie noch einigemal aufgetragen, nämlich 1. 2 von 2 nach 3, von 3 nach 4 . . . ꝛc., 1′ 2′ von 2′ nach 3′. . ꝛc. Ebenso hat man auf der zweiten Leitlinie den Abstand (*a b*, *a′ b′*) von (*b*, *b*) nach (*c*, *c′*) ꝛc. getragen; endlich blieben die entsprechenden Theilpunkte (*3*, *3′*) und (*c*, *c′*), (*4*, *4′*) und

(d, d') .. ꝛc. durch gerade Linien zu verbinden, die Projektionen eben so vieler gerader Erzeugungslinien.

188. Die Konturen des windischen Paraboloides. Berührend an die Vertikalprojektionen der Erzeugungslinien 1′a′, 2′b′, 3′c′ ... zog man eine krumme Linie $\alpha' \beta' \gamma'$ ...., sie mußte in dieser Projektion den scheinbaren Kontur oder den Umriß der Fläche geben. In der Horizontalprojektion ward dieser Umriß gebildet durch die krumme Linie $\varphi \chi \psi$ ..., welche die Projektionen 1 a, 2 b, 3 c .... umhüllt und berührt. Daß diese Umrisse eine parabolische Form haben, zeigt die Erfahrung; daß sie aber wirkliche Parabeln sein müssen, wird aus folgenden Erwägungen hervorgehen. So gut wie die Linien 1′a′, 2′b′ ꝛc. müssen auch die Projektionen A′B′, C′D′ der Leitlinien Tangenten des Umrisses $\alpha' \beta' \gamma'$ ... sein, und die Projektion AB, CD Tangenten an $\varphi \chi \psi$ ... (wenn der Zeichnung die hinlängliche Ausdehnung gegeben wird). Nun hat aber eine Parabel GKH Fig. *159* die besondere, auch bekannte Eigenthümlichkeit, daß, wenn von einem Punkte F zwei Tangenten FG, FH auslaufen, auf diesen, durch andere Tangenten am, bn, co ꝛc. Abschnitte ab, bc, cd ... und mn, no, op ... gebildet werden, welche paarweise in gleichem Verhältniß zu einander stehen. Nun werden aber beim windischen Paraboloid auf den Leitlinien durch je drei Erzeugungslinien proportionale Stücke abgeschnitten, und diese Proportionalität besteht in jeder Projektion (in unserer Fig. *158* sind diese Theile sogar gleich); deshalb muß die Linie, welche alle Projektionen der Erzeugungslinien berührt, nothwendig eine Parabel sein. Eine krumme Fläche aber, deren scheinbarer Umriß stets durch eine Parabel gebildet wird, darf schon deswegen ein Paraboloid genannt werden, welche Benennung wir übrigens noch weiter rechtfertigen werden.

Fig. *159*.



189. Doppelte Erzeugung des windischen Paraboloides durch die gerade Linie (vergl. §. 114).

Lemma. Durch einen Punkt des Raumes läßt sich eine Ebene F legen, welche zu zwei gegebenen Geraden A und B parallel ist; denn man ziehe durch den Punkt eine Parallele mit A und eine Parallele mit B und lege durch dies Linienpaar eine Ebene, so wird diese ihrer Lage nach den gestellten Bedingungen entsprechen.

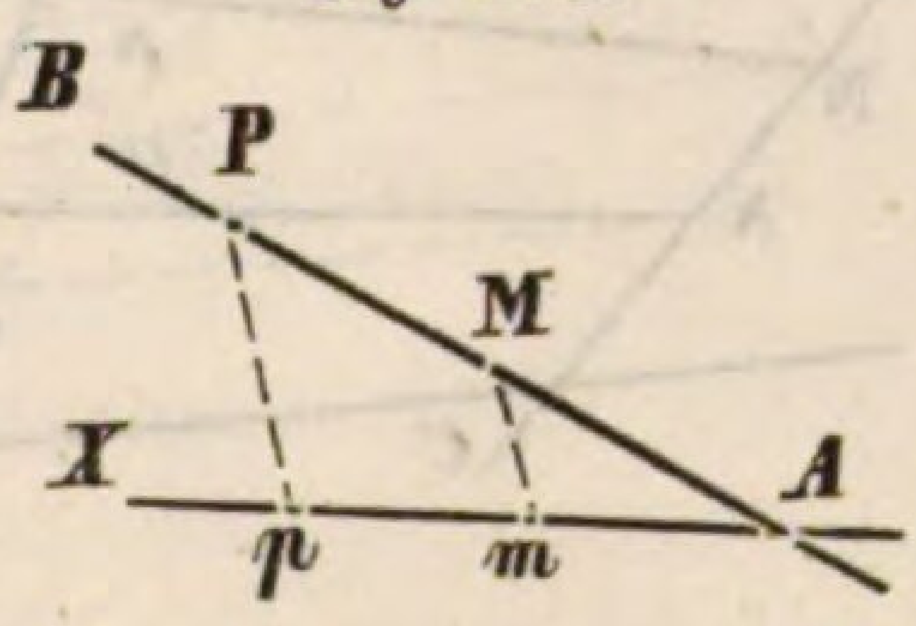
Sind nun L' und L'' die zwei Leitlinien und ist E', E'', E''' ... eine

Reihe gerader Erzeugungslinien des Paraboloides, so kann dieselbe Fläche auch noch durch eine andere Gerade L unter folgenden Modalitäten erzeugt werden. Erstlich bestimme man die Lage einer Ebene F, welche den beiden Leitlinien L' und L'' parallel ist; zweitens, man wähle unter den Erzeugungslinien zwei beliebige aus, etwa E' und E'', und betrachte sie als feste Leitlinien; drittens, man mache die ursprüngliche Leitlinie L' beweglich und lasse sie der Art auf E'' und E''' hingleiten, daß sie dabei zur Ebene F parallel bleibt, so wird sie durch ihre Bewegung dieselbe Fläche wieder hervorbringen, welche schon durch die Bewegung der Geraden E' mit den beiden Leitlinien L' und L'' erzeugt worden.

Zum Begründen dieses Satzes mag einiges Allgemeine über geometrische Behandlungsformen vorausgeschickt werden.

190. A B in Fig. *160* sei eine gerade Linie, deren Lage gegen eine andere Linie A X durch Rechnung festgesetzt werden soll. Aus verschiedenen Punkten M, P . . . ꝛc. der Geraden ziehe man mit irgend welcher Richtung parallel die Geraden M m, P p . . . . ꝛc. und man betrachte m, p . . . . als (schräge) Projektionen von M, P . . ., M m aber und P p als projicirende Linien. Diese Linien bilden mit den Theilen von A B und A X ähnliche Dreiecke A M m, A P p ꝛc., aus deren gleichnamigen Seiten folgende Proportion hervorgeht.

Fig. *160.*



$$\mathrm{Am : Mm = Ap : Pp} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Wird nun das erste Dreieck A M m als ein bekanntes, gegebenes angenommen, so ergiebt sich daraus für die Projicirende P p der Werth

$$\mathrm{Pp} = \frac{\mathrm{Mm \times Ap}}{\mathrm{Am}} \text{ oder auch } \mathrm{Pp} = \frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{Am}} \times \mathrm{Ap}$$

Für einen andern Punkt P′, welcher auf A M genommen würde und dessen Projektion p′ wäre, fände man auf gleichem Wege den Werth der Projicirenden P′ p′

$$\mathrm{P'p'} = \frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{Am}} \times \mathrm{Ap'}$$

Angenommen, A m hätte den Werth $= 5$; M m $= 3$, also $\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{Am}} = \frac{3}{5} = 0,6$; so folgte daraus

$$\mathrm{Pp} = 0,6 \times \mathrm{Ap}, \quad \mathrm{P'p'} = 0,6 \times \mathrm{Ap'}.$$

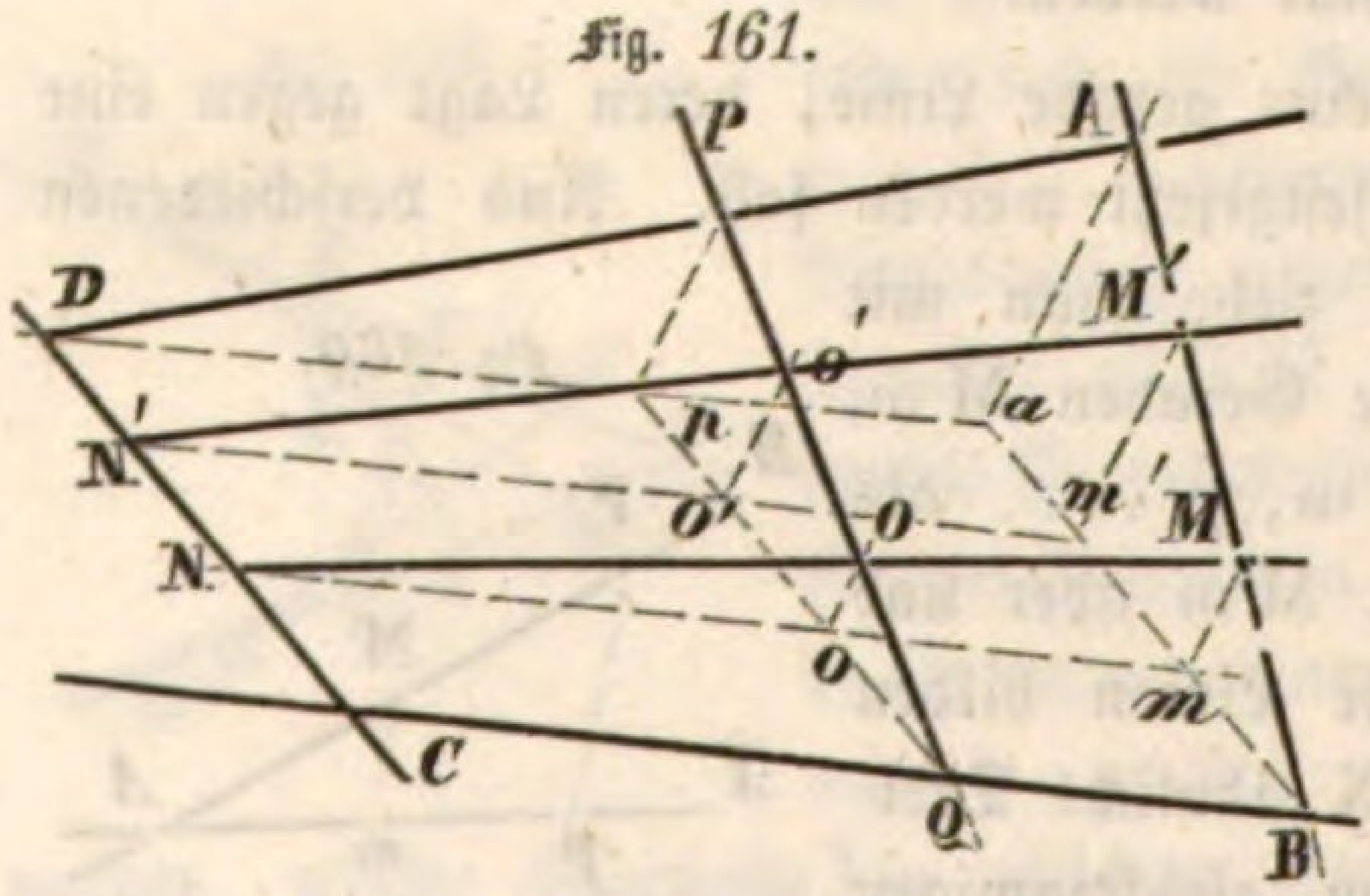
Anstatt der besondern Werthe des Verhältnisses $\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{A\,m}}$ setze man das allgemeine Zeichen *m*. Die Projicirende P p′ werde *p* genannt und *a* der Abschnitt A p, dann erscheint die Gleichung

$$\mathrm{p} = \mathrm{m.\,a}$$

als allgemeiner Ausdruck für den Werth der projicirenden Linie irgend eines Punktes auf die Linie A m, dessen zugehöriger Abschnitt a gegeben wird.

191. Sofort sei in Fig. *161* A B C D ein windisches Viereck, von welchem, wie in Fig. *157*, §. 186 die Seiten C B, C D in der Zeichnungsfläche liegen, der Punkt A jedoch in beliebiger Höhe über dieser Fläche. Durch B sei B a parallel zu C D gezogen; durch D D a parallel zu C D. Den Durchschnitt a beider Parallelen, der gleichfalls in der Zeichnungsfläche liegt, verbinde man mit A, und betrachte a als Projektion von A, dann erscheint B a als Projektion von B A, und D a als Projektion von D A; die projicirende Fläche D a A steht parallel zu C B und die projicirende Fläche B a A parallel zu C D.

Fig. *161.*



Gleichwie in Fig. *157* werden jetzt A B und C D als die Leitlinien eines windischen Paraboloides, A D und B C als zwei Erzeugungslinien desselben genommen. Eine dritte Erzeugungslinie M N dieser Fläche zu gewinnen, welche durch den beliebigen Punkt M der ersten Leitlinie geht, und welche nothwendig mit der Ebene D a A parallel sein muß, bleibt durch M eine Ebene parallel zu D a A zu legen; sie schneidet die Ebene B a A nach der Geraden M m parallel zu A a und macht in der Zeichnungsfläche einen Schnitt m N parallel zu D a, welcher in N einen zweiten Punkt der Erzeugungslinie M N liefert.

Sofort werde durch einen beliebig auf A D genommenen Punkt P eine Ebene P p Q parallel zur Ebene A a B gelegt; P p ihr Durchschnitt mit A a D muß parallel sein zu A a und ihr Riß p Q parallel zu C D. Man verbinde P mit Q und ich sage: dies P Q und die Erzeugungslinie M N werden sich in einem Punkte O durchschneiden. In der That werden die Ebenen P p Q und M m N sich nach einer Geraden O o parallel zu A a

durchschneiden, welche Gerade von dem Dreiecke M m N ein ähnliches Dreieck O o N abtrennt. Es führt dies zu der Proportion:

$$Nm : No = Mm : Oo \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (b)$$

Aber die ähnlichen Dreiecke D a A und D p P geben ihrerseits

$$Da : Dp = Aa : Pp \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (c)$$

weil nun N m und D a, sowie N o und D p gleich groß sind, als Parallele zwischen Parallelen, so haben die Vorderglieder der zwei Proportionen (*b*), (*c*) gleichen Werth, weshalb aus den Hintergliedern die dritte Proportion zusammengesetzt werden kann

$$Aa : Pp = Mm : Oo;$$

hieraus folgt für die Projicirende O o der Werth

$$Oo = \frac{Mm \times Pp}{Aa} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (d)$$

Betrachten wir jetzt die Linie O o als dem Dreieck P p Q angehörig, welches ähnlich ist dem Dreieck O o Q und bringen wir dies in Verbindung mit den zwei ähnlichen Dreiecken B a A, B m M, wobei zu beachten, daß Q p = B a und Q o = B m, so folgt

$$Ba : Bm = Aa : Mm \text{ und } Qp : Qo = Pp : Oo$$

aus demselben Grunde wie vorhin, also auch

$$Aa : Mm = Pp : Oo;$$

dies aber giebt für O o den Werth

$$Oo = \frac{Mm \times Pp}{Aa} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (e)$$

welcher dem vorigen in (*d*) gleich ist.

Ob somit O o als Linie des Dreieckes M m N oder als Linie des Dreieckes P p Q betrachtet werde, beides führt auf die gleiche Größe der Linie, woraus zu schließen, daß der Punkt O sowohl der Geraden M N als der Geraden P Q angehöre, mit andern Worten: daß beide Gerade sich in O durchkreuzen.

Nach ganz ähnlichen Folgerungen ist zu beweisen, daß P Q und die Erzeugungslinie M′N′ sich in einem Punkte O′ kreuzen müssen, woraus sich als letzte Folgerung ergiebt, daß die Gerade P Q mit all' ihren Punkten der windischen Fläche angehört, von welcher A D, M′N′, M N, B C Erzeugungslinien sind. Nun war aber P ein ganz beliebiger Punkt auf A D, und wo auch dies P genommen werde, insofern das entsprechende Q auf C B nur in einer Ebene liegt, welche der Ebene B a A parallel ist, so wird P Q ganz der vorliegenden Fläche angehören.

Nehmen wir also A D und C B als feste Leitlinien und lassen auf beiden die Linie A B hingleiten, der Art, daß sie stets der Ebene B a A parallel bleibt, dann wird durch diese Bewegung von A B dasselbe windische Paraboloid hervorgebracht, welches bei seiner ersten Erzeugung A B und C D als Leitlinien und D a A als Leitebene hatte.

191. Fassen wir zur Uebersicht die doppelte Erzeugung des windischen Paraboloides in folgende kurze Formulirung zusammen.

1. Erzeugung: Bedingt durch zwei beliebige gerade Leitlinien, welche nicht in einer Ebene liegen, und durch eine Leitebene, zu welcher die Erzeugungslinie stets parallel bleiben muß.

2. Erzeugung: Zwei beliebige Erzeugungslinien der ersten Art sind als feste Leitlinien genommen und die Leitebene muß den beiden ersten Leitlinien parallel sein.

Wir führen hierbei noch folgende Sätze auf:

Zwei Erzeugungslinien des windischen Paraboloides, welche einem und demselben Erzeugungssysteme angehören, können sich niemals durchschneiden, weil sie in parallelen Ebenen liegen, ohne selbst parallel sein zu können.

Jede gerade Erzeugungslinie des einen Systemes schneidet alle Geraden des andern Systemes.

192. Ein Beispiel zur Erläuterung von Fig. *162*.

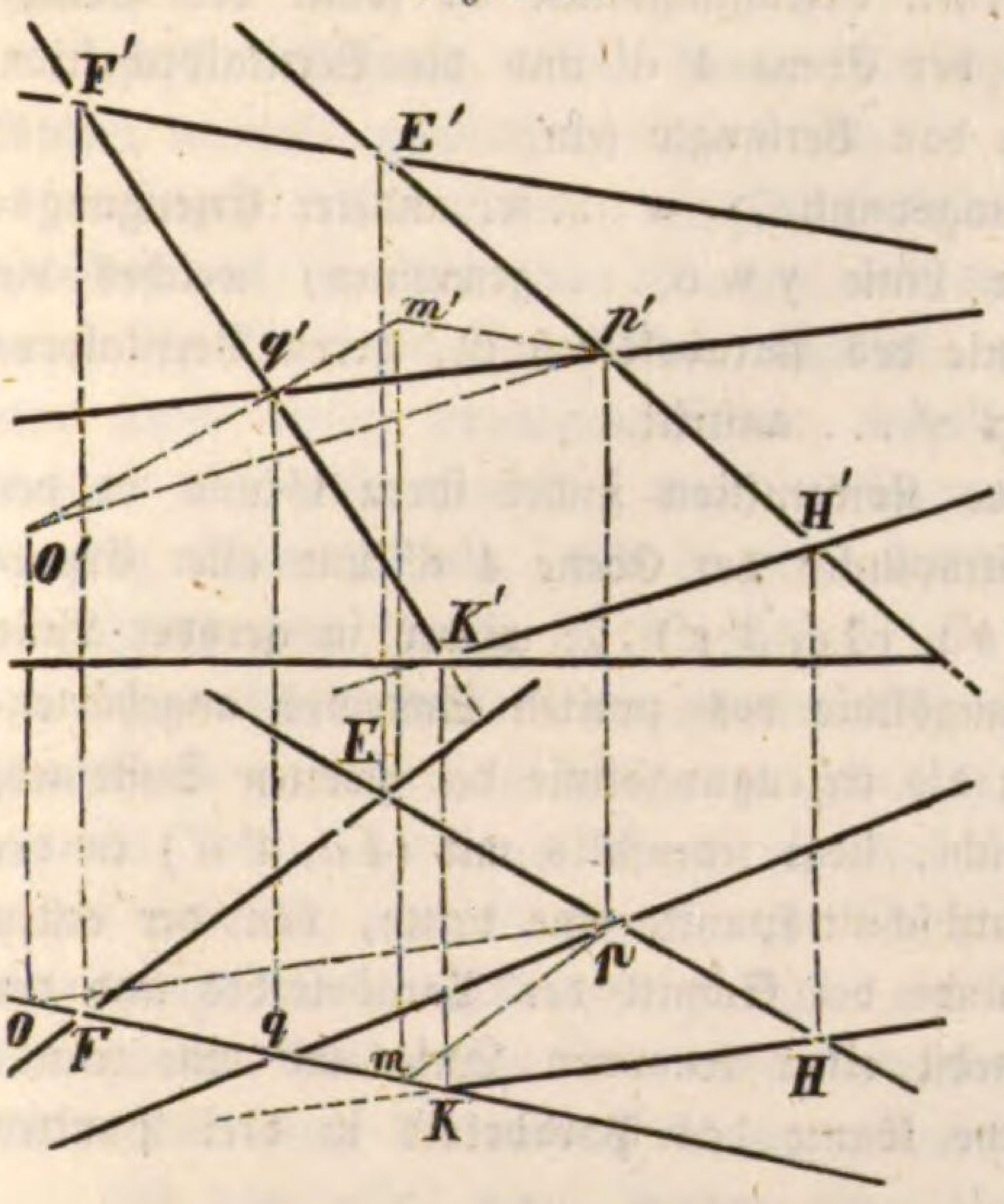
$(EF, E'F')$, $(KH, K'H')$ sind die zwei Leitlinien und $(EH, E'H')$, $(FK, F'K')$ zwei auf sie gestützte Erzeugungslinien eines windischen Paraboloides; man verlangt die Erzeugungslinie des zweiten Systemes, welche durch den Punkt (p, p) der Geraden $(EH, E'H')$ geht. Durch (p, p') zog man $(pm, p'm')$ parallel zur ersten Leitlinie $(EF, E'F')$, sodann $(po, p'o')$ parallel zur zweiten Leitlinie $(KH, K'H')$. In der Ebene $(mpo, m'p'o')$ muß die verlangte zweite Erzeugungslinie liegen und diese ist bestimmt, wenn man den Punkt (q, q') kennt, in welchem die Ebene und die Erzeugungslinie $(FK, F'K')$ sich schneiden. Aber die Ebene $(mpo, m'p'o')$ und die projicirende Ebene FK schneiden sich nach einer Geraden, deren Vertikalprojektion $m'o'$ ist, so daß noch der Kreuzungspunkt q′ von m′ o′ und F′K′ auf F K nach q zu projiciren bleibt 2c.

193. Die tangirenden Ebenen des windischen Paraboloides.

Da bei dem windischen Paraboloide, wie bei dem windischen Umdrehungshyperboloide (§. 118), in jedem Punkte der Fläche zwei gerade Linien

sich kreuzen, welche den beiden Erzeugungssystemen angehören, und da eine jede dieser Geraden als ihre eigene Tangente zu betrachten ist, so bestimmen sie mit einander die tangirende Ebene ihres Kreuzungspunktes. So z. B. durchschneiden sich in dem Punkte O der Fig. *161* die zwei Erzeugungslinien M N und P Q. Eine Ebene durch beide Gerade gelegt, ist die tangirende Ebene des Punktes Q. Ihr Riß auf der Zeichnungsfläche wäre die (nicht gezogene) Gerade N Q. Man wird hieraus entnehmen, daß die zwei Geraden M N, P Q zugleich den Durchschnitt der tangirenden Ebene und des Paraboloides bilden, während die „Berührung" lediglich in dem Punkte O stattfindet.

Fig. *162.*



Durch die zwei Geraden, welche sich in den Punkten (E, E'), (F, F'), (q, q'), (K, K'), (H, H'), (p, p') der Fig. *162* kreuzen, ist hier jedesmal die berührende Ebene des Kreuzungspunktes festgesetzt.

194. **Lehrsatz.** Eine jede Ebene G, welche durch eine gerade Erzeugungslinie E eines windischen Paraboloides gelegt wird, ist eine tangirende Ebene dieser Fläche.

Beweis. Die Ebene wird irgend eine andere Gerade desselben Erzeugungssystemes in einem Punkte Q schneiden; man konstruire die Erzeugungslinie F des zweiten Systemes, welche durch Q geht. Wie alle Geraden dieses Systemes wird F die Linie E in einem Punkte P durchkreuzen, die Gerade F hat also zwei Punkte Q und P mit der Ebene G gemeinsam und liegt folglich gleich wie E ganz in ihr; die Ebene g ist somit eine tangirende und P ist ihr Berührungspunkt.

165. **Eine Anwendung hiervon bei Fig. *158.***

Man verlangt hier den Berührungspunkt v' der Geraden, 4' d' mit dem scheinbaren Umrisse $\alpha' \beta' \gamma'$ . . der Vertikalprojektion. Betrachtet 4' d' als die Projektion einer berührenden Ebene des Paraboloides, welche auf der

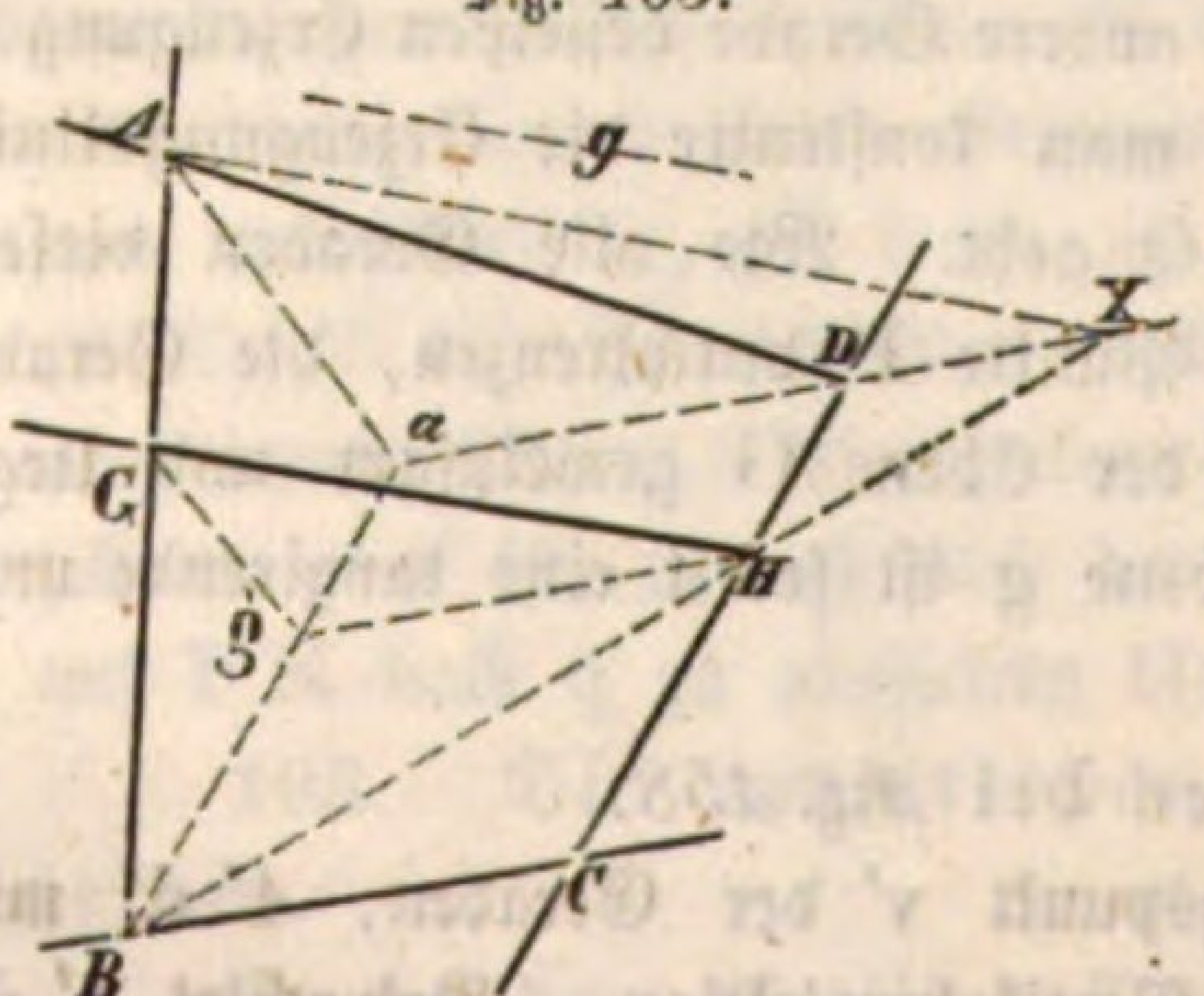
vertikalen Projektionsebene senkrecht steht und in welcher die Gerade (*4' d'*, *4 d*) enthalten ist. Diese Ebene 4' d' schneidet die Erzeugungslinie (*1 a, 1' a'*) in dem Punkte (*x', x*), sie schneidet eine andere Erzeugungslinie (*7 g, 7' g'*) in dem Punkte (*z', z*). (*x z, x' z'*) ist daher die gerade Erzeugungslinie des zweiten Systemes, welche in der Ebene 4' d' liegt. Der Kreuzungspunkt (*v, v'*) dieser Geraden mit der ersten Erzeugungslinie ist somit der Berührungspunkt des Paraboloides mit der Ebene 4' d' und die Vertikalprojektion v' dieses Berührungspunktes muß das Verlangte sein.

Man hat noch die Berührungspunkte y, w ... ꝛc. anderer Erzeugungslinien konstruirt und dadurch die Linie y w o ... gewonnen, welches die Horizontalprojektion derjenigen Linie des Paraboloides ist, deren Vertikalprojektion als scheinbarer Umriß α' β' γ' ... auftritt.

Anmerkung. Die vorstehende Konstruktion findet ihren Grund in der Unterstellung, daß die Durchschnittspunkte der Ebene 4' d' und aller Erzeugungslinien (*1 a, 1' a'*), (*2 b, 2' b'*), (*3 c, 3' c'*) ... wieder in gerader Linie liegen und darum einer Erzeugungslinie des zweiten Systemes angehörten. Dies aber ist unzweifelhaft, denn die Erzeugungslinie des zweiten Systemes, welche dem Punkte (*x', x*) entspricht, liegt jedenfalls mit (*4 d, 4' d'*) in der Ebene 4' d'; sollten nun jene Durchschnittspunkte eine dritte, von der ersten verschiedene Linie bilden, so bestünde der Schnitt des Paraboloides und der Ebene 4' d' aus zwei geraden nebst einer krummen Linie und eine transversale Gerade in derselben Ebene könnte das Paraboloid in drei Punkten schneiden, was unmöglich ist.

196. Eine vorbereitende Aufgabe. A B C D in Fig. *163* sei ein windisches Viereck von ganz gleicher Bedeutung und Anordnung, wie die gleichnamigen Vierecke in Fig. *161* und Fig. *157* (§§. 186 u. 191). In der Leitebene D a A ist eine beliebige Gerade *g* gegeben, man verlangt die Erzeugungslinie G H, welche mit *g* parallel liegt. — Durch einen Punkt A der ersten Leitlinie führe ich eine Gerade A X parallel zu g. Durch die Parallele und die Leitlinie lege ich eine Ebene, deren Riß auf der Zeichnungsfläche die Gerade B X sein wird; es zeigt sich hieraus, daß die genannte Ebene A B X und die zweite Leitlinie sich in einem Punkte H schneiden. Führe ich nun

Fig. 163.



durch H eine zweite Gerade HG parallel mit g, so ist dies die verlangte Erzeugungslinie, denn dies HG ist mit einer Linie AX der Leitebene, also dieser selbst parallel und wird, weil der Ebene ABX angehörig, die erste Leitlinie in einem Punkte G schneiden.

Anmerkung. BAX wäre die tangirende Ebene des Paraboloides im Punkte G.

197. Lehrsatz. Die ebenen Schnitte eines windischen Paraboloides können niemals geschlossene Linien sein.

Beweis. Der Schnitt des Paraboloides und einer ebenen Fläche wird gebildet aus der Reihe von Punkten, in denen die einzelnen Erzeugungslinien durch die Ebene dringen. Nun, sage ich, giebt es stets zwei oder mindestens eine unter diesen Erzeugungslinien, welche der schneidenden Ebene parallel liegen, diese also niemals, oder, wenn man will, nur in unendlicher Entfernung treffen können. Die fragliche Durchschnittslinie hat darum vier oder mindestens zwei Punkte im Unendlichen und kann sich niemals schließen.

Das Vorhandensein der geraden Erzeugungslinien, welche der schneidenden Ebene parallel sein sollen, zu beweisen, wollen wir als ersten Fall annehmen, diese schneidende Ebene sei einer der zwei Leitebenen des Paraboloides parallel; alsdann schneidet sie das Paraboloid nach zwei seiner geraden Erzeugungslinien, welche mit einander vier Punkte im Unendlichen haben. — Als zweiten Fall haben wir denjenigen anzunehmen, wobei die schneidende Ebene mit keiner der beiden Leitebenen parallel liegt.

Ist dem also, dann werden diese Ebene und die Leitebene des ersten Erzeugungssystemes sich nach einer Geraden durchschneiden, welche *g* heißen mag. Aber nach Anleitung der vorhergehenden Aufgabe läßt sich immer eine gerade Erzeugungslinie *G* des ersten Systemes konstruiren, welche mit g parallel liegt. Die schneidende Ebene und die Leitebene des zweiten Systemes werden sich ferner nach einer geraden Linie schneiden, welche mit k bezeichnet werden soll (g und k werden sich in einem Punkte der Durchschnittslinie beider Leitebenen, der Linie Aa in unseren Figuren, durchkreuzen). Nach derselben Anleitung von §. 196 wird sich nun eine gerade Erzeugungslinie *K* konstruiren lassen, welche dem zweiten Erzeugungssystem angehört und zu *k* parallel liegt. Die zwei Erzeugungslinien *G* und *K*, welche paarweise den Durchschnitten g und k parallel sind, liegen mit der Ebene dieser zwei Linien parallel und können von ihr nur in vier unendlich entfernten Punkten erreicht werden.

Als dritter und letzter Fall bleibt jener zu erwägen, wobei die schnei-

dende Ebene der Durchschnittslinie beider Leitebenen parallel liegt (also parallel der Linie A a unserer Figuren). Hier nun werden die Schnitte g und k beide jener Durchschnittslinie parallel werden und es giebt nur eine Erzeugungslinie, *G* oder *K*, welche dem jetzigen *g* oder *k* und somit der schneidenden Ebene parallel wäre.

Unsere Fig. *163* zeigt, daß, wenn die Erzeugungslinie gesucht würde, welche dem Durchschnitte A a parallel liegt, in diesem Falle der Riß X B die Richtung a B annehmen, der Punkt H darum auf D C in unendliche Entfernung übergehen würde, so daß also die zu A a parallele Erzeugungslinie ganz in unendlicher Entfernung liegt. Der Schnitt des Paraboloides und einer Ebene, welche mit A a parallel läge, hatte somit zwei Punkte im Unendlichen.

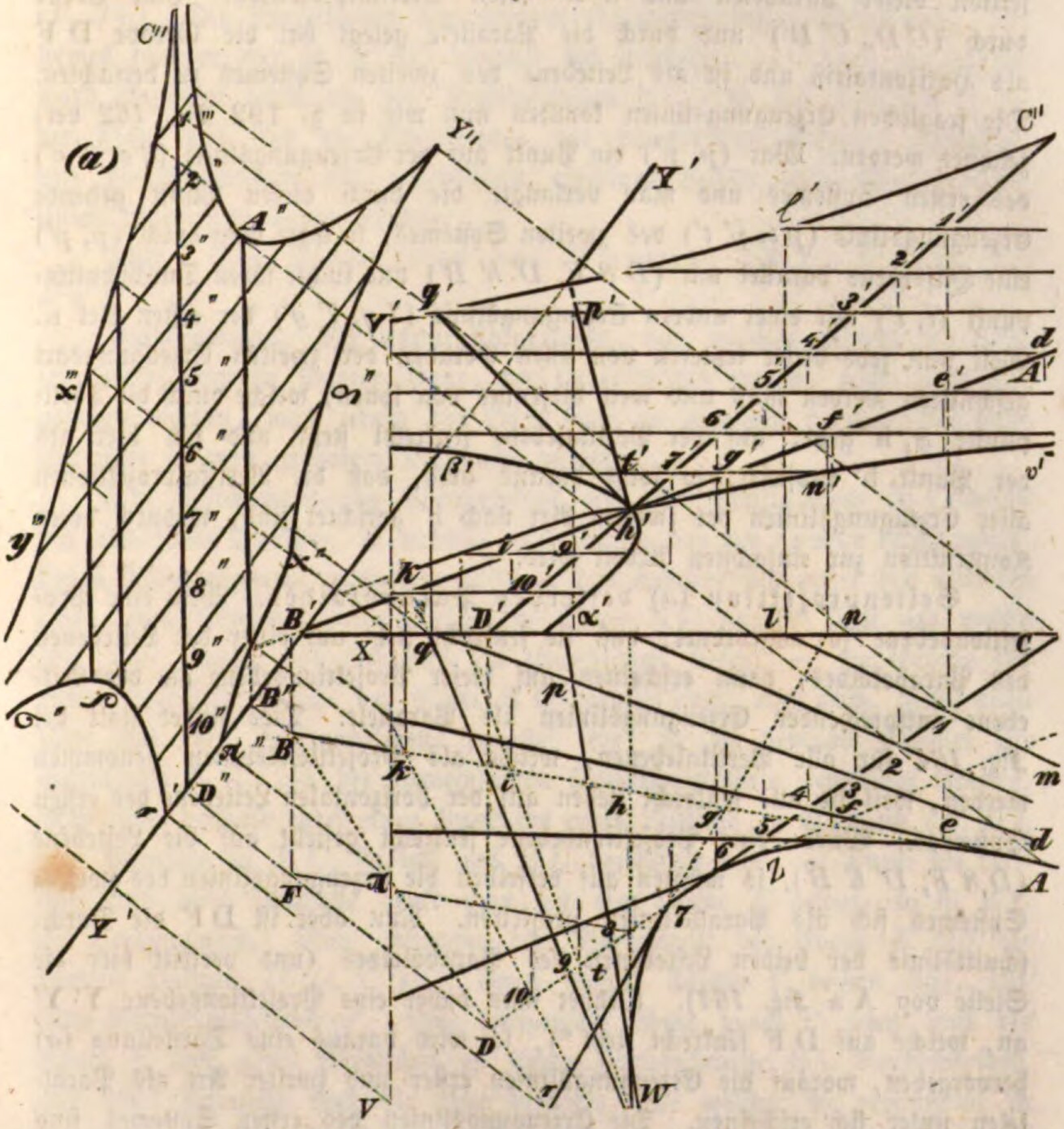
Anmerkung. Werden die Ergebnisse der vorstehenden Erörterungen zusammengehalten mit der Geschlechtsverwandtschaft des windischen Paraboloides und Hyperboloides, so tritt die Vermuthung nahe, daß die ebenen Schnitte des Paraboloides entweder Hyperbeln oder Parabeln sein müssen, was in der Folge auch bestätigt werden wird.

Einige Darstellungen des windischen Paraboloides in größerer Ausdehnung.

198. Fig. *164* (s. S. 273). (*A B, A' B'*) und (*C D, C' D'*) die zwei Leitlinien, die horizontale Projektionsebene zugleich Leitebene. Man hat auf der zweiten Leitlinie den Punkt (*1. 1'*) nach Gutbefinden angenommen, die Länge 1′ D′ in eine passende Anzahl gleicher Theile zerlegt und die Theilpunkte 2′, 3′, 4′ ... auf C D nach 2, 3, 4 ... herab projicirt. (Es schien dabei bequem, wenn ein Theilpunkt nach h′ fiel, wo die Projektionen A′ B′ und C′ D′ sich kreuzen. Durch 1′, 2′, 3′ ... zog man wagrechte Linien, welche die A B′ in a′, b′, c′, d′, e′ f′ ... (die drei ersten außerhalb der Zeichnung) durchschnitten; diese Theilpunkte waren auf A B nach a, b, c, d, e, f . . herab zu projiciren. Endlich blieben noch die Punkte 1 und a, 2 und b, 3 und c, 4 und d ... ꝛc. durch gerade Linien zu verbinden, um damit die Horizontalprojektionen derselben Erzeugungslinien zu erhalten, deren Vertikalprojektionen die Wagrechten 1′ a′, 2′ b′ ... ꝛc. sind. Die Gerade (*B D, B' D'*), welche zu dieser Reihe gehört, ist zugleich der Durchschnitt des Paraboloides in der horizontalen Projektionsebene. Alle Horizontalprojektionen berühren eine Parabel W Z A, welche hier den scheinbaren Umriß bildet. — Die Vertikalprojektion bietet keinen solchen Umriß und würde rein aus wagrechten Linien bestehen. Jedoch, mehre Anschau-

lichkeit zu gewinnen, sind dieser Darstellung beigefügt worden: erstens die hyperbolischen Bögen C′ l′ q′ . . . h′ n′ v′, welche sich aus dem Durchschnitt

Fig. 164.



des Paraboloides mit der vertikalen Projektionsebene C X ergeben; (die Erzeugungslinie (*1 a, 1′ a′*) trifft die Vertikalebene in (*l, l′*) . . . ꝛc., die Erzeugungslinie (*7 g, 7′ g′*) trifft die Vertikalebene in (*n, n′*) . . . ꝛc.); zweitens den hyperbolischen Bogen α′ h′ β′ . ., als Projektion der Durchschnittslinie des Paraboloides und der Vertikalebene V W.

Erzeugungslinien des zweiten Systemes. Auf der Leitlinie (*C D, C' D'*) nahm man den Punkt (*h', 8*) und zog durch ihn eine Parallele zur Leitlinie (*A B, A' B'*); 8 F, parallel zu A B, ist die Horizontalprojektion dieser Parallelen und h' B' deren Vertikalprojektion. Eine Ebene durch (*C D, C' D'*) und durch die Parallele gelegt hat die Gerade D F als Horizontalriß und ist als Leitebene des zweiten Systemes zu betrachten. Die fraglichen Erzeugungslinien konnten nun wie in §. 192 Fig. *162* verzeichnet werden. War (*p, p'*) ein Punkt auf der Erzeugungslinie (*3 c, 3' c'*) des ersten Systemes und man verlangte die durch diesen Punkt gehende Erzeugungslinie (*p t, p' t'*) des zweiten Systemes, so legte man durch (*p, p'*) eine Hilfsebene parallel mit (*D 8 F, D' h' B'*) und suchte ihren Durchschnittspunkt (*t, t'*) mit einer andern Erzeugungslinie (*7 g, 7' g'*) der ersten Art 2c. Weil nun jede dieser letzteren von allen Geraden der zweiten Erzeugungsart geschnitten werden muß und weil diejenige von ihnen, welche durch die Theilpunkte 8, h geht, auf der Vertikalebene senkrecht steht und sich hier als der Punkt h' projicirt, so folgt daraus auch, daß die Vertikalprojektionen aller Erzeugungslinien der zweiten Art nach h' gerichtet sind, wodurch deren Konstruktion zur einfachsten Arbeit wird.

Seitenprojektion (*a*) desselben Paraboloides. Wird eine Projektionsebene so angeordnet, daß sie senkrecht steht auf einer der Leitebenen des Paraboloides, dann erscheinen auf dieser Projektionsebene die der Leitebene entsprechenden Erzeugungslinien als Parallele. Dies findet statt bei Fig. *164* für alle Vertikalebenen, welche als Projektionsebenen genommen werden, weil sie alle senkrecht stehen auf der horizontalen Leitebene des ersten Systemes. Würde eine Projektionsebene senkrecht gestellt auf die Leitebene (*D 8 F, D' h' B'*), so müßten auf derselben die Erzeugungslinien des zweiten Systemes sich als Parallellinien projiciren. Nun aber ist D F die Durchschnittslinie der beiden Leitebenen des Paraboloides (und vertritt hier die Stelle von A a Fig. *161*). Ordnet man daher eine Projektionsebene Y' Y' an, welche auf D F senkrecht steht *), so wird daraus eine Darstellung (*a*) hervorgehen, worauf die Erzeugungslinien erster und zweiter Art als Parallelen unter sich erscheinen. Die Erzeugungslinien des ersten Systemes sind wieder Parallele zur Grundlinie Y' Y', deren Höhenunterschiede denen der Punkte 1', 2', 3', 4' ... gleich genommen wurden.

---

*) Steht eine Ebene senkrecht auf zwei anderen Ebenen, so ist sie zugleich senkrecht auf der gemeinsamen Durchschnittslinie dieser letzteren und umgekehrt.

Die Leitlinie (AB, $A'B'$) projicirte sich nach A″ B″ (A″ auf der Horizontalen des Punktes 4″). Die zweite Leitlinie erhielt C″ D″ als neue Projektion, welche mit A″ B″ parallel werden mußte. [1″ die Projektion von ($1'$, 1).] Die Projektionen der übrigen Erzeugungslinien des zweiten Systemes konnten nur zu A″ B″ parallel sich darstellen. — Das Paraboloid ward abgestutzt durch die vier Vertikalebenen XC, CM, XV und VW. In der Figur (a) sind die Projektionen der betreffenden Schnitte gezeichnet, und die Bestimmung der zugehörigen einzelnen Punkte durch Konstruktionslinien hinreichend hervorgehoben.

199. Die Asymptoten des Schnittes (XC, $V'l'C'$ .... $h'n'v'$ . . .).

Vorbemerkung. Die Konstruktionslinien, von welchen sogleich die Rede sein wird, konnten unserer Figur, der Ueberfüllung wegen, nicht mehr beigegeben werden, was jedoch der Leser leicht zu ergänzen vermag, der seine Entwürfe in weit größerem Maßstabe ausführt.

Der Durchschnitt des Paraboloides und der Vertikalebene X C bildet sich aus jenen Punkten, in welchen diese Ebene von den geraden Erzeugungslinien beider Systeme geschnitten wird. Nun befindet sich unter den Geraden eines jeden Systemes eine, welche der Ebene X C parallel liegt und welche also zwei Punkte des Schnittes im Unendlichen liefert — die Gerade des ersten Systemes, welche der Ebene X C parallel liegt, muß auch, gleich allen ihrer Art, der Horizontalebene parallel sein; sie ist demnach parallel zur Grundlinie X C, als der gemeinsamen Durchschnittslinie genannter Ebenen. Man führe deshalb durch einen Punkt der ersten Leitlinie, z. B. durch (B, B'), eine Parallele zu X C, sie soll uns B L bezeichnet sein. — Durch die Leitlinie und diese Parallele denkt man sich eine Ebene E gelegt, so ist B L ihr Horizontalriß. Man bestimmt den Durchschnitt der Ebene E mit der zweiten Leitlinie (CD, $C'D'$), einen Punkt, welcher Γ heißen mag, und seine Vertikalprojektion γ'. Eine horizontale Ebene durch Γ gelegt muß die Ebene E nach einer Parallelen zu ihrem Horizontalrisse B L durchschneiden, und diese Parallele muß die erste Leitlinie, mit welcher sie gemeinsam in der Ebene E liegt, in einem Punkte Δ kreuzen, dessen Vertikalprojektion δ' heißen soll. $\Gamma\Delta$ ist also jene Erzeugungslinie des ersten Systemes, welche der Ebene X C parallel liegt, und ihre Vertikalprojektion $\gamma'\delta'$ muß eine Asymptote des Schnittes V′ l′ C′ . . . h′ m′ n′ sein, weil sie wie alle Horizontalen 7′ g′, 6′ f′ . . . Punkte des Schnittes liefert, aber Punkte in unendlicher Entfernung links und rechts. Alle Erzeugungslinien oberhalb der Ge-

raden Γ Δ geben Punkte des oberen Astes V′ l′ C′, und die Erzeugungslinien unterhalb Γ Δ Punkte des unteren Astes h′ n′ v′.

Die zweite Asymptote muß die Projektion jener Erzeugungslinie des zweiten Systemes sein, welche zur Vertikalebene X C parallel liegt. Weil diese Erzeugungslinie gleich allen ihrer Art auch der Leitebene (*D 8 F, D′ h′ B′*) parallel liegen muß, so kann sie nur parallel sein dem Durchschnitt dieser Leitebene und der Ebene X C. Man konstruire darum diese Durchschnittslinie oder den Vertikalriß der Leitebene (*D 8 F, D′ h′ B′*), wir wollen ihn schlechtweg *V* nennen. Sofort werden zwei Erzeugungslinien der ersten Art, z. B. D B und (*4 d, 4′ d′*)′, als Leitlinien des zweiten Systemes gewählt; durch einen Punkt von D B, z. B. durch B, lege man eine Parallele mit *V*, sodann durch diese und D B eine Ebene E′. Man bestimme den Durchschnittspunkt Θ der Ebene E′ und der Leitlinie (*4 d, 4′ d′*), seine Vertikalprojektion heiße ϑ′. Durch Θ lege man eine neue Parallele mit *V*, sie wird die B D in einem Punkte Λ schneiden (dessen Vertikalprojektion λ′ heißt), weil sie mit B D in der Ebene E′ liegt. Θ Λ ist deshalb jene Erzeugungslinie des zweiten Systemes, welche der Ebene X C parallel liegt, und ihre Vertikalprojektion δ′ λ′ wird aus ähnlichen Gründen wie vorhin γ′ δ′ die zweite Asymptote der in Rede stehenden Durchschnittslinie sein.

200. Zweites Beispiel Fig. *165*.

(*A B, A′*) die erste, (*C D, C′ D′*) die Leitlinien, Y C die Leitebene. Sonach sind die Erzeugungslinien dieser Figur parallel zur vertikalen Projektionsebene, während eine Leitlinie senkrecht auf derselben Ebene steht. Alle Horizontalprojektionen der Erzeugungslinien des ersten Systemes sind demnach parallel zu Y C und alle Vertikalprojektionen konkurriren im Punkte A′. Diese Erzeugungslinien wurden so angeordnet, daß sie auf der Leitlinie (*C D, C′ D′*) gleiche Theile abschnitten.

Aus der Lage der ersten Leitlinie (*A B, A′*) folgt, daß die Leitebene des zweiten Erzeugungssystemes auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehen müsse. Indem man somit C′ D′ als die Projektion einer auf der Vertikalebene senkrecht stehenden Ebene betrachtet, erscheint diese als die Leitebene des zweiten Systemes und alle Erzeugungslinien dieses Systemes projiciren sich auf die Vertikalebene als Parallelen zu C′ D′. — τ′ ω′ sei eine dieser Projektionen; den Punkt ω′ derselben, welcher der Erzeugungslinie (*D′ A′ Ψ′, B Ψ*) entspricht, projicirt man herab nach Ψ. Den Punkt τ′ auf der Erzeugungslinie des Punktes (*2, 2′*) herab nach τ und τ ω, τ′ ω′ sind die

Fig. 166.

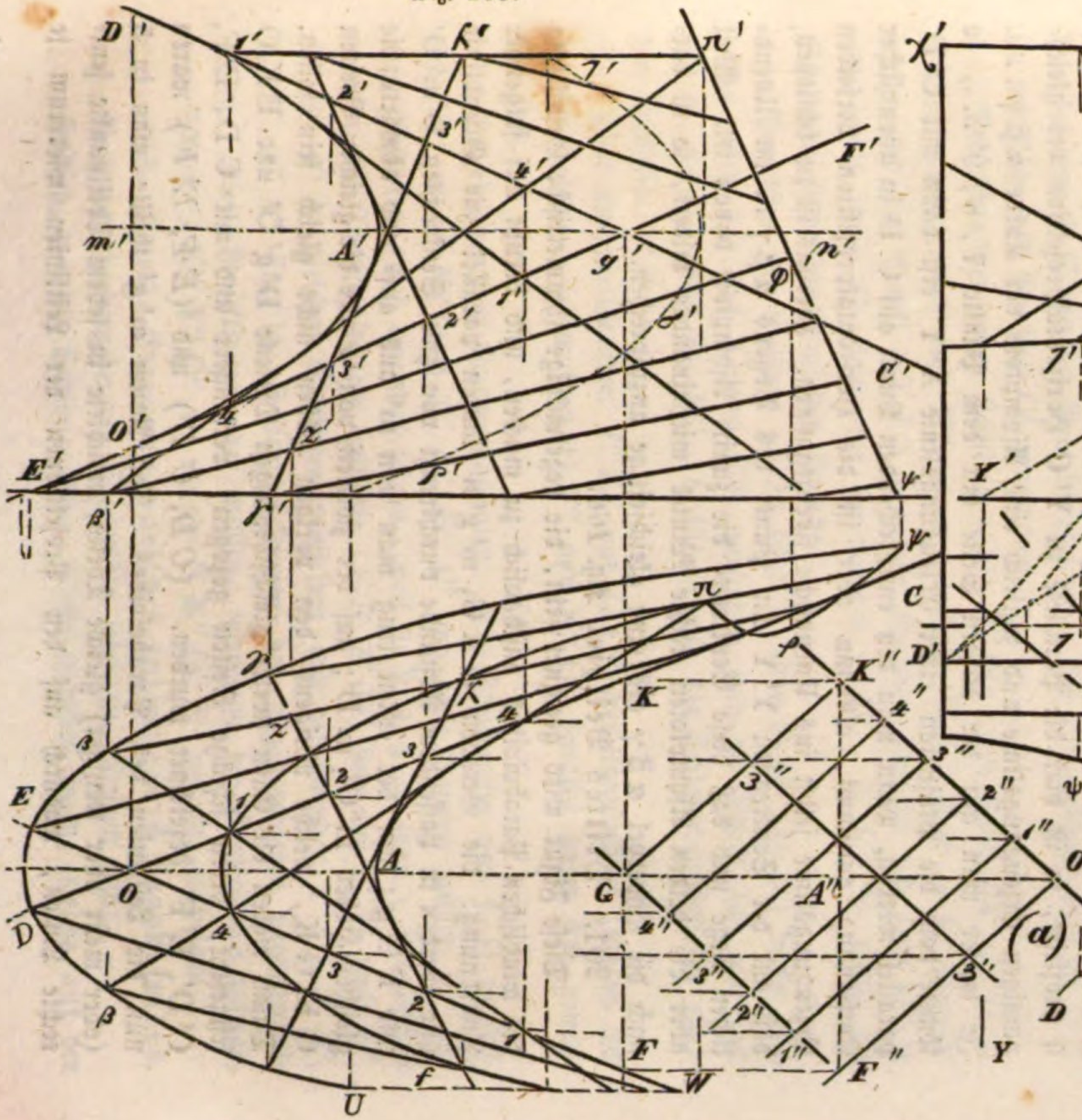
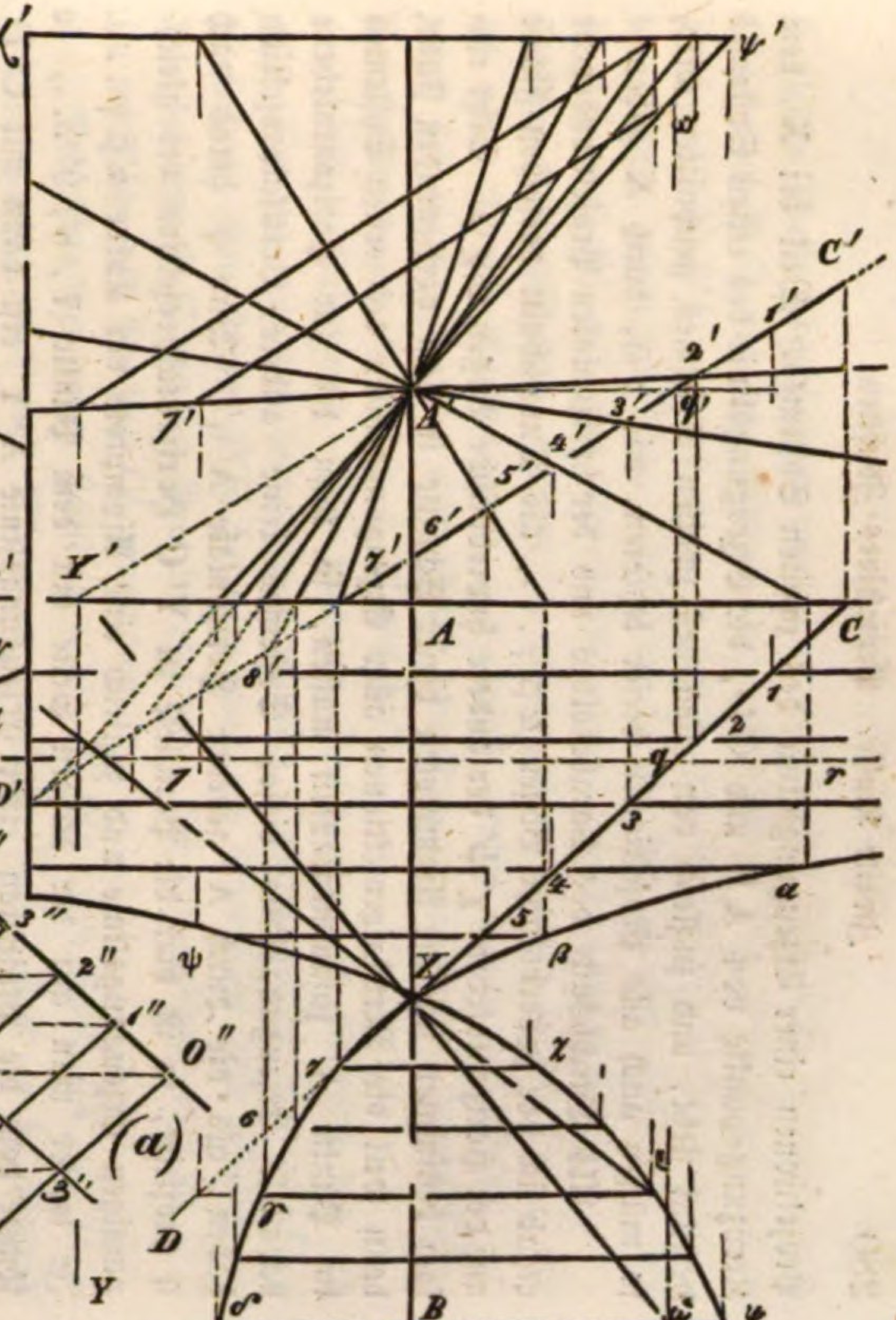


Fig. 165.



Projektionen einer Erzeugungslinie des zweiten Systemes. Weil bei X, dem Kreuzungspunkte von A B und C D, die Erzeugungslinie des ersten Systemes vertikal steht, und zugleich von allen des zweiten Systemes geschnitten wird, so müssen auch alle Projektionen dieser letzteren, wie $\tau\,\omega$, durch X gehen.

Als Durchschnitt des Paraboloides und der horizontalen Projektionsebene ergab sich der hyperbolische Bogen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots$, als Durchschnitt derselben Fläche auf der Horizontalebene $\chi'\,\psi'$ der andere hyperbolische Bogen $\varphi\,\chi\,\psi$. Sehr einfach bestimmen sich die Asymptoten dieser Schnitte in dem vorliegenden Falle, denn weil die Vertikalprojektionen aller Erzeugungslinien des ersten Systemes im Punkte A′ zusammenlaufen müssen, so kann die zur Horizontalebene parallele Erzeugungslinie dieses Systemes keine andere Vertikalprojektion haben, als die durch A′ gehende Horizontale A′ q′. Wird q′ herab nach q projicirt, so ist hier die Parallele zu Y′ C Horizontalprojektion der gleichnamigen Erzeugungslinie und zugleich eine Asymptote der Kurve $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots.$ Je weiter man auf der andern Seite mit dem Punkte 7′, 8′, 9′ ..., so könnte doch die Projektion einer Erzeugungslinie A′ Y′ erst dann mit C′ D′ parallel werden, wenn man den entsprechenden Punkt auf C′ D in unendlicher Entfernung annimmt, alsdann aber ist die Horizontalprojektion derselben Erzeugungslinie selbst ins Unendliche übergegangen. Hieraus ist zu schließen, daß auf der Senkrechten Y′ Y ein Punkt des Bogens $\alpha\,\beta\,\gamma\,..$ im Unendlichen liege und daß diese Senkrechte die zweite Asymptote davon sei. Weil aber die beiden Asymptoten rechte Winkel mit einander bilden, so ist darnach die Hyperbel $\alpha\,\beta\,\gamma$ als eine gleichseitige anzusprechen.

201. Drittes Beispiel Fig. *166*.

Diese Figur wird geeignet sein, die regelmäßige symmetrische Gestaltung des windischen Paraboloides anschaulich zu machen, und beruht auf folgender Anordnung: die Geraden O A G, m′ g′ n′ laufen parallel zur Grundlinie und werden in passendem Abstande durchkreuzt von zwei Senkrechten O m′ D′ und F G g′; auf der ersten trug man von m′ aus auf- und abwärts die gleichen Höhen m′ O′, m′ D′; auf der zweiten von G aus die gleichen Breiten G F, G K, welche übrigens den vorigen Höhen nicht gleich sein sollen. Damit waren die Ecken zweier gleichschenkligen Dreiecke D′ g′ O′ und F K O festgesetzt, deren schräge Seiten gezogen, verlängert und mit C D, E F, C′ D′, E′ F′ bezeichnet wurden. (*C D, C′ D′*) und (*E F, E′ F′*) waren nun die Leitlinien des Paraboloides. Den Raum m′ g′ theilte man in 5 (oder mehr oder weniger) gleiche Theile, errichtete in jedem Theilpunkte senkrechte Linien, wodurch auf den Projektionen der Leitlinien wiederum je

5 gleiche Theile abgeschnitten wurden. Die neuen Theilpunkte hat man auf D′ C′ und D C von der Linken gegen die Rechte mit den fortlaufenden Zahlen 1′, 2′, 3′.... 1, 2, 3 ... beziffert und auf E′ F′, E F ebenso von der Rechten gegen die Linke. Dieselben Theile konnten noch beiderseits von F g′ und O D′ auf den Projektionen der Leitlinien aufgetragen werden. Nachdem dies geschehen, wurden die gleichnamigen Punkte 1′ und 1′, 1 und 1, dann 2′ und 2′, 2 und 2 ..... durch gerade Linien verbunden, wodurch sich die Projektionen einer Reihe von Erzeugungslinien in symmetrischer Anordnung gegen A G und A′ g′ ergaben.

202. **Fortsetzung.** Vor weiterem Fortschreiten im Erklären der **Fig.** *166* wird es gerathen sein, die zugehörige Seitenprojektion (*a*) ins Auge zu fassen. Die Gerade F K betrachte man als Grundlinie und folglich die Vertikalebene F K als die Projektionsebene. Als Grundlinie aber sei F K in der Höhe des Punktes O′ genommen.

Projektion der ersten Leitlinie (*C D, C′ D′*). Der Punkt (*K, g′*) dieser Leitlinie projicirt sich nach K″, wenn die Höhe K K″ gleich m′ O′ gemacht wird, und der Punkt (*O, D′*) derselben Geraden projicirt sich nach O″ in einer Höhe über G gleich der Senkrechten O′ D′. K″ O″ ist sohin die Seitenprojektion der fraglichen Geraden.

Projektion der Leitlinie (*E F, E′ F′*). Der Punkt (*O, O′*) dieser Geraden wird sich nach G auf F K projiciren und der Punkt (*F, g′*) nach F″ in gleicher Höhe mit K″. G F″ ist also die Seitenprojektion der zweiten Leitlinie.

Weil nun die Geraden F″ K″ und G O″, der Konstruktion zufolge, sich in A″ halbiren, so mußten G F″ und K″ O″ parallel unter sich geworden sein.

Projektionen der Erzeugungslinien. Die Theilpunkte von C D projiciren sich auf O″ K″ nach 1″, 2″, 3″, 4″ und diese letzteren müssen in gleichen Abständen auf einander folgen, weil 1, 2, 3, 4 es thun. Desgleichen werden die Theilpunkte der Leitlinie (*E F, E′ F′*) sich auf F″ G nach 1″, 2″, 3″, 4″ in gleichen Abständen projiciren und die Geraden 1″ 1″, 2″ 2″, 3″ 3″, 4″ 4″ sind die Seitenprojektionen der angenommenen Erzeugungslinien. Diese Projektionen aber müssen, wiederum der Konstruktion zufolge, den Seiten G K″, F″ O″ der Raute G K″ O″ F″ parallel erscheinen.

203. Zweite Erzeugungsart des vorliegenden Paraboloides.

Nach den vorhergehenden Ergebnissen wird zu erkennen sein:

Erstlich, daß die Leitlinien einer Ebene parallel liegen, welche auf der

Projektionsebene F K senkrecht steht, und von welcher man A G als Horizontalriß, G F″ als Vertikalriß betrachten darf.

Zweitens, daß die Erzeugungslinien einer anderen Ebene parallel liegen, welche gleichfalls auf der Ebene F K senkrecht steht und von welcher G A als Horizontalriß, G K″ als Vertikalriß zu nehmen ist. Die Horizontale A G bildet den gegenseitigen Durchschnitt der beiden Leitebenen, und auf diesem A G mußte die Projektionsebene F K senkrecht stehen, damit die Linien des Paraboloides sich darauf als Parallele darstellen (§. 198).

Zur Reihe der Erzeugungslinien gehören nun noch jene zwei, welche sich nach F″ O″ und G K″ projiciren, und diese sollen als die Leitlinien des zweiten Erzeugungssystemes genommen werden. Aber die Horizontalprojektion, welche der Geraden F″ O″ entspricht, ist F O E und die zugehörige Vertikalprojektion ist C′ g′ D′. Desgleichen entspricht der Geraden G K″ als Horizontalprojektion die Linie C K O D, und als Vertikalprojektion die Linie F′ O′ E′. Zur Uebersicht bilden wir folgende Zusammenstellung.

	Erste Erzeugungsart.	Zweite Erzeugungsart.
Leitlinien	$(CD, C'D')$, $(EF, E'F')$	$(EF, C'D')$ und $(CD, E'F')$
Leitebene	K″ G A	F″ G A.

Somit erscheint C′ D′ als Vertikalprojektion einer Leitlinie der ersten Art und zugleich als eine solche der zweiten Art, nur entspricht ihr im ersten Falle C D, im zweiten E F als Horizontalprojektion, E′ F′ stellt eine Leitlinie der ersten wie der zweiten Art dar, je nachdem E F oder C D als zugehörige Horizontalprojektion genommen wird. — Von den Projektionen der Erzeugungslinien zweiter Art bleibt gleiches Verhalten nachzuweisen. Diese müssen in der Seitenprojektion (a) als Parallelen zu G F″ oder K″ O″ sich darstellen. Angenommen nun, man habe G K″ und F″ O″ jedes in 5 gleiche Theile getheilt, wie es G F″ und K″ O″ sind, 3″ und 3″ seien zwei entsprechende Theilpunkte, und die Gerade 3″ 3″ darum die Projektion einer Erzeugungslinie zweiten Systemes, so ergiebt sich 3 3 als deren Horizontalprojektion zu erkennen und 3′ 3′ als die zugehörige Vertikalprojektion. Somit hat auch jede von den Projektionen unserer Erzeugungslinien die doppelte Bedeutung einer Geraden der ersten Art und einer der zweiten. Nehmen wir z. B. die Projektion 2′ 2′, bei welcher ebensowohl das obere als das untere 2′ auch für das vordere gelten kann, und wiederum wird jeder der beiden Punkte 2, 2 als oberer, der andere als unterer anzusprechen sein. Dies sind auch die Gründe, warum in unserer Figur kein Stück der

Projektion einer Erzeugungslinie punktirt werden durfte; denn wäre ein Theil auch verdeckt, insofern die Linie dem ersten Erzeugungssystem beizuzählen blieb, so mußte er wiederum sichtbar erscheinen, weil dieselbe Linie auch eine Gerade der zweiten Art vorstellt und diese letztere alsdann nicht verdeckt auftritt. Das ähnliche Verhalten haben wir schon bei dem windischen Hyperboloide Fig. *116* wahrgenommen.

204. Noch einige allgemeine Beziehungen der Fig. *166*. Den scheinbaren Umriß der Vertikalprojektion bildet eine Parabel, deren Scheitel A′ in der Mitte von m′ g′ liegt, weil eine Senkrechte, durch diese Mitte gezogen, als Projektion mit zur Reihe der Erzeugungslinien gehörte. Würde man, nach Anleitung von §. 165, die Berührungspunkte der Geraden 1′ 1′, 2′ 2′ und der Parabel suchen, so fänden sich deren zugehörige Horizontalprojektionen auf der Geraden A O, ein Beweis, daß der Schnitt des Paraboloides und der Ebene A O es ist, welcher sich in der Vertikalprojektion als der Umriß D′ A′ O′ darstellt. — In der Horizontalprojektion wird der scheinbare Umriß durch eine Parabel K A F dargestellt, deren Scheitel A wiederum und aus denselben Gründen in der Mitte von O G liegen muß, wie A′ in der Mitte von m′ g′. Von den Berührungspunkten der Parabel mit den Geraden 2. 2, 3. 3 ..., wenn sie nach Art. 165 bestimmt würden, liegen die Vertikalprojektionen auf der Geraden A′ n′, wodurch angezeigt ist, daß K A F den Durchschnitt des Paraboloides mit der Horizontalebene m′ n′ vorstellt. Diese Horizontalebene und die Vertikalebene O A G schneiden sich selbst nach der Horizontalen (O G, m′ n′), welche die Axe des Paraboloides vorstellt, und in (*A*, *A′*), wo diese Axe durch die Fläche dringt, ist deren Scheitel.

Obere und untere Grenze des Paraboloides. Von der horizontalen Projektionsebene wird unsere Fläche nach der Parabel γ β E D geschnitten und begrenzt; diese Parabel ist der geometrische Ort aller Durchschnitte (β′, β), (γ′, γ) ... 2c. der geraden Erzeugungslinien und der Horizontalebene. Eine zweite Horizontalebene in der Höhe des Punktes (*1*, *1′*) auf (*C D*. *C′ D′*) begrenzt die Fläche in ihrem oberen Theile. Der hierdurch gebildeten Parabel λ 1 λ π gehören die Punkte wie (λ, λ′) an, in welchen die Erzeugungslinien (*3*. *3*, *3′ 3′*) ... durch die genannte Horizontalebene dringen.

Beachtet mag hierbei werden, daß die Punkte, wie γ oder λ, sich auch ohne Beihilfe der Vertikalprojektionen zu erkennen geben, weil sie infolge unserer Anordnung immer auch die Kreuzungspunkte von Erzeugungslinien des ersten und zweiten Systemes sind.

Eine schiefe Ebene $\pi' \psi'$, welche auf der Vertikalebene senkrecht steht, begrenzt das Paraboloid auf dessen rechter Seite; doch konnten von den zwei Aesten des Schnittes nur die Horizontalprojektion des der Vertikalebene nächsten Bogens $\pi\, \varphi\, \psi$ auf der Zeichnung angegeben werden.

Bei $\rho' \sigma' \tau'$ hat man noch den Schnitt ausgedrückt des Paraboloides und einer Ebene U W, welche zur vertikalen Projektionsebene parallel steht. Es ist dies $\rho' \sigma' \tau'$ wieder eine Parabel, von welcher man finden wird, daß sie der Parabel D′ A′ O′ gleich sei, indem diese zwei Parabeln bei einer gleichen Länge A′ m′ gleiche Oeffnungsweite O′ D′ haben. An dem gleichen Merkmale wird auch erkannt werden, daß die Parabeln F A K, $\lambda\, \tau\, \lambda\, \pi$, β E $\beta\, \gamma$ unter sich gleich seien.

Man wolle bemerken, daß die parabolischen Schnitte alle in Ebenen liegen, welche dem Durchschnitte (*A G*, *A′ g′*) beider Leitebenen parallel sind. Indem man die Ergebnisse festhält, welche allerdings hier nur der Erfahrung in einem einzelnen Falle entnommen sind, die Ergebnisse nämlich, daß alle Schnitte des vorliegenden Paraboloides durch horizontale Ebenen Parabeln sind, welche der F A K .. gleichen, und alle Schnitte, durch Vertikalebenen, welche A O parallel sind, Parabeln von gleicher Gestalt, wie O′ A D′, so wird einleuchten, daß dies Paraboloid auch auf folgende Weise zu erzeugen wäre: die Parabel (*K A F* .., *A′ g′*) ist eine feste Leitlinie, die Parabel (*D′ A O′*, *A O*) eine mobile Erzeugungslinie, welche sich derart bewegt, daß, während ihre Ebene stets der ursprünglichen Richtung parallel bleibt, der Scheitel (*A′*, *A*) den Umfang der ersten Parabel durchläuft. Damit ist nun auch nachgewiesen, daß das windische Paraboloid Fig. *166* identisch sei mit demjenigen, welches wir in §. 87 mit dem Namen hyperbolisches Paraboloid unter den Flächen der zweiten Ordnung aufgeführt haben. Allein es wird ohne sonderliche Schwierigkeit wahrzunehmen sein, daß die projektiven Ergebnisse unserer Figur auch in jedem anderen Falle durch eine passende Wahl der Projektionsebenen herbeizuführen sind, indem man dabei von einer ersten Projektionsebene ausgeht, welche wie F K auf dem Durchschnitte beider Leitebenen senkrecht steht. Damit aber gewinnen unsere vorigen Ergebnisse den Charakter der Gemeingiltigkeit.

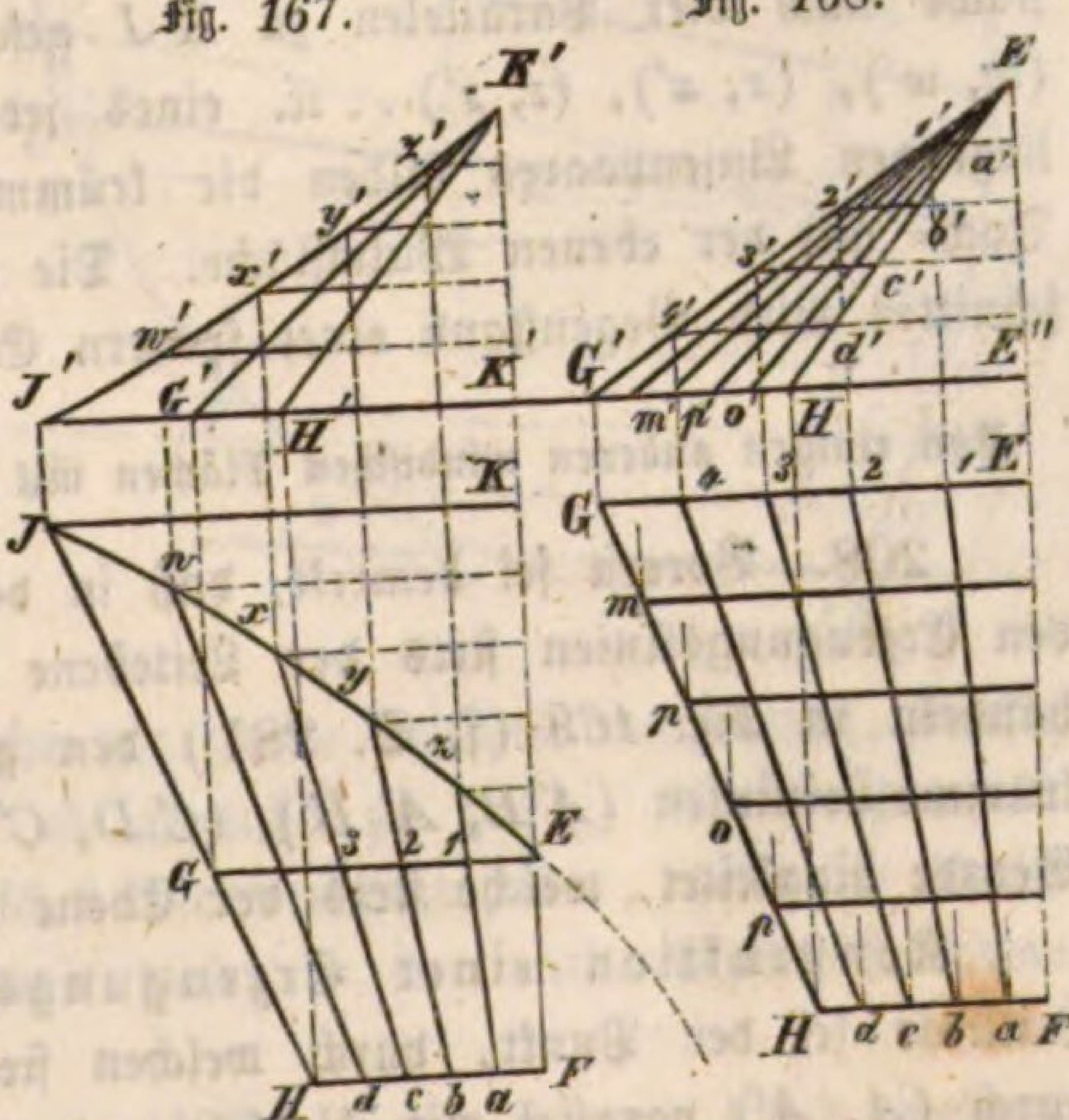
205. Tangirende Ebene des Paraboloides Fig. *166*. (*z*, *z′*) auf der Geraden (*z 2*, *z′ 3′*) sei der Berührungspunkt. Durch ihn geht eine Gerade (*z* β, *z′* β') des zweiten Systemes; beide zusammen bestimmen die berührende Ebene des Punktes (*z*, *z*), Horizontalriß dieser Ebene, geht durch die Begegnungspunkte beider Geraden und der Horizontalebene, wird

also die (nicht gezogene) Gerade $\beta\gamma$ sein, deren Stück zwischen β und γ als Sehne des parabolischen Bogens $\beta\gamma$ auftritt, denn, nochmals sei hervorgehoben, daß die Ebene, welche das Paraboloid in irgend einem seiner Punkte tangirt, wie hier in (z, z'), zugleich auch eine secirende Ebene sei, daß sie nämlich die Fläche nach den zwei geraden Erzeugungslinien durchschneide, welche in (z, z') sich kreuzen, und daß nur in diesem Punkte zwischen der Ebene und der krummen Fläche eine „Berührung" stattfinde, deren Flächenausdehnung nothwendig ein Kleinstes geworden.

206. Vorkommen paraboloidischer Formen.

Wir treffen solche unter andern in gewissen architektonischen Bildungen, namentlich in jener der Dachflächen. Sobald hier der (wagrechte) First und die Traufe nicht parallel unter sich liegen, kann auch die Dachfläche, welcher diese Linien angehören, nicht mehr eine ebene Fläche sein und zeigt meistens die paraboloidische Form. So soll in Fig. 167 das bei E und F rechtwinklige Trapez $EFHG$ die Horizontalprojektion oder der Grundriß eines Raumes sein, welcher durch eine Dachfläche zu überdecken ist. (EF, E'), die Firstlinie, steht auf der Vertikalebene senkrecht, und die Traufe $(GH, G'H')$ ist mit jener ersten nicht parallel. Die rechtwinkligen Dreiecke $(GE, G'E''E')$ und $(HF, H'E''E')$ betrachte man als die beiden Giebelflächen.

Fig. 167. Fig. 168.



Die Dachfläche wird nun durch ein Paraboloid gebildet, von welchem (EF, E') und $(GH, G'H')$ als die Leitlinien genommen werden können, $(GE, G'E')$ und $(HF, H'E')$ als zwei Erzeugungslinien. Alle übrigen Erzeugungslinien dieses Systemes sind der Vertikalebene GE parallel, ihre Horizontalprojektionen $m\mu$, $n\nu$ erscheinen parallel mit GE und ihre Vertikalprojektionen $m'E'$, $n'E'$ konkurriren in E'. Was die Erzeugungslinien des zweiten Systemes betrifft, so sind sie der Horizontalebene parallel und ihre Vertikalprojektionen erscheinen als die Wagrechten $1'a'$, $2'b'$ ... 2c., die entsprechenden Horizontalprojektionen $1a$, $2b$, $3c$ ... 2c. ergeben sich, indem die

Punkte $1', 2', 3'$ herab auf GE nach $1, 2, 3$ ... projicirt werden, und a', b', c' ... auf HF nach a, b, c ....; durch die ersten Erzeugungslinien ist die Richtung der Dachsparren angegeben, und durch die zweiten Erzeugungslinien die Richtung der Latten. Indem man diese Holzstücke für einen Augenblick nur als Linien betrachtet, läßt sich sagen, daß bei der windischen Dachfläche Sparren und Latten noch geradlinig seien.

207. Aehnliche windische Dachfläche, doch mit einem Walme (§. 47) an der Seite JK; das windische Viereck ($EFHG, E'H'G'$) hat hier ganz gleiche Bedeutung wie in Fig. *167*, und die Linien, deren Horizontalprojektionen $1a, 2b, 3c$ rc., stellen wagrechte Erzeugungslinien der windischen Dachfläche, zugleich auch die Richtung der Latten des Dachwerkes vor. Von den Horizontalebenen der genannten Erzeugungslinien wird die ebene Walmfläche nach vier Parallelen zu KJ geschnitten und die Begegnungspunkte (w, w'), (x, x'), (z, z') .. rc. eines jeden in der gleichen Horizontalebene liegenden Linienpaares bilden die krumme Durchschnittslinie der windischen Dach- mit der ebenen Walmfläche. Die nähere Beschaffenheit dieses Durchschnittes wird Gegenstand einer spätern Erörterung sein.

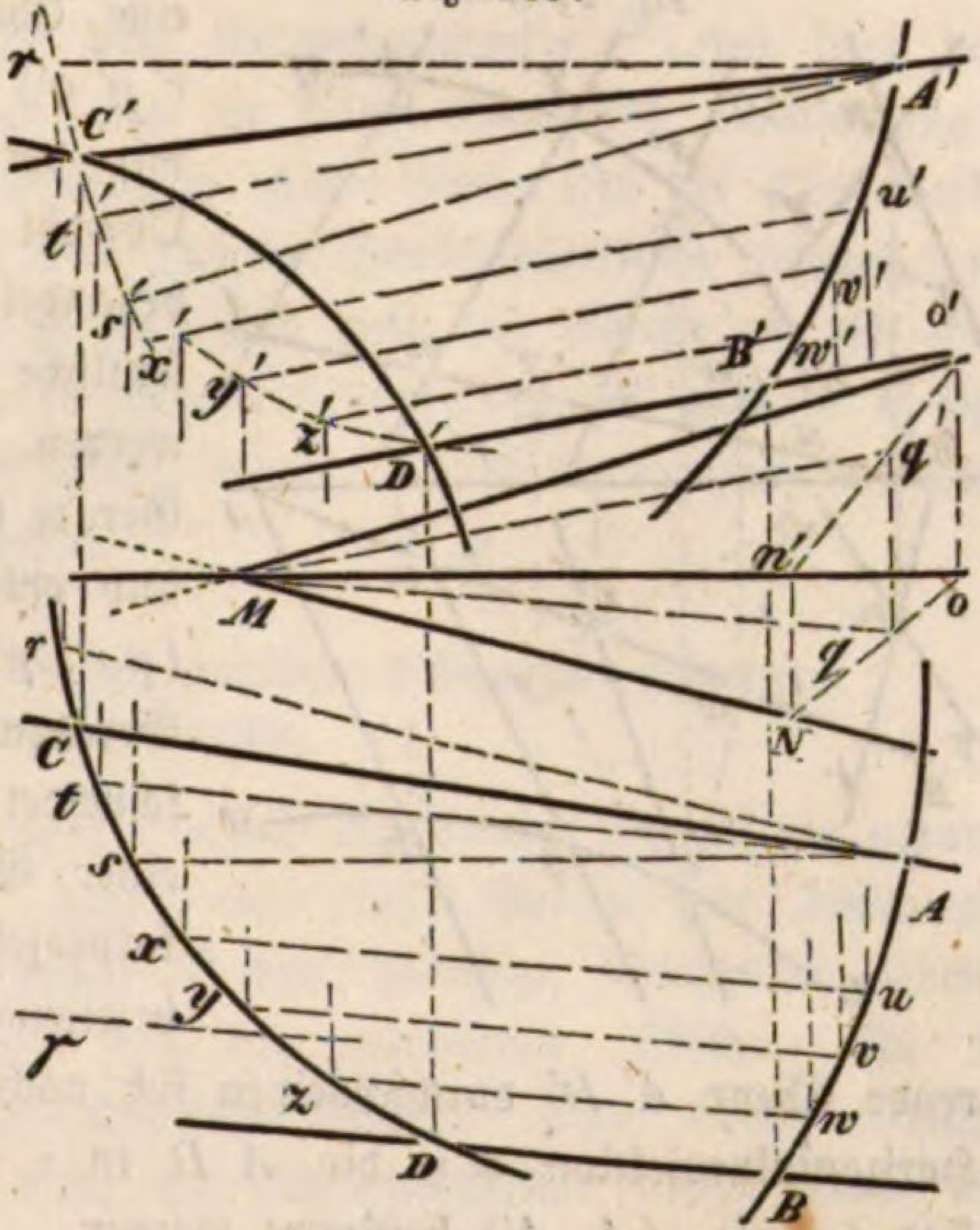
Von einigen anderen windischen Flächen mit zwei Leitlinien und einer Leitebene.

208. Vorerst sei bemerkt, daß in den nächstfolgenden Fällen die geraden Erzeugungslinien stets der Leitebene parallel sein sollen, und wir behandeln in Fig. *169* (s. S. 287) den ganz allgemeinen Fall, daß zwei krumme Leitlinien ($AB, A'B'$), ($CD, C'D'$) gegeben sind, auf denen eine Gerade hingleitet, welche stets der Ebene N M O′ parallel bleiben soll.

Konstruktion einer Erzeugungslinie. (A, A') auf der ersten Leitlinie sei der Punkt, durch welchen sie gehen soll. Eine Ebene, welche durch (A, A') parallel mit NMO' gelegt wird, schneidet die zweite Leitlinie in einem Punkte (C, C') und $(AC, A'C')$ ist die Erzeugungslinie des Punktes (A, A'). Zu diesem Behufe hat man in der Leitebene außer den Rissen noch einige Hilfslinien (Mq, Mq') ... rc. gezogen und mit jeder (A, A') durch eine Parallele $(Ar, A'r')$, $(As, A's')$, $(At, A't')$ ... Diese letzteren Linien müssen in einer zu NMO' parallelen Ebene liegen, sie schneiden die projicirende Fläche DC in Punkten (r, r'), (s, s'), (t, t') ... und die Linie, welche von diesen letzten Punkten gebildet wird, kreuzt sich mit den zweiten Leitlinien in (C, C'). Die Punkte $r' s' t'$ ... wurden deshalb durch eine krumme Linie verbunden und deren Durchschnitt C' herab nach C projicirt.

209. **Aufgabe.** Man verlangt jene Erzeugungslinie der vorliegenden windischen Fläche, deren Horizontalprojektion der beliebigen Geraden γ parallel ist? Weil die gesuchte Gerade jedenfalls auch der Ebene $N M O'$ parallel sein muß, zog man in dem Dreiecke $o M N$ eine Gerade $M q$ parallel zu γ, betrachtete sie als die Horizontalprojektion einer Geraden, welche in der Leitebene enthalten ist, und bestimmte nach dieser Anschauung ihre Vertikalprojektion $M q'$. Der Geraden $(M q, M q')$ mußte nun die gesuchte Erzeugungslinie parallel sein. Durch einen beliebigen Punkt der ersten Leitlinie dachte man sich jetzt eine Parallele mit $(M q, M q')$ gezogen, welche so auf der Leitlinie fortgleitete, daß sie immer parallel zu sich selbst blieb. Durch diese Bewegung mußte eine Cylinderfläche entstehen und wenn solche die zweite Leitlinie durchschnitt, durfte nur in dem Punkte, in welchem es geschah, zu $(M q, M q')$ abermals eine Parallele gezogen werden, welches die verlangte war; denn sie schnitt auch die erste Leitlinie, weil sie mit dieser in der entstandenen Cylinderfläche liegt.

Fig. 169.

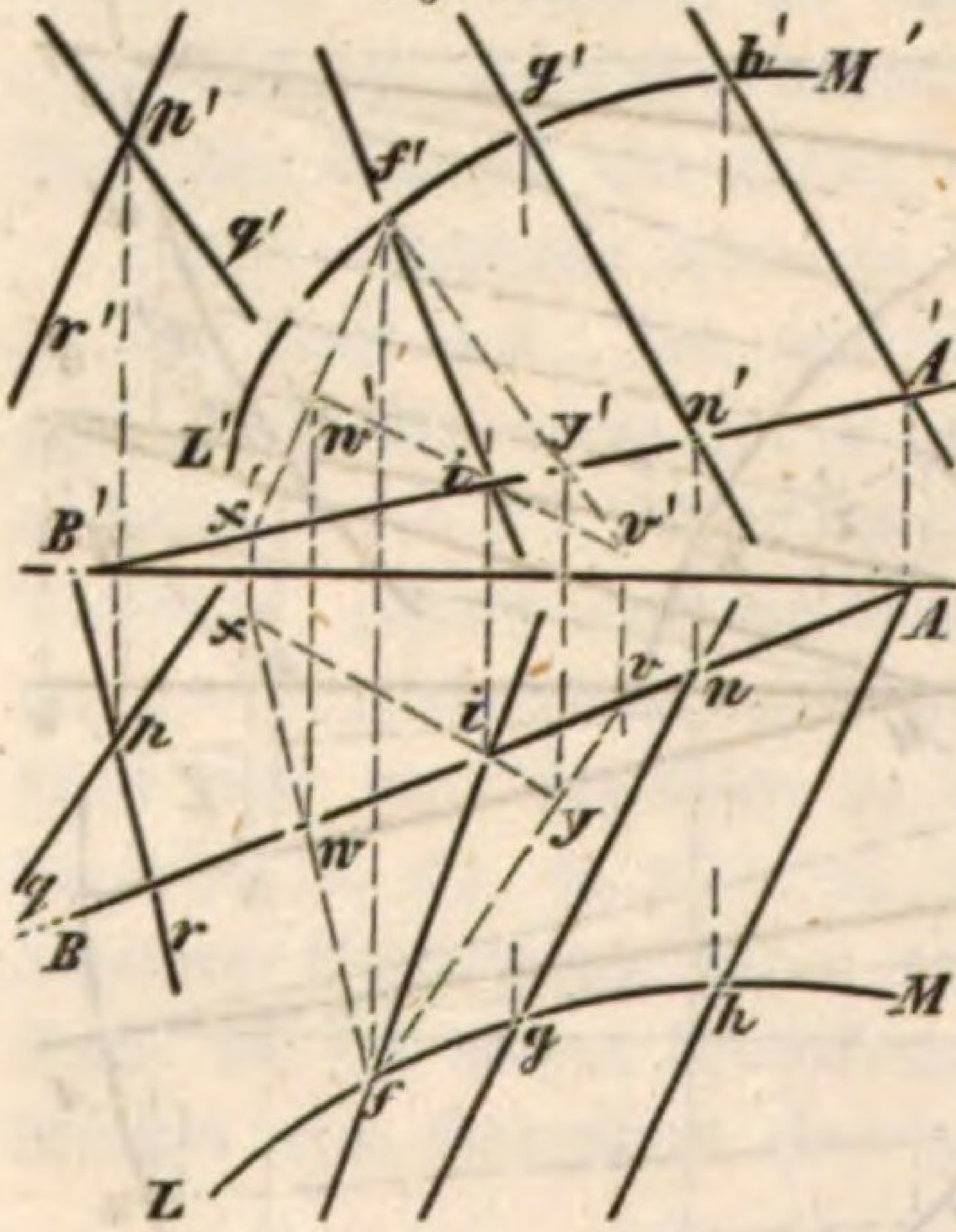


Zur graphischen Ausführung dieses Vorganges wurden durch mehrere Punkte (u, u'), (v, v'), (w, w') ... 2c. der ersten Leitlinie die Geraden $(u\,x, u'\,x')$, $(v\,y, v'\,y')$, $(w\,z, w'\,z')$ ... 2c. parallel mit $(M q, M q')$ gezogen, als Erzeugungslinien der genannten Cylinderfläche. Diese und die projicirende Fläche $D\,C$.. schnitten sich nach einer krummen Linie $(x\,y\,z\,.., x'\,y'\,z'\,..)$, deren Vertikalprojektion $x'\,y'\,z'$... mit $C'\,D'$ sich in einem Punkte D' kreuzt, welcher auf $C D$.. nach D herab zu projiciren blieb. Die Parallele $(D\,B, D'\,B')$ zu $(M q, M q')$ ist jene Erzeugungslinie der windischen Fläche, welche man suchte.

210. Anderes Beispiel. Die Gerade $(A\,B, A'\,B')$ Fig. 170 und die Kurve $(L\,M, L'\,M')$ seien die Leitlinien, $(r\,p\,q, r'\,p'\,q')$ die Leitebene. Hier die Erzeugungslinien zu konstruiren, wird man von Punkten (f, f'),

(g, g'), (h, h') der Krummen $(L\,M, L'\,M')$ ausgehen und auf der Geraden $A\,B$ die entsprechenden Punkte (i, i'), (n, n') ... ꝛc. suchen. Man hat zu dem Ende durch den erstgenannten Punkt eine Ebene zu legen, parallel mit $(r\,p\,q, r'\,p'\,q')$ und deren Durchschnitt (i, i') ... mit der geraden Leitlinie zu bestimmen. Obwohl diese Aufgabe bereits in §. 192 behandelt worden, soll doch auf das Wesentliche der Arbeit nochmals hingewiesen werden. Durch (f, f') zog man eine erste Gerade $(f\,v, f'\,v')$ parallel zu $(p\,q, p'\,q')$ und eine zweite $(f\,x, f'\,x')$ parallel zu $(p\,r, p'\,r')$. Die Ebene der zwei neuen Geraden ist der Leitebene parallel und sie schneidet die projicirende Ebene $A\,B$ nach einer Geraden $(v\,w, v'\,w')$, deren Vertikalprojektion $v'\,w'$ auf $A'\,B'$ den Punkt i' bezeichnet. Dieselbe Ebene und die projicirende Ebene $A'\,B'$ durchschneiden sich nach einer Geraden $(x\,y, x'\,y')$, deren Horizontalprojektion $x\,y$ die $A\,B$ in i durchkreuzt ꝛc. In gleicher Weise sind (n, n'), (A, A') bestimmt worden.

Fig. 170.



Von den tangirenden Ebenen der windischen Flächen.

211. **Lehrsatz.** Jede Ebene, welche durch eine gerade Erzeugungslinie einer windischen Fläche geht, tangirt die Fläche in irgend einem Punkte der Geraden.

Beweis. Es sei G eine gerade Erzeugungslinie irgend einer windischen Fläche.

G', G'', G''' ... und $G_,$, $G_{,,}$, $G_{,,,}$ ... seien benachbarte Erzeugungslinien der Art, daß G zwischen beiden Gruppen liegt. E sei eine Ebene, welche durch G gelegt worden, ohne daß man ihr sonst noch eine Bedingung der Lage vorschriebe. Diese Ebene wird im Allgemeinen keiner der Geraden G''', G'', G', G, $G_,$, $G_{,,}$, $G_{,,,}$ ... parallel sein, jegliche also in einem Punkte durchschneiden. P''', P'', P', P, $P_,$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$ ... seien die Durchschnittspunkte in derselben Reihenfolge wie die der Erzeugungslinien. Weil aber diese letzte Reihenfolge eine stetige, muß es auch die erste sein; mit anderen Worten: die genannten Punkte müssen eine stetige krumme Linie bilden, welche nach dem Gesetze der Kontinuität die Gerade G in einem Punkte P kreuzt. Die

Gerade G und die Krumme $P''' P'' P' P P, P_{,,} P_{,,,}$ bilden mit einander den Durchschnitt der windischen Fläche und der Ebene E. (Bei dem windischen Paraboloide und Hyperboloide ist, wie wir bereits gesehen, $P''' P'' P' \ldots$ wiederum eine gerade Linie.) In dem Kreuzungspunkte P aber hört der Charakter des Durchschneidens auf und es findet hier eine „Berührung" zwischen der Ebene E und der windischen Fläche statt. In der That denke man sich in P eine Tangente an die krumme Durchschnittslinie gezogen, so gehört diese Tangente der Ebene E an, und weil die Gerade G als ihre eigene Tangente zu betrachten ist, so liegen in der Ebene E zwei in P sich kreuzende Tangenten der windischen Fläche, womit E als die tangirende Ebene der Fläche in dem Punkte P erscheint.

Konstruktion der tangirenden Ebene windischer Flächen bei gegebenem Berührungspunkte.

212. Es sei dieser Punkt abermals mit P bezeichnet. Nun ist die gerade Erzeugungslinie, welche durch P geht, eine erste Gerade der berührenden Ebene §. 100. Man lege durch P eine beliebige schneidende Ebene und konstruire deren Durchschnitt mit der windischen Fläche. In P lege man eine Tangente an diese Durchschnittslinie. Eine Ebene endlich, welche durch die Tangente und durch die Erzeugungslinie gelegt wird, ist die verlangte.

Diese Konstruktion, so selbstverständlich sie zu sein scheint, bringt uns in praxi doch öfter der mißlichen Forderung gegenüber, Tangenten an krumme Linien zu ziehen, deren Bildungsgesetz nicht näher bekannt ist. Dem kann ausgewichen werden durch nachfolgende

Zweite Konstruktionsart vermittelst windischer Hilfs-Paraboloide.

213. Von den Leitlinien windischer Flächen wird in der Regel vorausgesetzt werden dürfen, daß sie bekannter Natur seien. Dies unterstellt und weiter angenommen, man habe, wie vorhin, die gerade Erzeugungslinie des Berührungspunktes konstruirt oder gegeben erhalten, so wird diese Erzeugungslinie die erste Leitlinie in einem Punkte F treffen und hier werde eine Tangente an diese Leitlinie gezogen. Die Erzeugende wird die zweite Leitlinie in einem Punkte H durchkreuzen, wo auch an diese zweite Leitende die Tangente festgesetzt werde. Genannte zwei Tangenten sollen als die Leitlinien eines Paraboloides genommen werden, mit gleicher Leitebene wie die vorliegende windische Fläche; dann ist $F H$ gleichzeitig auch eine Erzeugungs-

linie des Paraboloides, weil sie sich auf dessen zwei Leitlinien stützt und der Leitebene parallel liegt. Aber F und H sind nicht als isolirte Punkte zu betrachten, vielmehr als Linienelemente, deren jedes gleichzeitig der Tangente angehört, sowie der entsprechenden krummen Leitlinie, und während die Erzeugungslinie in ihrem Fortschreiten auf diesen zwei Berührungselementen $F' H$ hingleitet, erzeugt sie ein windisches Flächenelement, welches sowohl der ursprünglichen windischen Fläche als auch dem Paraboloide angehört. Beide krumme Flächen berühren sich sohin in allen Punkten dieses Elementes und haben an jedem dieser Punkte eine gemeinsame berührende Ebene. Wird schließlich in dem Punkte P die tangirende Ebene des Hilfsparaboloides bestimmt, was bekanntlich nur die Verwendung von Ebenen und geraden Linien erfordert, so ist diese tangirende Ebene auch diejenige der windischen Fläche, welche man verlangte.

214. Neue Anschauungen über die Generation windischer Flächen.

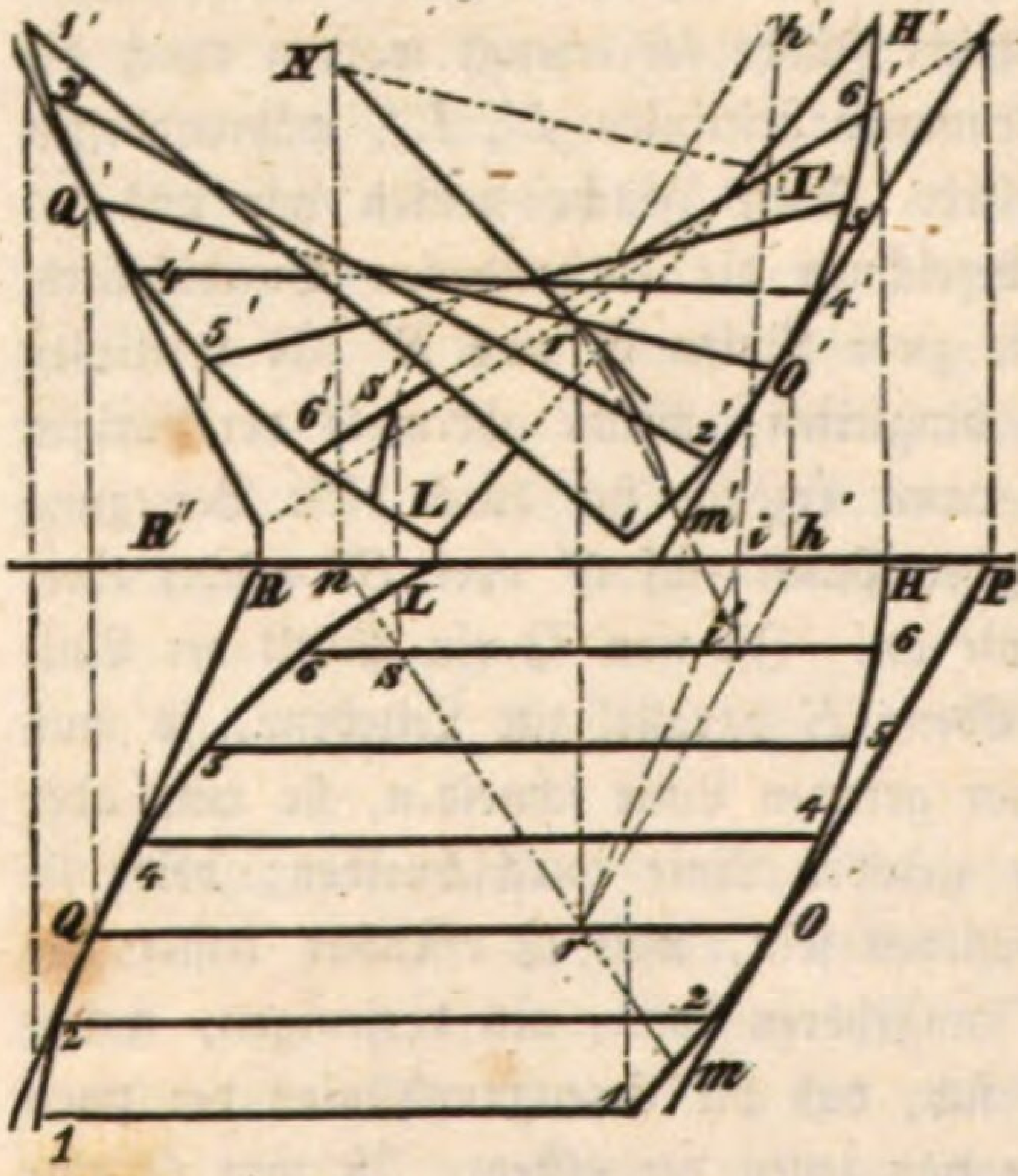
Angenommen, die in Rede stehende windische Fläche werde durch eine Reihe von Ebenen geschnitten, welche der Leitebene parallel sind, und unendlich nahe aufeinander folgen. F', F'', F''', F'''' .... seien die Durchschnittspunkte dieser Ebenen und der ersten Leitlinie; H', H'', H''', H'''' .... die Durchschnitte der Ebenen und der zweiten Leitlinie, also $F' H', F'' H'', F''' H'''$ .... aufeinander folgende gerade Erzeugungslinien der Fläche. Nun aber sind die Theilchen zwischen den Punkten F', F'', F''' ... und H', H'', H''' nichts Anderes als aufeinander folgende Linienelemente, und die Erzeugungslinie, während sie auf den beiden einander entsprechenden Elementen F' und H' hingleitet, wird das erste windische Flächenelement hervorbringen. Durch das Gleiten der Erzeugungslinien auf den folgenden Elementen F'' und H'' entsteht das zweite windische Flächenelement u. s. f. Denkt man sich jetzt die Linienelemente F' und H' zu Tangenten verlängert, dann erscheinen diese als die Leitlinien eines Paraboloides, von welchem $F' H'$ gleichfalls ein Flächenelement ist. Durch die Verlängerungen der zweitfolgenden Elemente F'' und H''' werden wiederum zwei Tangenten und damit die Leitlinien eines zweiten Paraboloides gewonnen, welchem seinerseits das zweite windische Element angehört. Nach dieser Folge ist denn ersichtlich, daß die Erzeugungslinie, indem sie auf den Linienelementen F''' und H''', dann auf F'''' und H'''' ... u. s. f. hingleitet, jedesmal ein windisches Flächenelement hervorbringe, welches auch einem windischen Paraboloide, allerdings jedesmal einem anderen, angehören kann, und schließlich zeigen sich die Flächen-

elemente aller windischen Flächen, von welchen wir gesprochen, als dem Wesen nach paraboloidische Elemente. Jegliches Element an sich muß als unveränderlich gelten, nicht aber das Paraboloid, welchem es angehört, denn dies Paraboloid ist seiner Natur nach unbestimmt und darum veränderlich.

215. **Fortsetzung.** Eine windische Fläche sei erzeugt worden durch die Bewegung einer Geraden auf zwei krummen Leitlinien L', L'', währenddessen sie stets einer Leitebene parallel blieb. Diese Fläche denken wir uns geschnitten durch zwei Ebenen und bezeichnen die entstandenen Durchschnittslinien mit S', S''. Wir nehmen die zwei Linien S' und S'' als Leitlinien und lassen auf ihnen eine Gerade hingleiten, welche abermals der vorigen Leitebene parallel zu bleiben hat, dann erzeugt sich durch diese Bewegung wiederum die vorige Fläche, denn jeder Punkt auf S' oder S'' gehört einer ursprünglichen geraden Erzeugungslinie an. Ist nun Q ein Punkt der Linie S' und man legt durch ihn eine Ebene E parallel zur Leitebene, so muß diese die letzterzeugte Fläche nach einer geraden Linie schneiden, sie muß aber auch die primitive Fläche nach einer geraden Linie durchschneiden; beide jedoch können nicht von einander verschieden sein, weil Q offenbar keiner anderen Geraden des ersten Systemes angehören kann, als derjenigen, welche in der Ebene E liegt. So beweist sich, daß die Erzeugungslinien der zweiten Art nicht verschieden sein können von jenen der ersten. Ist nun G eine gerade Erzeugungslinie, welche die Leitlinien L' und L'' in den Punkten F und H schneidet, die Leitlinien S' und S'' in den Punkten Q und P, so werden die Linienelemente F, H, Q, P einem und demselben windischen Flächenelemente angehören; verlängert man aber die Linienelemente, daß sie Tangenten werden, dann ist das Paraboloid, welchem die Tangenten F und H als Leitlinien gegeben werden, ein anderes als dasjenige, welches die Tangenten Q und P zu Leitlinien hat, und wiederum ein anderes als dasjenige, wovon etwa die Tangenten F und P die Leitlinien wären. Aber die Ebenen der Kurven S' und S'' waren beliebig genommen, andere an deren Stelle hätten neue Leitlinien S''' und S'''' derselben Fläche geliefert, und eine jede dieser Linien, da wo sie die Gerade G kreuzt, eine neue Tangente, als abermals andere Leitlinie des berührenden Paraboloides, welches somit als an sich unbestimmt erscheint. Mit anderen Worten: es lassen sich beliebig viele Paraboloide bestimmen, welche ein und dasselbe windische Flächenelement unter sich und mit einer anderen windischen Fläche gemein haben, und darum auch eine gemeinsame berührende Ebene an jedem Punkte dieses Elementes.

Anmerkung. Die beiden Sätze §§. 211 und 212 dürfen jetzt schon als allgemein giltig betrachtet werden, während die Entwickelungen von §§. 213 bis 215 sich zunächst nur auf die Unterstellung gründen, daß die geraden Erzeugungslinien der windischen Fläche einer Leitebene parallel seien. In Kürze jedoch wird sich Gelegenheit geben zu zeigen, daß diese Beschränkung nicht in der Sache selbst liege.

Fig. 171.



216. Ein Beispiel zur Anwendung Fig. 171. (*O H*, *O′ H′*), (*Q L*, *Q′ L′*) seien die Leitlinien einer windischen Fläche, deren gerade Erzeugungslinien zur vertikalen Projektionsebene parallel sein sollen. Eine Gerade O Q parallel zur Grundlinie stellt eine vertikale Ebene vor, welche der Leitebene parallel liegt; sie schneidet die erste Leitlinie in (*O*, *O′*), die zweite in (*Q*, *Q′*) und (*O Q*, *O′ Q′*) ist eine gerade Erzeugungslinie der Fläche. — (*r*, *r′*) ist auf dieser Erzeugungslinie ein Punkt der Fläche, an welchem die tangirende Ebene bestimmt werden soll.

Erste oder allgemeine Methode der Lösung (§. 212). Nachdem noch eine Reihe gerader Erzeugungslinien (*1 1*, *1′ 1′*), (*2 2*, *2′ 2′*) ... ꝛc. bestimmt war, deren Horizontalprojektionen 1. 2; 2. 2; 3. 3 .... sämmtlich der Grundlinie parallel laufen, legte man durch (*r*, *r′*) eine Vertikalebene m n in übrigens beliebiger Richtung. Man konstruirte die Durchschnittslinie (*m r s*, *m′ r′s′*) der Ebene und der windischen Fläche; eine Linie, gebildet aus den Begegnungspunkten der Erzeugungslinien und der Ebene m n, wie z. B. (*s*, *s′*) auf (*6. 6*, *6′ 6′*). Man zog in (*r*, *r′*) eine Tangente an die Durchschnittslinie, ihre Vertikalprojektion ist die Tangente r′ N′ der Kurve m′ r′ s′ .. und ihre Horizontalprojektion die Gerade m n. Eine Ebene durch (*O Q*, *O′ Q′*) und (*r N′*, *r n*) gelegt, ist die gesuchte. (Die Tangente wird von der Vertikalebene in (*n*, *N′*) getroffen und eine Parallele N′ I′ zu Q′ O′ ist der Vertikalriß der berührenden Ebene.)

217. **Konstruktion vermittelst des Hilfs-Paraboloides** (§. 213). In (O, O') zeichnete man die Tangente $(O P, O' P')$ der ersten Leitlinie $(O H, O' H')$, in (Q, Q') die Tangente $(Q R, Q' R')$ der zweiten Leitlinie $(Q L, Q' L')$. Beide Tangenten sind die Leitlinien des berührenden Paraboloides, dessen Leitebene wieder die vertikale Projektionsebene. Außer $(O Q, O' Q')$, der Erzeugungslinie erster Generation, welche durch (r, r') geht, muß noch eine zweite Gerade derselben Art bestimmt werden, welche nebst $(O Q, O' Q')$ als Leitlinie der zweiten Erzeugungsart dienen kann; wir wählen dazu diejenige, welche in der vertikalen Projektionsebene liegt, nämlich die Gerade $(R P, R' P')$. Die Erzeugungslinie des zweiten Systemes muß nun durch (r, r') gehen, muß die Gerade $(R P, R' P')$ schneiden und in einer Ebene liegen, welche den beiden Tangenten $(O P, O' P')$, $(Q R, Q' R')$ parallel ist. Zu dem Ende legte man durch (r, r') die Gerade $(r h, r' h')$ parallel zur ersten Tangente $(O P, O' P')$ eine Parallele, welche die Vertikalebene in (h, h') schneidet. Man legte durch (r, r') eine Parallele $(r i, r' i')$ zur zweiten Tangente $(Q R, Q' R')$, diese andere Parallele schneidet die Vertikalebene in (i, i'). Somit ist i′ h′ Vertikalprojektion des Durchschnittes der Vertikalebene und der Ebene $(h r i, h' r' i')$ und I′, wo h′ i′ und R′ P′ sich kreuzen, ist ein Punkt der gesuchten Erzeugungslinie des zweiten Systemes, §. 29. Weil jedoch I′ dem Vertikalriß der tangirenden Ebene angehört, und dieser Riß I′ N′ zu O′ Q′ parallel sein muß, so ist durch dies Verzeichnen des Risses I′ N′ unsere Aufgabe gelöst.

218. **Vergleichung der beiden Konstruktionen.** Bei der ersten Konstruktion hatten wir die mehrfach besprochene Aufgabe, an eine Linie m′ r′ s′ von unbekannter Natur eine Tangente r′ N′ zu ziehen. Hätte aber die Aufgabe also gestanden: „Es ist gegeben die Durchschnittslinie der windischen Fläche und der Ebene n m, und zwar m′ r′ s′ . . . als Vertikalprojektion dieser Linie, man sollte in dem Punkte (r, r') derselben die Tangente verzeichnen“, so hätte diese Aufgabe nach der zweiten Konstruktion gelöst werden können, indem man erwog, daß die verlangte Tangente einmal in der tangirenden Ebene des Punktes (r, r') enthalten sein müsse, andererseits auch in der Ebene m n, daß sie also keine andere als die Durchschnittslinie $(r' N', r n)$ beider Ebenen sein können.

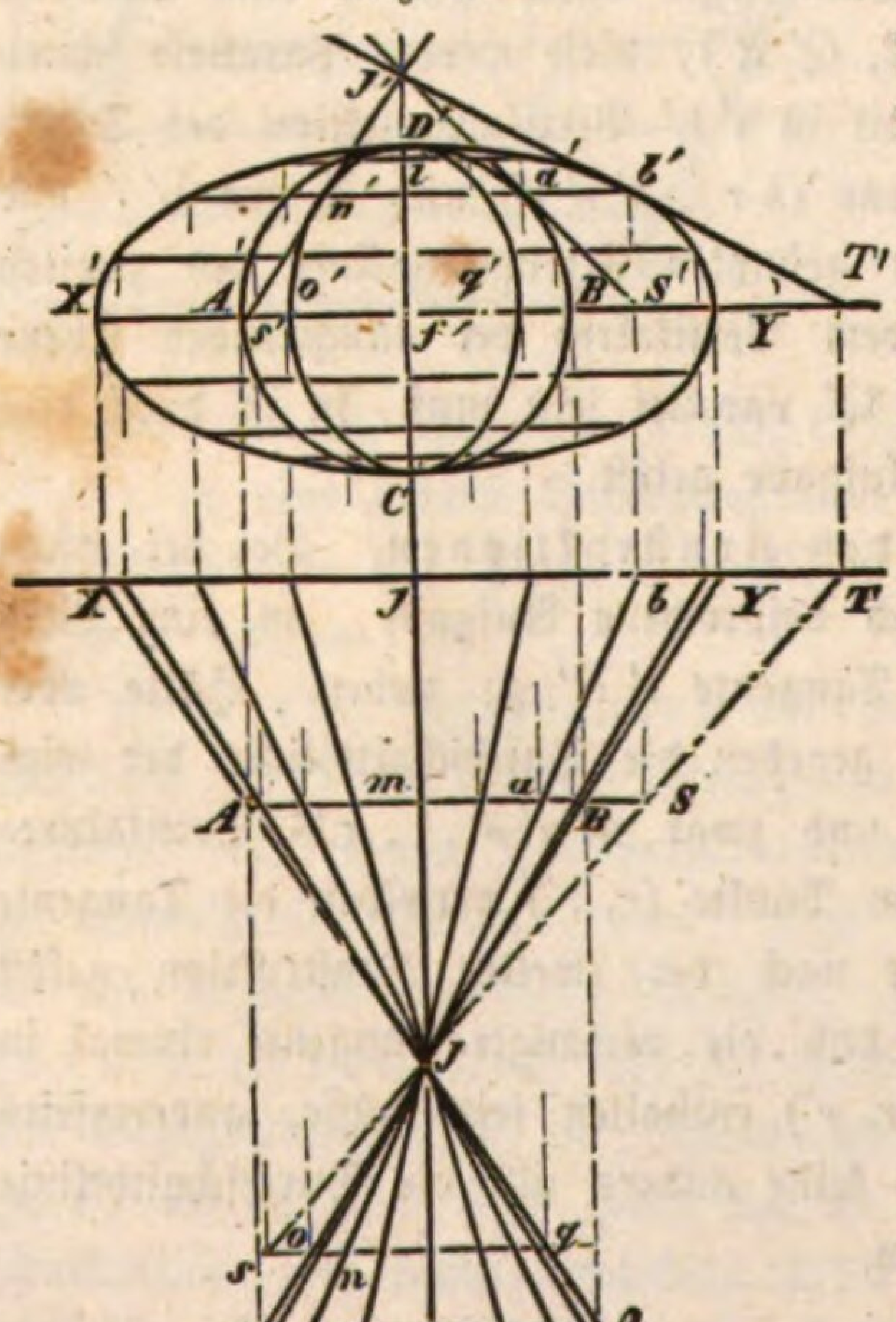
Weiteres Studium einzelner windischer Flächen mit einer Leitebene.

219. **Das windische Conoid** *Fig. 172.* Der vertikal stehende Kreis $(A' D' B' C', A B)$ und die vertikale Gerade J, C′ J′ sind die

Leitlinien dieser windischen Fläche, deren gerade Erzeugungslinien horizontal sein sollen.

Eine Horizontalebene, welche den Kreisumfang in irgend einem Punkte schneidet, trifft auch die vertikale Leitlinie in einem zweiten Punkte, und die Verbindungslinie beider Punkte ist eine Erzeugungslinie der Fläche. Somit werden die Vertikalprojektionen der Erzeugungslinien der Grundlinie X Y parallel erscheinen und die Horizontalprojektionen werden in J konkurriren. Die Fläche wird von den Horizontalebenen der Punkte D′, C′ in der ganzen Ausdehnung der entsprechenden Erzeugungslinien (*D′, Jj*), (*C′ Jj*) berührt, hat also hier zwei nicht windische Elemente. Im Uebrigen läßt sie sich vergleichen mit einer am Scheitel auseinander gezogenen Kegelfläche, so daß die Breite hier einem Durchmesser der Basis gleich geworden. Auch hat die Horizontalprojektion der Fläche ganz das Gepräge, als stamme sie von einer geraden Kegelfläche mit horizontaler Axe. Solchen Beziehungen entsprang der Name Conoid für die vorliegende windische Fläche.

Fig. 172.



Die Erzeugungslinie (*i′ a′, J a*) trifft die Vertikalebene in (*b, b′*), und aus solchen Punkten besteht der Schnitt D′ X′ Y′ b′ des Conoides mit der vertikalen Projektionsebene. Dieser Schnitt wird eine Ellipse sein. Denn aus der Horizontalprojektion folgt, daß die Abschnitte j Y und j b, sowie m B und m a, in gleichem Verhältnisse stehen, weil Y j J und B m J, b j J und a m J ähnliche Dreiecke sind. Da aber j Y und f′ Y′ gleich sind, ferner B′ f′ und B m, b j und b′ i′, a m und a′ i′, so stehen die Breiten i′ b′ und i′ a′ in dem gleichen Verhältnisse wie die halben Durchmesser f′ Y′ und f′ B′, worin ein Kennzeichen der Ellipse liegt.

Durch das Rückwärtsverlängern der Erzeugungslinien entsteht ein zweites Netz des Conoides. Nimmt man α β parallel zu X Y und in gleichem

Abstande von J wie A B, so wird der Schnitt des Conoides und der Ebene $\alpha\,\beta$ wiederum ein Kreis sein. Parallele Ebenen zu A B, $\alpha\,\beta$ und zwischen ihnen liegend wie o q schneiden das Conoid nach Ellipsen, welche die Breite o q zur kleinen Axe haben.

220. Tangirende Ebene des Conoides. (b, b') sei der Berührungspunkt, gegeben auf der Erzeugungslinie $(J\,a\,b,\ i'\,a'\,b')$. Nimmt man als bekannt an, daß der Schnitt D′ X′ C′ Y′ eine Ellipse sei, dann bleibt einfach in b′ die Ellipstangente T′ b′ J′ zu konstruiren und durch sie wie durch $(i'\,b',\ J\,b)$ eine Ebene zu legen.

Doch auch die Betrachtung des Hilfs-Paraboloides, welches das Conoid längs der Erzeugungslinie $(i'\,a'\,b',\ J\,a\,b)$ berührt, führt in sehr einfacher Art zum Ziele. Man ziehe in (a', a), wo die Erzeugungslinie und die cirkuläre Leitlinie sich kreuzen, die Kreistangente $(a'\,S',\ a\,S)$, nehme diese und die Vertikale $(J,\ C'\,D')$ als Leitlinien des Paraboloides, dem gleichfalls eine horizontale Leitebene zugehört. Nun werden die zwei Leitlinien durch die Horizontalebene X′ Y′ in (J, f') und (S, S') geschnitten und $(J\,S,\ f'\,S')$ ist eine zweite Erzeugungslinie des ersten Systemes. Weil ferner die Kreistangente in der Ebene A B liegt und die vertikale Leitlinie J dieser Ebene parallel ist, kann A B als Projektion der Leitebene des zweiten Systemes genommen werden, daraus folgt, daß die Erzeugungslinie des zweiten Systemes, welche dem Punkte (b, b') entspricht, in der vertikalen Projektionsebene liege, und daß sie durch den Punkt (T, T') gehen müsse, in welchem die Vertikalebene und die Gerade $(J\,S,\ f'\,S')$ sich schneiden. T′ b′ J′ ist somit die Projektion der zweiten Erzeugungslinie, somit auch Vertikalriß der tangirenden Ebene und erscheint in dritter Eigenschaft als Tangente des Schnittes X′ T′ Y′ C′. Aus den ganz gleichen Erwägungen leitet sich die Folgerung ab, daß, wenn S J verlängert wird bis zum Durchschnitt s mit o q und wenn s nach s′ projicirt wird, daß, sage ich, $(s\,n,\ s'\,n')$ die Tangente sei des Schnittes $(o\,p,\ o'\,D'\cdot q'\,C')$, an dem Punkte (n, n'), welcher der Erzeugungslinie $(b\,J,\ b'\,i'\,n')$ zugehört.

Die Vertikale C′ D′ und die Kreistangente S′ a′ kreuzen sich in J′ und die Horizontale $(J',\ J\,j)$ gehört als Linie des Paraboloides zu den Geraden der ersten Generation. Weil aber diese Gerade als der Punkt J′ sich projicirt, so müssen hier auch die Projektionen aller Erzeugungslinien des zweiten Systemes T′ b, s′ n′ … ꝛc. zusammen laufen. Dies stimmt wiederum überein mit der Eigenthümlichkeit des Kreises und solcher Ellipsen, welche mit ihm einen Durchmesser wie C′ D′ gemein haben, indem hier die Tan-

genten, deren Berührungspunkte b′, a′, n′, auf einer Geraden n′ b′ liegen, welche gegen C′ D′ senkrecht steht, in einem Punkte J des verlängerten Durchmessers zusammenlaufen müssen. *)

221. **Zweites Beispiel** Fig. *173*.

Die hier gegebene windische Fläche hat nachstehende Erzeugungsmomente. Eine gerade kreisrunde Cylinderfläche hat den Kreis g′ j′ h′ als Vertikalprojektion und die Horizontale (*a′*, *a a*) ist ihre Axe. Die Cylinderfläche wird durch die Vertikalebene G H geschnitten; der Schnitt ist eine Ellipse, deren große Axe gleich G H ist und die kleine Axe gleich dem Kreisdurchmesser j′ j′. Eine gerade Erzeugungslinie soll auf dem Ellipsumfange der Art fortgleiten, daß sie stets normal zur Cylinderfläche steht. Da nun alle Normalen einer geraden Cylinderfläche in ihrer Verlängerung die Axe der Fläche rechtwinklig durchschneiden, so lassen sich die Erzeugungsbedingnisse unserer Fläche nach also stellen: Die gerade Erzeugungslinie soll auf den zwei Leitlinien, der Ellipse (*G H*, *g′ j′ h′ j′*) und der Geraden (*a′*, *a a*), hingleiten und dabei parallel bleiben zur vertikalen Projektionsebene. In der Vertikalprojektion erscheinen darum alle Erzeugungslinien als verlängerte Radien a′ i′, a′ f′ .. 2c. des Kreises g′ j′ h′; die Horizontalprojektionen 1 f, 2 i ... 2c. stehen parallel zur Grundlinie oder senkrecht auf a a. Die Fläche ward begrenzt durch zwei von der Axe gleich weit entfernten Horizontalebenen m′ f′, μ′ φ′. Beide Grenzebenen schneiden die windische Fläche nach zwei krummen Linien, welche gebildet werden durch die Begegnungspunkte (*f*, *f′*), (*i*, *i′*), (*J*, *k′*), (*l*, *l′*), (*m*, *m′*) .. (μ′, *m*), (φ′, *f*) der Erzeugungslinien und der Ebene m′ f′, μ′ φ′. An den Punkten (*G*, *g′*), (*H*, *h′*) stehen die Normalen (*G X*, *g′ x′*), (*H Y*, *h′ y′*) wagrecht, vermögen also die Grenzflächen m′ f′, μ′ φ′ nur im Unendlichen zu erreichen, deshalb treten die Projektionen G X, H Y jener Normalen auf, als die Asymptoten der Kurve f i l m ....

Ergänzung. Indem man nun diejenigen Stücke der Erzeugungslinien oder Normalen in Betracht nimmt, welche außerhalb des Cylinders und innerhalb der Grenzflächen liegen, so stellen die zwei Kurven (*m′ f′*, *m J f*) und (μ′ φ′, *m J f*) auch die lineare Begrenzung der Fläche dar. Wäre aber

---

*) Betrachtet man von den Tangenten nur die begrenzten Stücke zwischen J′ und den Berührungspunkten, so kann i′ J′ als gemeinsame Projektion der drei Tangentenstücke gelten, und man nennt diese Projektion auch die Subtangente einer jeden Tangente. In dem vorliegenden Falle haben die Ellipsen mit dem Kreise die gleiche Subtangente.

im Allgemeinen die Rede von dem Durchschnitte der windischen Fläche mit einer Horizontalebene m′ f′, so müßten die unterhalb x′ y′ gelegenen Erzeugungslinien ebenfalls zur Konstruktion gezogen und nach oben verlängert werden, z. B. a′ 7′ a′ nach a′ 1′ f; dies gäbe einen Durchschnittspunkt (*f*′, φ) und im Ganzen eine zweite Durchschnittslinie (μ *J* φ, *m*′ *f*′), (*m J F*, μ′ φ′), welche symmetrisch zur ersten läge in Bezug auf die Vertikalebene a a k′.

Fig. 173.

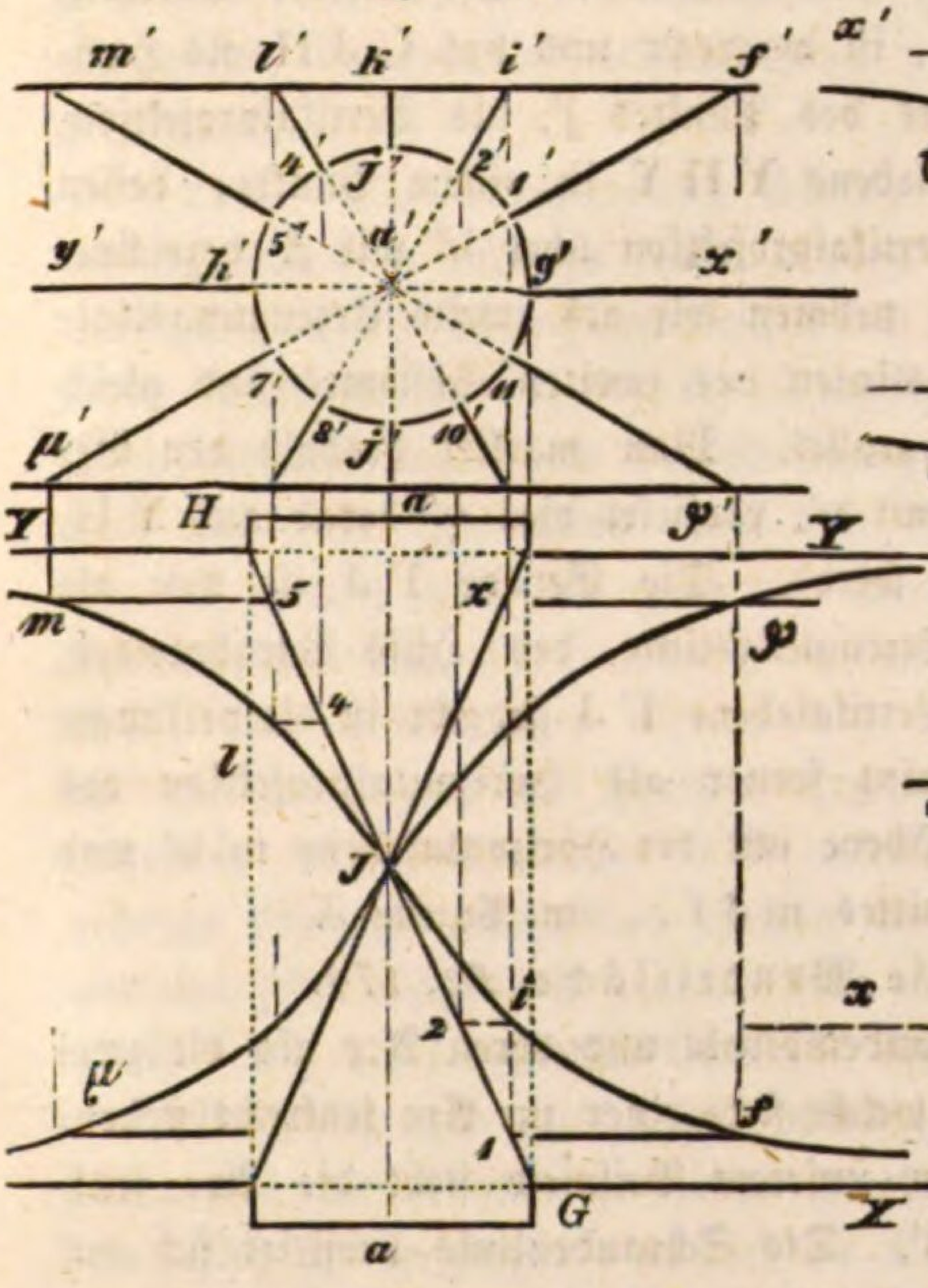
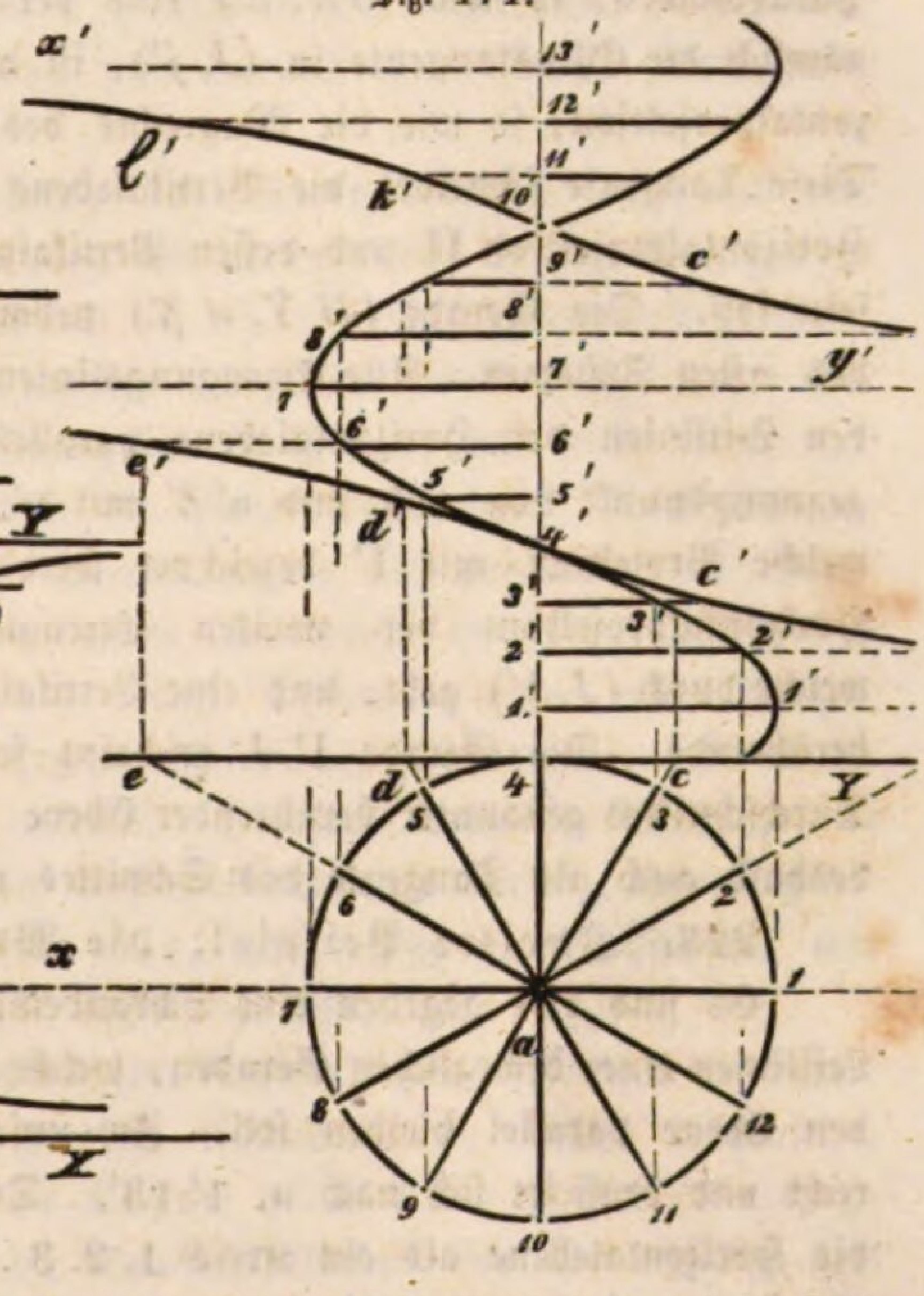


Fig. 174.



222. Tangirende Ebene der vorstehenden Fläche. (*a*′ *4*′ *l*′, *4 l*) sei eine Erzeugungslinie, auf welcher man den Berührungspunkt gegeben hat, und es handelt sich, das Hilfs-Paraboloid längs jener Geraden zu konstruiren. Als Leitebene verbleibt die Vertikalebene X Y und als Leitlinien dienen erstlich die Axe (*a a*, *a*′) und zweitens die Ellipstangente am Punkte (*4*, *4*′), wo diese von der gegebenen Erzeugungslinie geschnitten wird. Als Horizontalprojektion der Ellipstangente erscheint die Gerade 4 H und als Vertikalprojektion die Kreistangente des Punktes 4′. Damit ist Alles festgesetzt, um nach §. 193 die Erzeugungslinie des zweiten Systemes zu be-

stimmen, welche dem auf ($4\,l$, $a'\,4'\,l'$) gegebenen Berührungspunkte entspricht und welche im Verein mit dieser Geraden hier auch die tangirende Ebene festsetzt. — Es soll diese Konstruktion noch auf dem Punkte (J, k') angewendet werden, allwo eine Inflexion des Schnittes ($m'\,f'$, $m\,J\,f$) stattfindet, und wobei der Leser jene Linien und Punkte nachtragen möge, welche in unserer Figur weggeblieben. In (J, k') steht die Erzeugungslinie unserer Fläche senkrecht. Die Vertitalebene X Y ist fortwährend Leitebene des Hilfs-Paraboloides, so wie ($a\,a$, a') eine der Leitlinien. Die andere Leitlinie, nämlich die Ellipstangente in (J, j'), ist wagrecht und hat G J H als Horizontalprojektion, so wie die Wagrechte des Punktes j′, als Vertikalprojektion. Diese Tangente schneidet die Vertikalebene Y H Y in einem Punkte, dessen Horizontalprojektion H und dessen Vertikalprojektion über h′ mit β' bezeichnet sein soll. Die Gerade ($H\,Y$, $a'\,\beta'$) nehmen wir als zweite Erzeugungslinie des ersten Systemes. Alle Erzeugungslinien des zweiten Systemes sind gleich den Leitlinien der Horizontalebene parallel. Man markirt deshalb den Begegnungspunkt von m k und a′ β' mit γ', projicirt dies γ' herab auf Y H, welche Projektion mit Γ bezeichnet werde. Die Gerade Γ J ist nun die Horizontalprojektion der zweiten Erzeugungslinie des Hilfs-Paraboloides, welche durch (J, k') geht, und eine Vertikalebene Γ J gedacht ist die verlangte berührende. Die Gerade Γ J erscheint ferner als Horizontalprojektion des Durchschnittes genannter berührender Ebene mit der Horizontalebene m′ k′ und deshalb auch als Tangente des Schnittes m J f .. am Punkte J.

223. Zweites Beispiel: die Wendelfläche Fig. *174*.

Es sind hier gegeben eine Schraubenspirale und deren Axe als die zwei Leitlinien einer beweglichen Geraden, welche stets einer zur Axe senkrecht stehenden Ebene parallel bleiben soll. In unserem Beispiele steht die Axe senkrecht und projicirt sich nach a, 1′ 13′. Die Schraubenlinie projicirt sich auf die Horizontalebene als ein Kreis 1. 2. 3 .... und auf die Vertikalebene als die Kurve 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′ 7′ ...., deren Konstruktion wiederholt erklärt worden. Die Horizontalprojektionen der Erzeugungslinien treten auf als Radien a 1, a 2 ... des Grundkreises und die Vertikalprojektionen als die Parallelen zur Grundlinie 1′ 1′, 2′ 2′, 3′ 3′ .... — Bei einer gewöhnlichen Wendeltreppe liegen die oberen Staffelkanten in einer windischen Fläche, wie die hier gegebene. Die untere Fläche der Staffeln ist dabei häufig eine stetige Fläche derselben Art, diesen Verwandtschaften ward der Name Wendelfläche entnommen, damit eine besondere Gattung der windischen Helikoide (§. 247) zu bezeichnen. — Die Erzeugungslinien des ersten halben Um-

ganges durchschneiden die vertikale Projektionsebene in Punkten (c, c'), $(4, 4')$, (d, d'), (e, e') ..., welche dem Durchschnitt dieser Projektionsebene und der Wendelfläche angehören. In den Geraden $1'1'$, $7'7'$ wird man unschwer zwei Asymptoten der Kurve $c'4'd'e'$ ... erkennen. Denn diese Geraden sind die Projektionen der zwei Erzeugungslinien $(a\,1, 1'\,1')$, $(a\,7, 7'\,7')$, welche der Vertikalebene parallel liegen, und welche darum mit dieser Ebene nur in unendlicher Entfernung zusammentreffen können. Die Punkte von $c'4'd'e'$..., welche den Geraden $1'1'$ und $7'7'$ entsprechen, liegen also auf diesen Geraden im Unendlichen, und dadurch sind sie als Asymptoten gekennzeichnet.

224. Die tangirende Ebene der Wendelfläche. Sogleich von einem bestimmten Falle zu reden, wollen wir unterstellen, auf der Erzeugungslinie $(a\,8, 8'\,8')$ sei irgendwo ein Punkt (r, r') als Berührungspunkt gegeben. Man konstruire in $(8, 8')$ die Tangente der Schraubenlinie (§. 89), ihre Horizontalprojektion wird die Kreistangente in 8 sein, und diese werde mit 8 Z bezeichnet (der Leser möge sich die Linien entwerfen). Nun sind die Axe $(a, 1'\,15')$ und die genannte Spiraltangente die Leitlinien des Hilfs-Paraboloides und die Leitebene der ersten Generation ist horizontal. $(a\,8, 8'\,8')$ und eine andere Gerade des ersten Systemes, etwa a Z, werden als die Leitlinien des zweiten Erzeugungssystemes genommen, als deren Leitebene die Vertikalebene 8 Z auftritt. Hiernach kann die durch (r', r) gehende Erzeugungslinie des zweiten Systemes ermittelt werden, deren Horizontalprojektion mit 8 Z parallel sein wird, und welche in Verbindung mit $(a\,8, 8'\,8')$ die tangirende Ebene in (r, r') festsetzt.

Beschreibt man aus a mit beliebigem Radius einen Kreis und betrachtet diesen als die Grundlinie einer geraden Cylinderfläche, welche konzentrisch sein wird zu derjenigen, worauf die Spirale $(1.2.3 \ldots 1, 2'\,3')$ liegt, so wird bald erkannt werden, daß die Durchschnittslinie der Wendelfläche und jener Cylinderfläche wiederum eine Spirale sein müsse von gleicher Ganghöhe wie die erste. Es ließe sich somit die Spirale bestimmen, welche durch den Berührungspunkt (r, r') geht, (a r wäre der Halbmesser ihres Grundkreises) und in diesem Punkte eine Tangente an dieselbe. Mittelst der Tangente und der Geraden $(a\,8, 8'\,8')$ wäre die berührende Ebene unmittelbar festgesetzt. Man wird erkennen, daß der äußeren Form nach die gegenwärtige Aufgabe Aehnliches hat mit derjenigen, welche §. 218 bezüglich des windischen Canoides behandelt worden.

Zusatz. Die Erzeugung der windischen Wendelfläche ließe sich auch so

formuliren: Es ist auf einem geraden Cylinder eine Schraubenlinie gegeben; auf ihr soll eine gerade Erzeugungslinie sich so bewegen, daß sie immer normal steht zur Cylinderfläche.

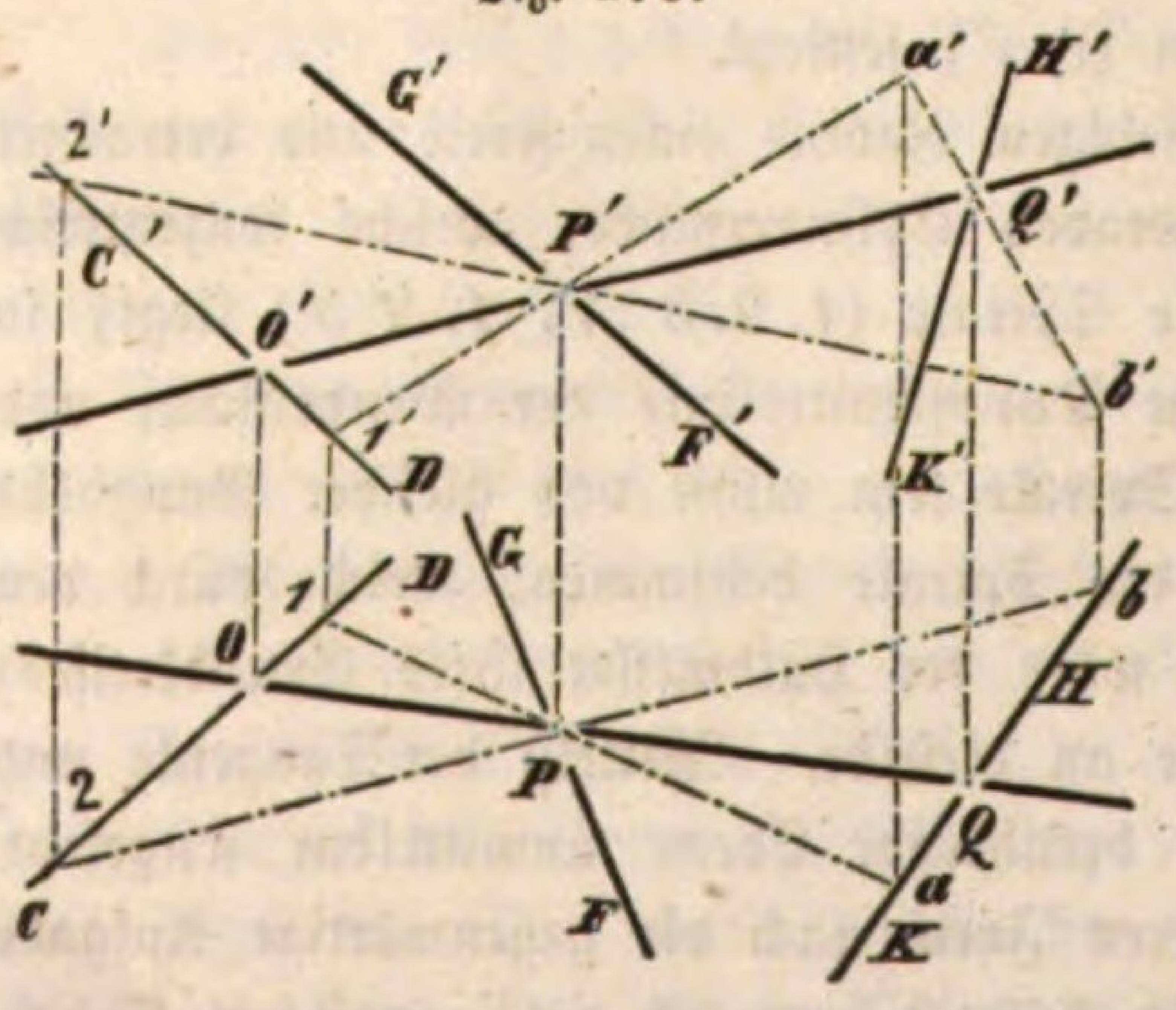
Windische Flächen mit drei Leitlinien.

225. Allgemeine Anschauungen darüber.

Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, demjenigen von drei geraden Leitlinien, welche paarweise nicht in einer Ebene liegen. Benennt seien die drei Geraden mit *A B C*. Auf *A* sei ein Punkt *P* gegeben, man verlangt die Erzeugungslinie dieses Punktes, also eine vierte Gerade *D*, welche durch *P* geht und *B* wie *C* schneidet. Legt man durch *P* und durch *B* eine Ebene, so muß *D* in dieser Ebene enthalten sein, die Gerade muß aber auch in der Ebene liegen, welche durch *P* und *C* gelegt wird, sie bildet somit den Durchschnitt der zwei Ebenen. Für die graphische Ausführung wird es zweckmäßig, die Konstruktion dahin zu modeln, daß, nachdem die Ebene durch *P* und *B* gelegt worden, man den Durchschnittspunkt *Q* dieser Ebene und der Geraden *C* bestimmt, und ihn mit *P* verbindet. Die Verbindungslinie muß die gesuchte *D* sein, weil sie auch die Gerade *B* kreuzt, mit der sie in einer Ebene liegt.

226. Beispiel Fig. *173*. (*CD, C′ D′*) die erste, (*F G, F′ G′*) die zweite und (*K H, K′ H′*) die dritte Leitlinie, (*P, P′*) ein Punkt der zweiten Leitlinie, dessen zugehörige gerade Erzeugungslinie (*O P Q, O′ P′ Q′*) zu konstruiren ist. Durch (*P, P′*) und durch zwei Punkte (*1, 1′*), (*2, 2′*) der ersten Leitlinie wird eine Ebene gelegt und deren Durchschnitt (*Q, Q′*) mit der dritten Leitlinie gesucht; dieser Durchschnittspunkt aber ergiebt sich, indem man (*a b, a′ b′*) als den Schnitt der Ebenen (*1 P 2, 1′ P′ 2′*) und K H bestimmt, einen Schnitt, dessen Vertikalprojektion *a′ b′* auf K′ H′ den Punkt Q′ abschneidet &c. (§. 40 Zusatz).

Fig. *175*.



Man beachte folgende zwei Punkte. Erstlich, daß es immer eine gerade Linie giebt, welche durch einen Punkt P geht und welche die zwei Geraden

($C\,D$, $C'\,D'$), ($K\,H$, $K'\,H'$) schneidet, weil zwischen der Ebene ($1\,P\,2$, $1'\,P'\,2'$) und der Geraden ($K\,H$, $K'\,H'$) ein Durchschnitt (Q, Q') stattfinden muß. In dem singulären Falle, daß diese Gerade und jene Ebenen unter sich parallel lägen, müßte man (Q, Q') als einen idealen, im Unendlichen liegenden Durchschnitt betrachten, und eine Parallele zu ($K\,H$, $K'\,H'$), welche durch (P, P') gelegt würde, entspräche alsdann den Bedingnissen der Aufgabe.

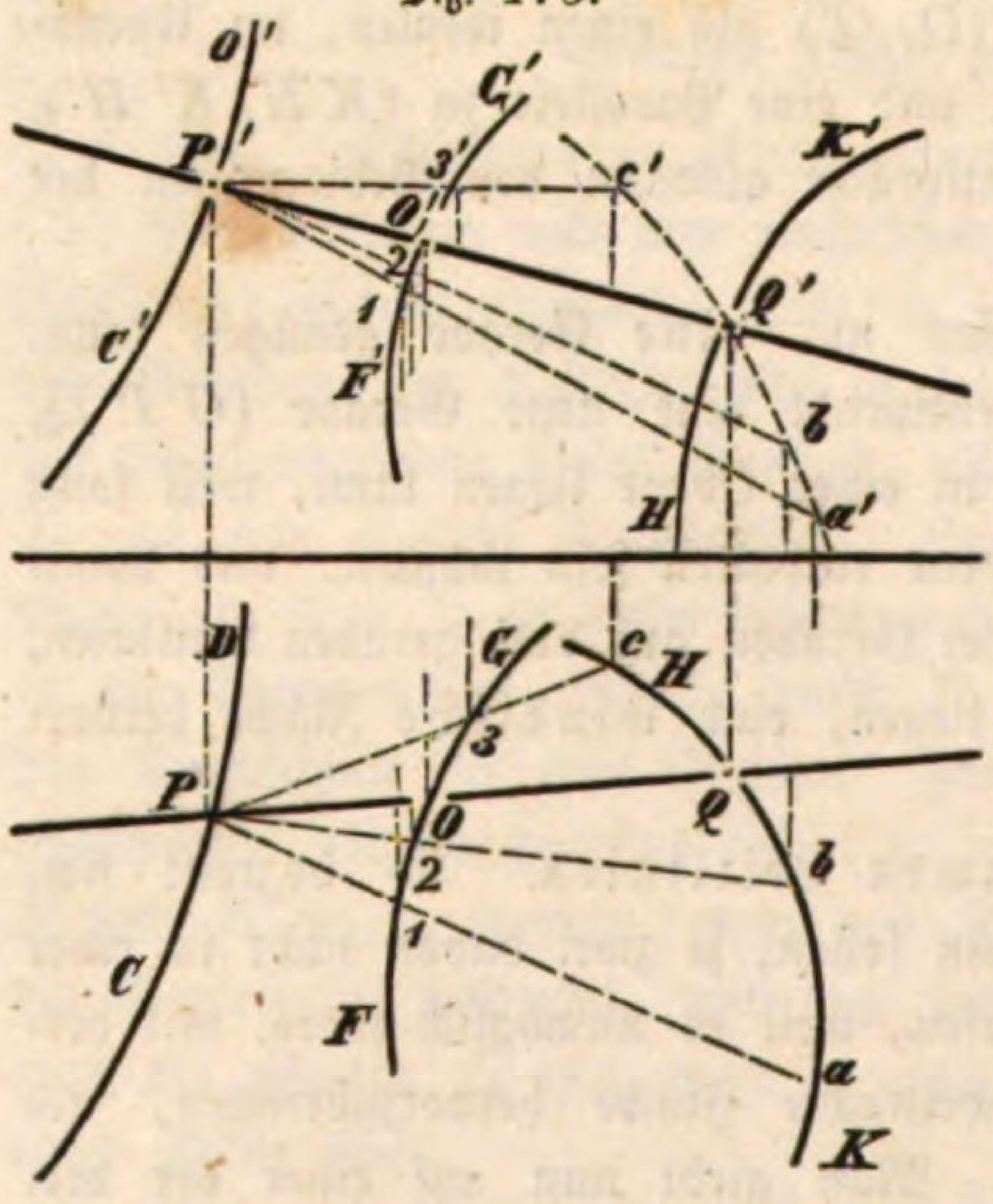
Zweitens, daß diesen Bedingnissen nur eine Gerade genügen kann. Einem veränderten Punkte (P, P') entspricht eine neue Gerade ($O\,P\,Q$, $O'\,P'\,Q'$), welche mit der ersten nicht in einer Ebene liegen kann, weil sonst die drei Leitlinien selbst in dieser Ebene enthalten sein müßten, und damit zeigt sich, daß durch die Bewegung einer Geraden auf drei geraden Leitlinien, welche paarweise nicht in einer Ebene liegen, eine windische Fläche hervorgebracht werde.

227. Fläche mit drei krummen Leitlinien. Es begreift sich, daß, wenn diese Linien eben Kurven sein sollen, je zwei davon nicht in einer und derselben Ebene enthalten sein dürfen, weil es unmöglich wäre, mit derartig liegenden Linien eine andere scheitrechte Fläche hervorzubringen, als wiederum die Ebene der zwei Linien. Man giebt nun auf einer der drei krummen Leitlinien einen Punkt und verlangt die Konstruktion der geraden Erzeugungslinie dieses Punktes.

Wiederum sollen die drei Kurven der Reihe nach mit $A\,B\,C$ bezeichnet sein und auf A sei der Punkt P gegeben. Man denkt sich aus P nach einem beliebigen Punkte von B eine gerade Linie gezogen, und man läßt diese Gerade, indem sie fortwährend durch den Punkt P geht, auf der Kurve B hingleiten, bis sie einmal die Kurve C in einem Punkte Q trifft; in dieser Stellung wird sie alle drei Leitlinien durchschneiden A, B, C. Bei ihrer Bewegung auf der Kurve B hat die Gerade eine Kegelfläche beschrieben, deren Scheitel in P, und es wäre möglich, daß die fortgesetzte Kegelfläche und die Kurve C sich noch in einem anderen Punkte Q'' durchschnitten und selbst in noch mehreren Punkten; $P\,Q$, $P\,Q''$, $P\,R'''$ rc. wären die Erzeugungslinien der Fläche, welche durch P gehen. Auf der anderen Seite wäre es auch möglich, daß die Gerade $P\,Q$, indem sie die ganze Kegelfläche durchläuft, wovon B die Leitlinie doch die Kurve C nicht erreiche. Dies würde beweisen, daß es entweder gar nicht möglich ist, mit den drei gegebenen Leitlinien eine scheitrechte Fläche hervorzubringen, oder wenigstens, daß diese Fläche auf der ersten Leitlinie nicht bis zum Punkte P sich ausdehne.

Es hätte P auch als Scheitel einer Kegelfläche genommen werden können, von welcher C die Leitlinie und die Geraden $P\,Q, P\,Q'', P\,Q'''$ erschienen, dann als die gemeinsamen Durchschnitte der zwei Kegelflächen, welche in P ihren gemeinsamen Scheitel haben. Die Kegelflächen könnten auch außer P keinen Punkt mehr gemein haben, und alsdann gäbe es keine Erzeugungslinie der fraglichen krummen Fläche, welche durch P ginge.

Fig. 176.



228. Beispiel der graphischen Ausführung Fig. 176. (CD, $C'D'$), $FG, F'G'$) und ($HK, H'K'$) seien die drei krummen Leitlinien, (P, P') ein Punkt auf der ersten, dessen zugehörige gerade Erzeugungslinie ($P\,O\,Q, P'\,O'\,Q'$) zu bestimmen ist. Auf der zweiten Leitlinie nahm man mehrere Punkte ($1, 1'$), ($2, 2'$), ($3, 3'$) .. ꝛc. und verband jeden mit (P, P'), wodurch eine Reihe von Geraden ($P\,1, P'\,1'$), ($P\,2, P'\,2'$), ($P\,3, P'\,3'$) erschien, welche einer Kegelfläche angehören, deren Scheitel in (P, P') und deren Leitlinie die Kurve ($F\,G, F'\,G'$). Die Geraden der Kegelflächen treffen die projicirende Fläche HK in Punkten (a, a'), (b, b'), (c, c') ... ꝛc., welche den Durchschnitt ($a\,b\,c\,..., a'\,b'\,c'\,...$) der Kegel- und der projicirenden Fläche bilden. Diese Durchschnittslinie und die Kurve ($H\,K, H'\,K'$), weil beide in der projicirenden Fläche HK enthalten, kreuzen sich in (Q', Q), dem Durchschnittspunkte der Hilfskegelfläche und der dritten Leitlinie, also dem zweiten Punkte der geforderten Erzeugungslinie.

229. Drei gemischte Leitlinien. Befinden sich unter den drei Leitlinien zwei krumme und eine gerade, so kann man zur Konstruktion der geraden Erzeugungslinien die ersten Punkte auf der einen Kurve nehmen, durch jeden solchen Punkt und durch die gerade Leitlinie eine Hilfsebene legen, deren Schnitte mit der anderen krummen Leitlinie bestimmen (§. 208) und damit die zweiten Punkte der Erzeugungslinien festsetzen.

Wären endlich zwei gerade und eine krumme Leitlinie vorhanden, dann wählte man die ersten Punkte auf der letzteren Linie und bestimmte die Ge-

raden, welche durch je einen dieser Punkte gehen, während sie zugleich die zwei geraden Leitlinien schneiden (§. 224).

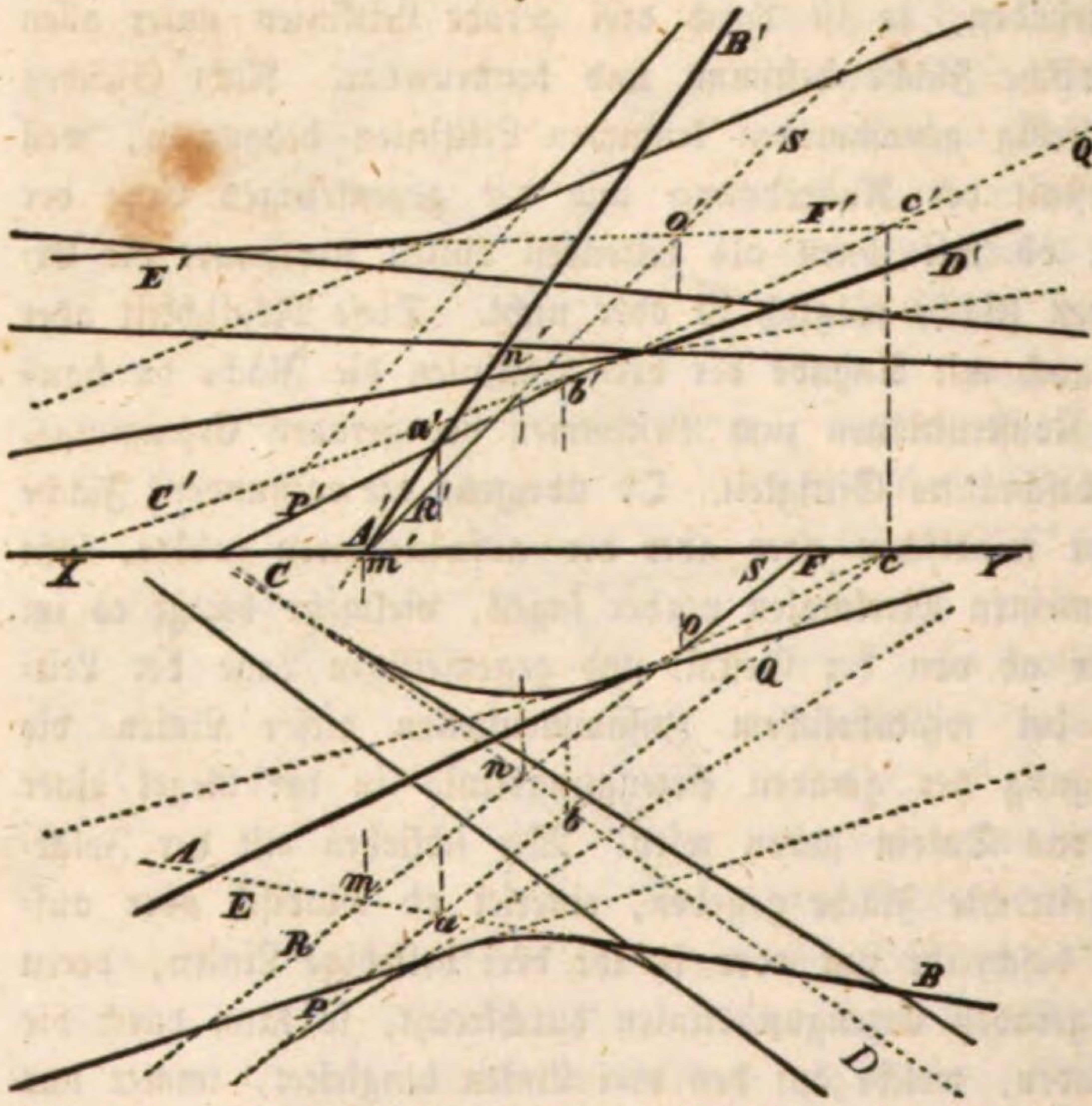
228. Einiges Allgemeine. Wie wir am Schlusse des eben angezogenen §. hervorgehoben, so ist durch drei gerade Leitlinien unter allen Umständen eine windische Fläche bestimmt und konstruirbar. Nicht Gleiches läßt sich von drei beliebig genommenen krummen Leitlinien behaupten, weil es hier von der Gestalt der Ausdehnung und der gegenseitigen Lage der drei Linien abhängt, ob mit ihnen als leitenden Linien überhaupt die Erzeugung einer krummen Fläche möglich ist oder nicht. Diese Möglichkeit aber vorausgesetzt, so ist auch mit Angabe der drei Leitlinien die Fläche durchaus festgesetzt und unsere Konstruktionen zum Bestimmen der geraden Erzeugungslinien haben eine unbeschränkte Giltigkeit. Ob übrigens die entstandene Fläche in das Geschlecht der windischen oder aber der aufwickelbaren gehöre, läßt sich schwer nach allgemeinen Merkmalen vorher sagen, vielmehr hängt es im einzelnen Falle wieder ab von der Gestalt und gegenseitigen Lage der Leitlinien, wenn gleich bei willkührlichem Zusammenstellen dieser Linien die somit bedingte Bewegung der geraden Erzeugungslinie in der Regel einer windischen Fläche das Dasein geben wird. Wir schließen mit der Folgerung: es ist eine scheitrechte Fläche gegeben, einerlei ob windisch oder aufwickelbar, und man beschreibt auf oder in ihr drei beliebige Linien, deren jede die sämmtlichen geraden Erzeugungslinien durchkreuzt, so kann durch die Bewegung einer Geraden, welche auf den drei Linien hingleitet, immer nur wieder die Fläche selbst erzeugt werden, weil diese neue Erzeugungslinie in jeder ihrer Stellungen nothwendig mit einer von den ursprünglichen Geraden der Fläche zusammenfallen muß.

Einzelne Arten der Flächen mit drei Leitlinien.

229. Das Hyperboloid von einem Netze. Es entstehe durch die Bewegung einer geraden Erzeugungslinie auf drei geraden Leitlinien, welche paarweise nicht in einer Ebene liegen. Vergl. §§. 225 und 226. Die Fig. *177* stellt eine solche Fläche in ihren allgemeinen Beziehungen dar. (AB, $A'B'$), (CD, $C'D$), (EF, $E'F'$) sind die drei Leitlinien. — Daß keine zwei von ihnen unter sich parallel sind, zeigt der Anblick, und daß keine die andere durchschneide, erhellt aus den Vergleichen der Kreuzungspunkte ihrer Horizontal- mit denen ihrer Vertikalprojektionen. Dies sind die einzigen Bedingungen, welche die Projektionen der Leitlinien zu erfüllen haben, während in allem Uebrigen deren gegenseitige Lage ganz beliebig bleibt.

$(P\,Q,\ P'\,Q')$ ist eine gerade Erzeugungslinie, welche die erste Leitlinie in (a, a'), die zweite in (b, b') und die dritte in (c, c') schneidet; $(R\,S,\ R'\,S')$, eine zweite Erzeugungslinie, schneidet die drei Leitlinien in (m, m'), (n, n'), (o, o'). Diese sowie noch weitere Erzeugungslinien sind nach Anleitung von §§. 130 oder 226 konstruirt worden. Ihre Anzahl reicht hin, die scheinbaren Umrisse der Fläche hervortreten zu lassen, welche hier in beiden Projektionen die hyperbolische Form erhalten haben. Bei anderer Stellung der Leitlinien gegen die Projektionsebenen hätte auch ein oder der andere Umriß elliptisch werden können. Dies würde in unserer Figur der Fall sein, würde man deren Projektion auf einer neuen Ebene, welche auf **X Y** senkrecht steht, entwerfen. Wir wollen übrigens sogleich hinzusetzen, daß bei ganz willkührlicher Annahme der Leitlinien der Zeichnung oft eine sehr große Dimension gegeben werden mußte, damit auch nur einer der Umrisse sich darstelle. — Halten wir das, wenn auch hier nur empirisch gewonnene Ergebniß fest: die windische Fläche mit drei geraden Leitlinien hat hyperbolische oder elliptische Umrisse und bildet ein zusammenhängendes Netz. So viel zur Begründung des Namens.

Fig. 177.



232. Verwandtschaft der windischen Flächen mit geraden Leitlinien. Daß eine solche besteht, liegt der Vermuthung ziemlich nahe, läßt sich auch unschwer nachweisen.

I. Die Fläche mit drei geraden Leitlinien und das windische Umdrehungs-Hyperboloid. Man nehme zwei gerade Linien, welche

nicht in einer Ebene liegen, lasse die eine um die andere als Axe rotiren und halte sie fest in drei von den Stellungen, welche sie vermöge ihrer Drehung einnehmen kann. Die also fixirten drei Geraden seien die Leitlinien, dann wird durch eine auf ihnen gleitende gerade Erzeugungslinie ein windisches Umdrehungs-Hyperboloid hervorgebracht werden, von welchem die drei Leitlinien als Gerade des zweiten Erzeugungssystemes auftreten.

II. Die Fläche mit drei geraden Leitlinien und das windische Paraboloid. Letzteres hat zwei gerade Leitlinien und mit einer beliebigen Ebene müssen die geraden Erzeugungslinien der Fläche parallel bleiben. Ich sage nun: werden als Leitlinien der erstgenannten Fläche drei Gerade erwählt, welche mit einer und derselben Ebene parallel liegen, dann entsteht durch die Bewegung einer geraden Erzeugungslinie auf jenen drei Leitlinien ein windisches Paraboloid. Zur Begründung dieses wolle der Leser nochmals die Fig. *161* zur Hand nehmen. Er betrachte dort die drei Geraden A D, M N und B C als die Leitlinien einer windischen Fläche. Nach den Darlegungen von §. 191 liegen sie zu zwei und zwei nicht in einer Ebene, aber die erste liegt in der Ebene D a A und die beiden anderen sind dieser Ebene parallel. Nun sind A B, P Q, D C drei Gerade, welche eine jede der drei Leitlinien durchschneiden, also drei Erzeugungslinien. Aber in jenem §. ist bewiesen worden, daß, wenn B a parallel mit C D gezogen und durch A B a eine Ebene gedacht wird, P Q und C D dieser Ebene parallel liegen. Nun aber giebt es keine andere Gerade, welche durch einen der drei Punkte P, O, Q ginge, und welche auch die beiden anderen Leitlinien durchschnitte, als eben die Gerade P O Q. Sonach müssen alle geraden Erzeugungslinien, welche sich auf die drei Leitlinien stützen, der Ebene B a A parallel liegen. Weil aber unserer Figur außer den allgemeinen Erzeugungs-Bedingnissen kein weiterer Vorbehalt zu Grunde liegt, so darf unserer Erörterung zufolge im allgemeinen Sinne behauptet werden, daß, wenn die drei geraden Leitlinien einer und derselben Ebene parallel liegen, die Erzeugungslinien sämmtlich einer zweiten Ebene parallel werden, und daß dann die erzeugte Fläche ein windisches Paraboloid sei.

233. Doppelte Erzeugung des Hyperboloides von einem Netze durch die gerade Linie.

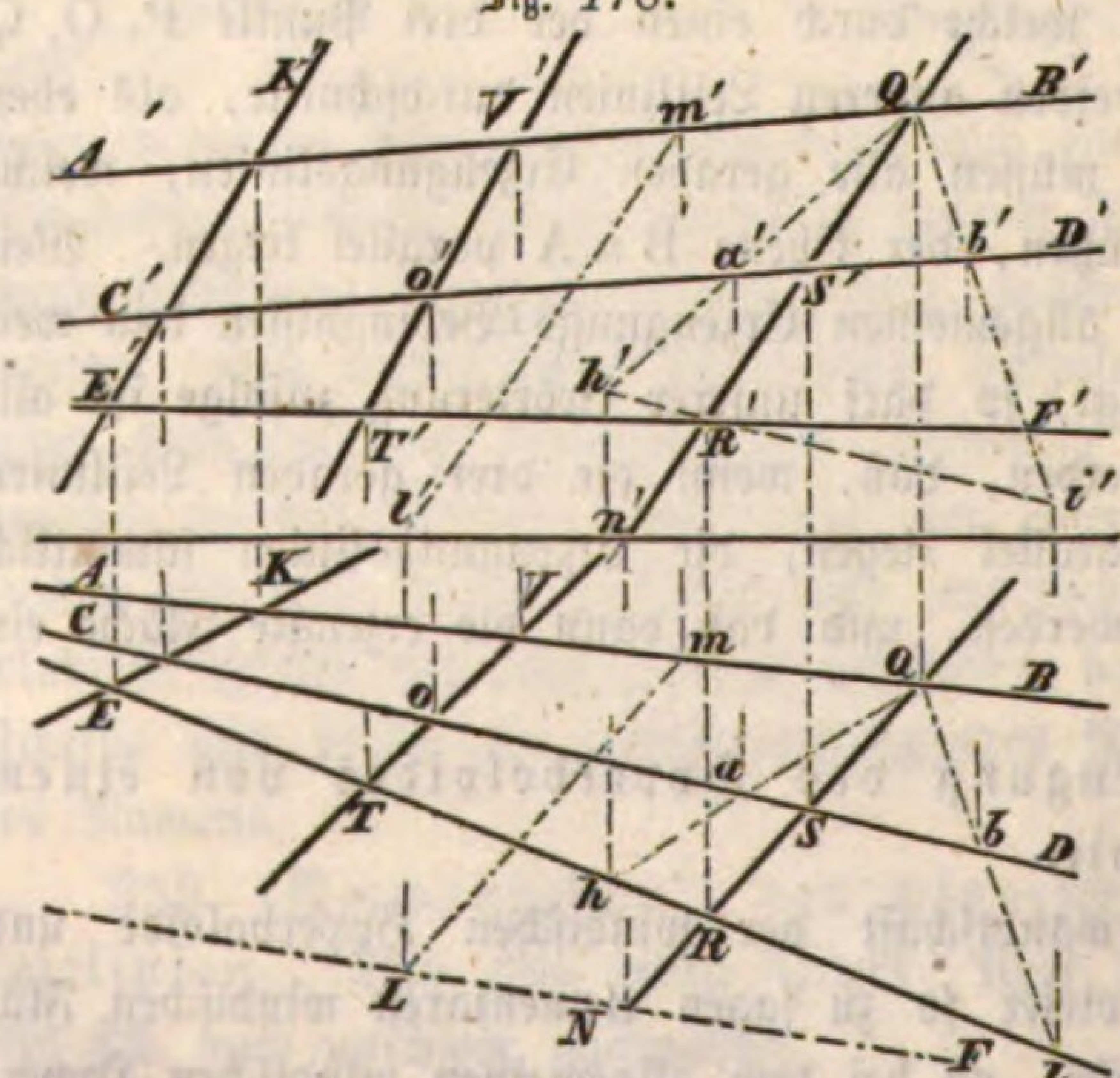
Nachdem die Stammverwandtschaft der windischen Hyperboloide und Paraboloide erkannt worden, dieser so zu sagen elementaren windischen Flächen, stellt sich die Frage nahe, ob bei dem allgemeinen windischen Hyperboloide die drei Leitlinien die einzigen Geraden seien, welche außer den Er-

zeugungslinien sich noch auf der Fläche ziehen lassen. Die Antwort lautet Nein. Vielmehr findet bei dieser Fläche wie bei dem windischen Umdrehungs-Hyperboloide die Eigenthümlichkeit statt, daß in jedem Punkte der Fläche sich zwei gerade Linien kreuzen, welche ganz der Fläche angehören. Diese Geraden in ihrer Gesammtheit bilden zwei Systeme von Erzeugungslinien solcher Beschaffenheit, daß je drei beliebige Gerade des einen Systemes als die Leitlinien des andern Systemes genommen werden können.

Es könnte genügen, des Satzes von der doppelten Erzeugung des windischen Hyperboloides durch die gerade Linie nur historisch zu erwähnen und das Weitere rein als thatsächliches Ergebniß zu behandeln. Jedoch um hier keine vielleicht unliebsame Lücke in der Theorie der windischen Flächen zu lassen, soll nachfolgend ein strenger Beweis des genannten Satzes gegeben werden, wiederum nach der Methode geometrischer Berechnung, dem wir aber einen Hilfs- oder Lehrsatz aus der ebenen Geometrie voraussenden.

234. Erläuterung *Fig. 178.* $(AB,\ A'B')$, $(CD,\ C'D')$ und $(EF,\ E'F')$ sollen drei gerade Erzeugungslinien eines Hyperboloides sein. Als solche können drei beliebige Gerade genommen werden, wenn sie nur nicht zu zwei und zwei in gleicher Ebene enthalten sind. Man verlangt die Erzeugungslinie $(QR,\ Q'R')$ des zweiten Systemes, welche dem Punkte $(Q,\ Q')$ der Geraden $(AB,\ A'B')$ entspricht.

Fig. 178.

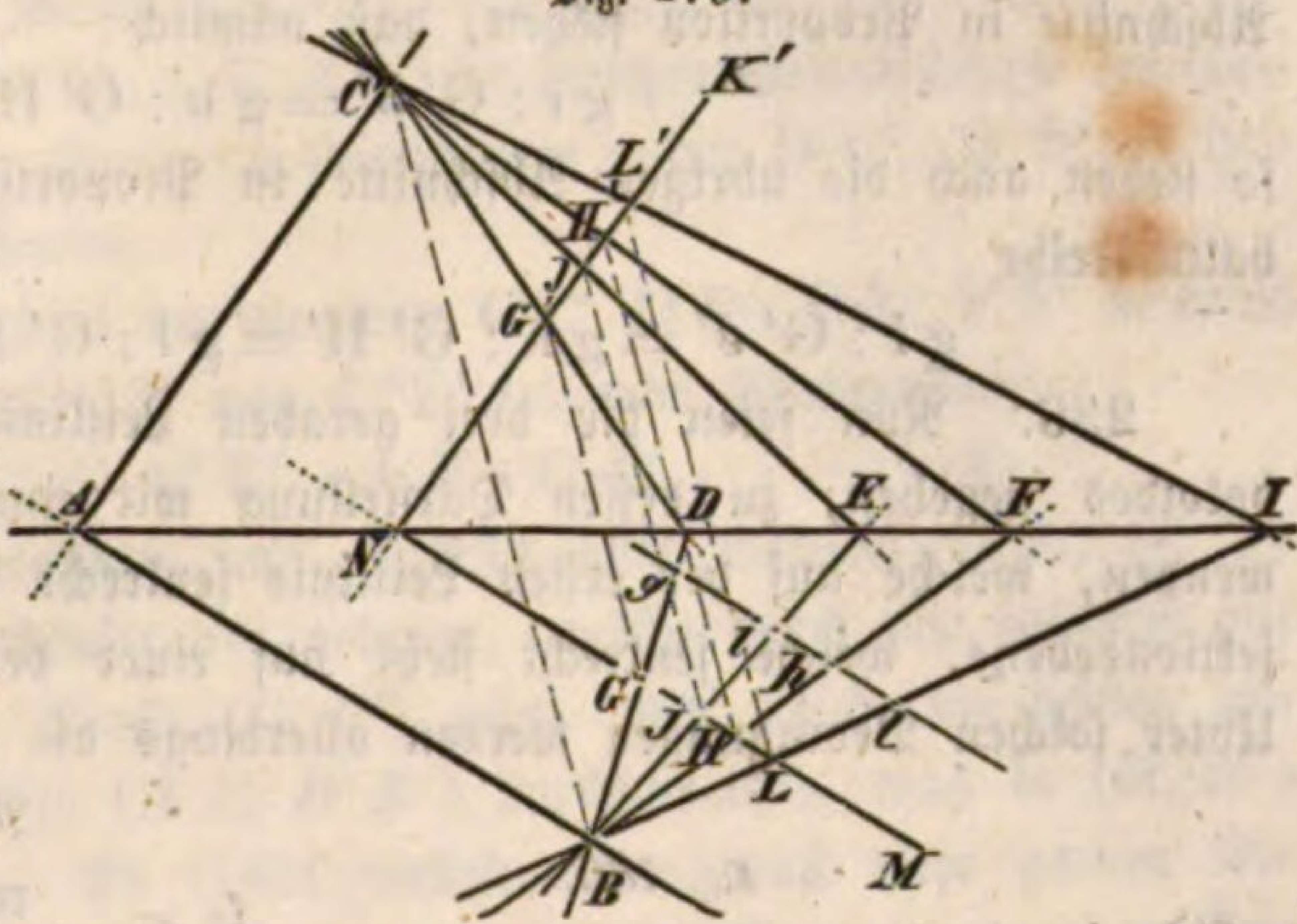


Konstruktion. Durch $(Q,\ Q')$ und durch zwei Punkte $(a,\ a')$ und $(b,\ b')$ auf der zweiten Geraden $(CD,\ C'D')$ lege ich eine Hilfsebene, welcher die Geraden $(Qa,\ Q'a')$ und $(Qb,\ Q'b')$ angehören.

Ich konstruire den Durchschnittspunkt $(R',\ R)$ der Hilfsebene und der dritten Geraden $(EF,\ E'F')$, wodurch der zweite Punkt der verlangten Linie bestimmt ist. [$(h,\ h')$, $(i,\ i')$ Durchschnitte der Geraden $(Qa,\ Q'a')$, $(Qb,\ Q'b')$ und der projicirenden Ebene E F, daher h′ R′ i′ Vertikalprojektion des Durchschnittes der zwei

Ebenen ꝛc. ꝛc.] Wären drei solcher Linien des zweiten Erzeugungssystemes gegeben gewesen, z. B. (*Q R*, *Q′ R′*), (*V T*, *V′ T′*), (*K E*, *K′ E′*), und man hätte die Erzeugungslinie des ersten Systemes verlangt, welche etwa durch den Punkt (*S*, *S′*) der ersten gehen sollte, dann würde man durch (*S*, *S′*) und durch zwei auf (*K E*, *K′ E′*) genommene Punkte eine Hilfsebene gelegt, deren Durchschnitt (*o*, *o′*) mit (*V T*, *V′ T′*) bestimmt, und so die Gerade (*S o C*, (*S′ o′ C′*) erhalten haben. In solcher Weise konstruiren sich die Erzeugungslinien beider Systeme, sobald nur drei von dem Einen gegeben sind.

Fig. 179.



235. In Fig. 179 seien jetzt, nach schräger Projektion dargestellt, B A, A C′ die Risse einer ersten Ebene, B D, D C′ die Risse einer zweiten Ebene und B C′ demzufolge ihre gegenseitige Durchschnittslinie. Durch die Punkte B, C hat man noch eine Reihe anderer Ebenen gelegt, welche die Grundlinie in E, F, I . . . treffen und welche sämmtlich die Gerade C′ B als gemeinsamen Durchschnitt mit der ersten Ebene haben. Die genannte Reihe sei durch eine mit B A C′ parallele Ebene M N K′ geschnitten, alsdann sind G G′, J J′, H H′, L L′ deren gegenseitige Durchschnitte, welche sämmtlich mit B C′ parallel sein müssen, weil parallele Ebenen durch jede dritte Ebene nach parallelen Linien geschnitten werden.

Durch solchen Vorgang sind in der Ebene M N K′ eine Reihe ähnlicher Dreiecke L L′ N, H H′ N, J J′ N . . . ꝛc. gebildet worden, aus welchen folgende Proportionen hervorgehen:

$$G J : G' J' = G H : G' H' = G L : G' L' \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Sofort werde die Fig. 179 als reine Projektion, d. h. als ebene Figur betrachtet und g l parallel mit N M gezogen, dann hat man aus gleichem Grunde wie vorhin

$$G J : g i = G H : g h = G L : g l \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

Aus einer Vergleichung der beiden Verhältnißreihen *(1)* und *(2)* folgt

$$g i : G' J' = g h : G' H' = g l : G' L' \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Durch Umkehr der ganzen Beweisführung ergiebt sich folgendes Lemma. Werden von den beliebig auf einer Geraden A I genommenen Punkten D, E' F, I ... nach zwei Punkten D, C' außerhalb der Geraden die Linienbündel C' D, C' E, C' F, C' I und B D, B E, B F, B I gezogen, dann beide Bündel durch Transversalen g l, G' L' der Art geschnitten, daß die ersten Abschnitte in Proportion stehen, daß nämlich

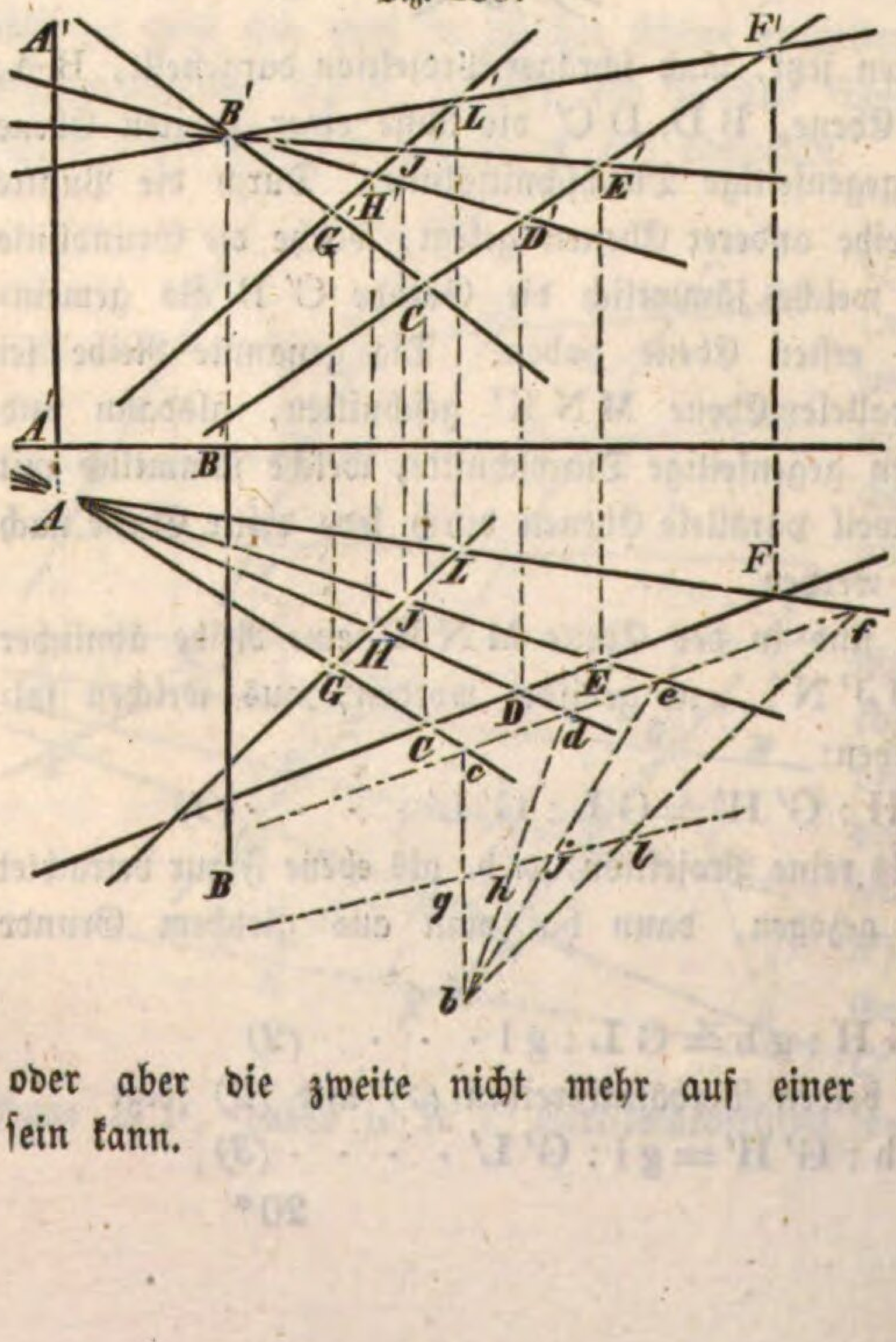
$$g\,i : G'\,J' = g\,h : G'\,H',$$

so stehen auch die übrigen Abschnitte in Proportion und man hat die Verhältnißreihe

$$g\,i : G'\,J' = g\,h : G'\,H' = g\,l : G'\,L' \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ rc.}$$

236. Nun seien die drei geraden Leitlinien eines windischen Hyperboloides gegeben, zu dessen Darstellung wir eine erste Projektionsebene verwenden, welche auf der ersten Leitlinie senkrecht steht, und eine zweite Projektionsebene, welche senkrecht steht auf einer der beiden andern Leitlinien. Unter solchen Bedingungen werden allerdings die beiden Projektionsebenen im Allgemeinen nicht mehr senkrecht unter sich stehen können, aber nichts verhindert es, fortwährend die gerade oder rechtwinklige Projektionsart beizubehalten, so daß, nachdem die Bildflächen umgelegt worden, die Projektionen eines Punktes im Raume noch auf einer geraden Linie liegen müssen, welche senkrecht gegen die Grundlinie steht.

Fig. 180.



In solcher Weise behandelt wolle man die Fig. 180 auffassen, bei deren Erklärung wir jedoch die Benennungen horizontale und vertikale Projektion beibehalten, obwohl in Wirklichkeit die erste nicht mehr auf einer Horizontalen, oder aber die zweite nicht mehr auf einer vertikalen Fläche verzeichnet sein kann.

Die Horizontalebene steht also senkrecht auf der ersten Leitlinie, deren Projektionen der Punkt A und die Senkrechte A′ A′ sind. Die sogenannte Vertikalebene stehe senkrecht auf der zweiten Leitlinie, deren Projektionen der Punkt B′ und die Senkrechte B B sind. Die dritte Leitlinie hat als Projektionen die irgend wie liegenden Geraden C F, C′ F′. Hat man nun auf letzterer Geraden beliebig die Punkte (C, C'), (D, D'), (E, E'), (F, F') genommen, so werden A C, A D, A E, A F die Horizontalprojektionen der vier durch jene Punkte gehenden Erzeugungslinien sein, und B′ C′, B′ D′, B′ E′, B′ F′ deren Vertikalprojektionen.

Wegen des Parallelismus der Geraden C C′, D D′, E E′, F F′ bestehen zwischen den Abschnitten auf C F und C′ F′ folgende Proportionen:

$$CD : C'D' = CE : C'E' = CF : C'F' \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1).$$

Sofort hat man nach Anleitung von §. 234 eine Gerade $(G L, G' L')$ zu konstruiren oder als konstruirt anzunehmen, welche durch den beliebig auf $(A C, B' C')$ genommenen Punkt (G, G') geht, und welche die beiden andern Geraden $(A D, B' D')$, $(A E, B' E')$ durchschneidet, was in (H, H') und (J, J') geschehen soll. Es bleibt nachzuweisen, daß diese gerade Erzeugungslinie des zweiten Systemes eine jede vierte Gerade des ersten Systemes, wie z. B. $(A F, B' F')$ gleichfalls durchschneidet, und der Beweis wird geführt sein, wenn man erprobt hat, daß L′ senkrecht über L liegen müsse.

Vorerst aber und aus gleichen Gründen wie soeben geben die Abschnitte G H J, G′ H′ J′ die Proportion

$$GH : G'H' = GJ : G'J' \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

Es werde jetzt c f der Art parallel mit C F gezogen, daß $cf = C'F'$ wird *), alsdann wird man erhalten

$$CD : cd = CE : ce = CF : cf.$$

Vergleicht man dies Ergebniß mit den Ausdrücken (1) und (2) und beachtet dabei die Gleichheit von c f und C F, so wird zu schließen sein, daß

$$C'D' = cd \text{ und } C'E' = ce.$$

Ueber c f verzeichne man sofort das Dreieck c b f gleich dem Dreiecke C′ B′ F′ und trage auch die Gerade G′ L′ auf dasselbe über nach g l, wodurch die Abschnitte g h j l den Abschnitten G′ H′ J′ L′ gleich werden. Alsdann folgt aus der Proportion (2)

$$GH : gh = GJ : gj.$$

Nun aber ist das vorhergehende Lemma anwendbar auf die beiden Transversalen G L und g l und es ergiebt sich nach jenem Satze, daß

$$GH : gh = GJ : gj = GL : gl$$

oder auch daß

$$GH : G'H' = GJ : G'J' = GL : G'L'.$$

Aber diese letzten Proportionen können nur statt haben bei einem Parallelismus von LL', GG', $HH' \ldots$ ꝛc., woraus endlich hervorgeht, daß L und L einer Senkrechten zur Grundlinie angehören, w. z. b. w.

237. Folgerungen. In jedem Punkte des Hyperboloides von einem Netze kreuzen sich zwei gerade Linien der Fläche, wovon eine dem ersten, die andere dem zweiten Erzeugungssysteme angehört.

Keine Erzeugungslinie eines Systemes durchschneidet irgend eine andere Gerade desselben Systemes, aber eine jede Gerade des einen Systemes wird von allen Geraden des zweiten Systemes geschnitten.

Einer jeden Geraden des einen Systemes entspricht eine Gerade des anderen Systemes, welche der ersten parallel liegt und sie im Unendlichen durchschneidet. In der That, soll eine Gerade des Hyperboloides G' heißen und man verlangt die Gerade H des zweiten Systemes, welche mit G' parallel liegt, so hat man noch zwei andere Gerade G'', G''' des ersten Systemes zu wählen und dann eine Gerade H zu bestimmen, welche die G'' und G''' durchschneidet und mit G' parallel ist, eine Aufgabe, welche bereits behandelt worden §. 40.

238. Die tangirenden Ebenen des Hyperboloides. In jedem Punkte der Fläche kreuzt sich eine Gerade des ersten Erzeugungssystemes mit einer Geraden des zweiten Systemes und diese zwei Geraden bestimmen auch die tangirende Ebene des Hyperboloides an dem Kreuzungspunkte.

Beispiel Fig. *178*. In dem Punkte (Q, Q') kreuzen sich zwei Erzeugungslinien $(AB, A'B')$, $(RS, R'S')$ des Hyperboloides und beide Gerade zusammen bestimmen die berührende Ebene des Punktes (Q, Q'). Die Gerade $(QR, Q'R')$ schneidet die Horizontalebene in (n', N); eine Parallele $(mL, m'l')$ zur vorigen Geraden und durch einen Punkt (m, m') der Geraden $(AB, A'B')$ gehend, liegt gleichfalls in der tangirenden Ebene und schneidet die Horizontalebene in (l', L), daher NL Horizontalriß der tangirenden Ebene ꝛc.; die beiden Geraden des Punktes (Q, Q') bilden den Durchschnitt des Hyperboloides und der tangirenden Ebene, deren Berührungselement sich auf den Kreuzungspunkt (Q, Q') beschränkt, §. 120.

---

*) Man trage C′F′ von C aus auf CF, ziehe durch den Endpunkt eine Parallele mit AC, welche auf AF den Punkt f abschneiden wird.

In der berührenden Ebene des Punktes (S, S') liegen die Geraden ($R\,Q$; $R'\,Q'$) und ($C\,D$, $C'\,D'$), in der berührenden Ebene des Punktes (R, R') die Geraden ($R\,Q$, $R'\,Q'$) und ($E\,F$, $E'\,F'$) u. s. f.

Jede Ebene, welche durch eine gerade Erzeugungslinie des Hyperboloides geht, ist, wie bei allen windischen Flächen, zugleich eine schneidende wie eine berührende Ebene; sie schneidet das Hyperboloid in jener geraden Erzeugungslinie und noch in einer geraden Erzeugungslinie des zweiten Systemes, während sie in dem Punkte, wo beide sich kreuzen, zur berührenden Ebene wird. Die fragliche Erzeugungslinie des zweiten Systemes und mit ihr den Berührungspunkt zu finden, müssen außer der ersten Erzeugungslinie noch zwei andere desselben Systemes zur Konstruktion gezogen werden. Ihre Durchschnittspunkte mit der Ebene, welche durch die erste gelegt ward, bestimmen die gesuchte zweite Gerade. — Giebt man dieser Ebene, während sie immer durch die erste Gerade geht, nach einander kleine Drehungen, so wird der Berührungspunkt auf dieser ersten Geraden fortrücken, weil nach jeder Drehung die Durchschnittspunkte mit den zwei anderen Geraden des gleichen Systemes sich ändern und dadurch eine neue Gerade des zweiten Systemes entsteht, welche die erste in dem neuen Berührungspunkte kreuzt.

239. Das allgemeine windische Hyperboloid von dem windischen Umdrehungs-Hyperboloide abgeleitet.

Stellen wir uns ein Umdrehungs-Hyperboloid vor, mit seinen geraden Erzeugungslinien beider Systeme, etwa wie das von Fig. *116* (S. 201), und geben wir ihm folgende Abänderung:

Die vertikale Axe und auf ihr die Mittelpunkte des oberen und unteren Kreises sollen ungeändert bleiben, den Kreisen selbst aber werde eine Drehung gegeben, daß, während ihre Ebenen unter sich parallel stehen, diese mit der Axe schiefe Winkel bilden. Endlich sollen die geraden Erzeugungslinien immer noch dieselben Kreispunkte durchschneiden wie vorher.

Als Ergebniß solcher Abänderung wird eine Gestalt hervortreten, wie Fig. *181*.

Hier standen die zwei gleichen Grundkreise ursprünglich horizontal, ihre Mittelpunkte auf der Vertikalen (C, C' C'), und ihre Vertikalprojektionen waren die Parallelen $\alpha'\,\beta'$, $\alpha'\,\beta'$, welche nach der Drehung die Lage $A'\,B'$, $A'\,B'$ annahmen. Man hatte die Kreise in 14 gleiche Theile zerlegt. Die Theilpunkte aus der Horizontalprojektion 1, 2, 3' .... auf $\alpha'\,\beta'$, $\alpha'\,\beta'$ projicirt, um sie von da durch Drehung nach 1, 2 u. 14, 3 u. 13 ... ꝛc. auf $A'\,B'$ zu

bringen. Weil die Drehaxen C′ C′ beider Kreise auf der Vertikalebene senkrecht stehen, haben die Theilpunkte während der Drehung Kreisbogen beschrieben, deren Ebenen mit der Vertikalebene parallel stehen, weshalb ihre Horizontalprojektionen als Parallelen zur Grundlinie erscheinen mußten. Auf diese Parallelen 1. 8, 2. 7 .... ꝛc. projicirte man die Punkte der Geraden A′ B′ herab nach 1, 2 ... 8, 9 ... ꝛc. Schließlich wurden die Punkte (*1*, *1*′) und (*10*, *10*′), (*2*, *2*′) und (*11*, *11*′), (*3*, *3*′) und (*12*, *12*′) durch gerade Linien verbunden und somit 14 Erzeugungslinien gewonnen, die wir als e i n e m Erzeugungssysteme angehörig behandelt haben.

Fig. 181.

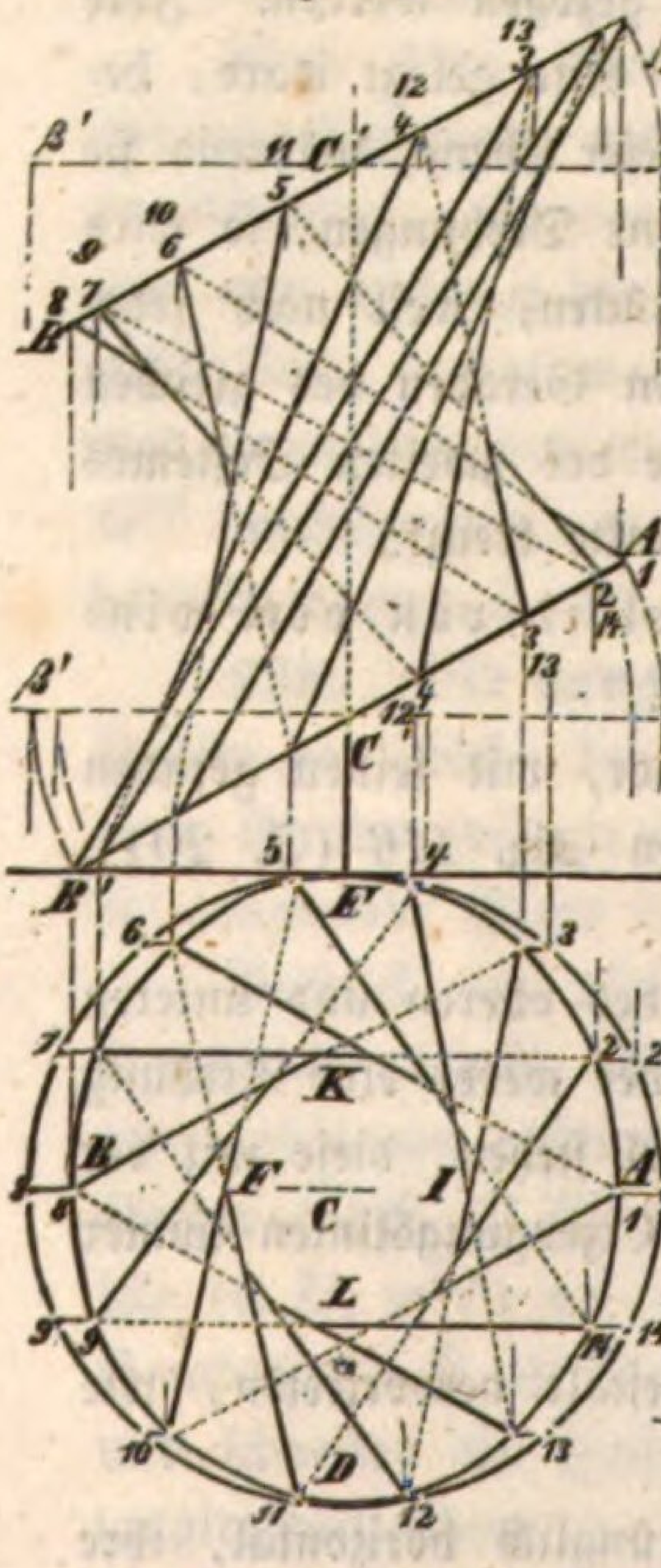


Fig. 182.

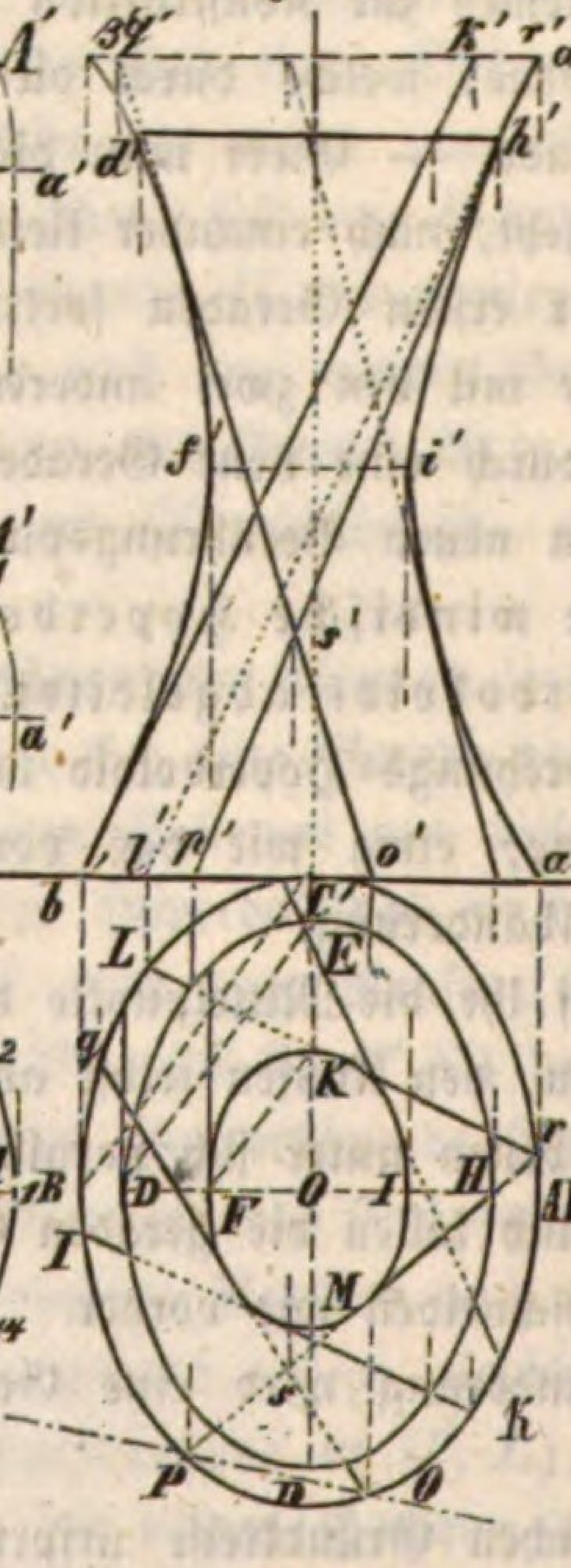
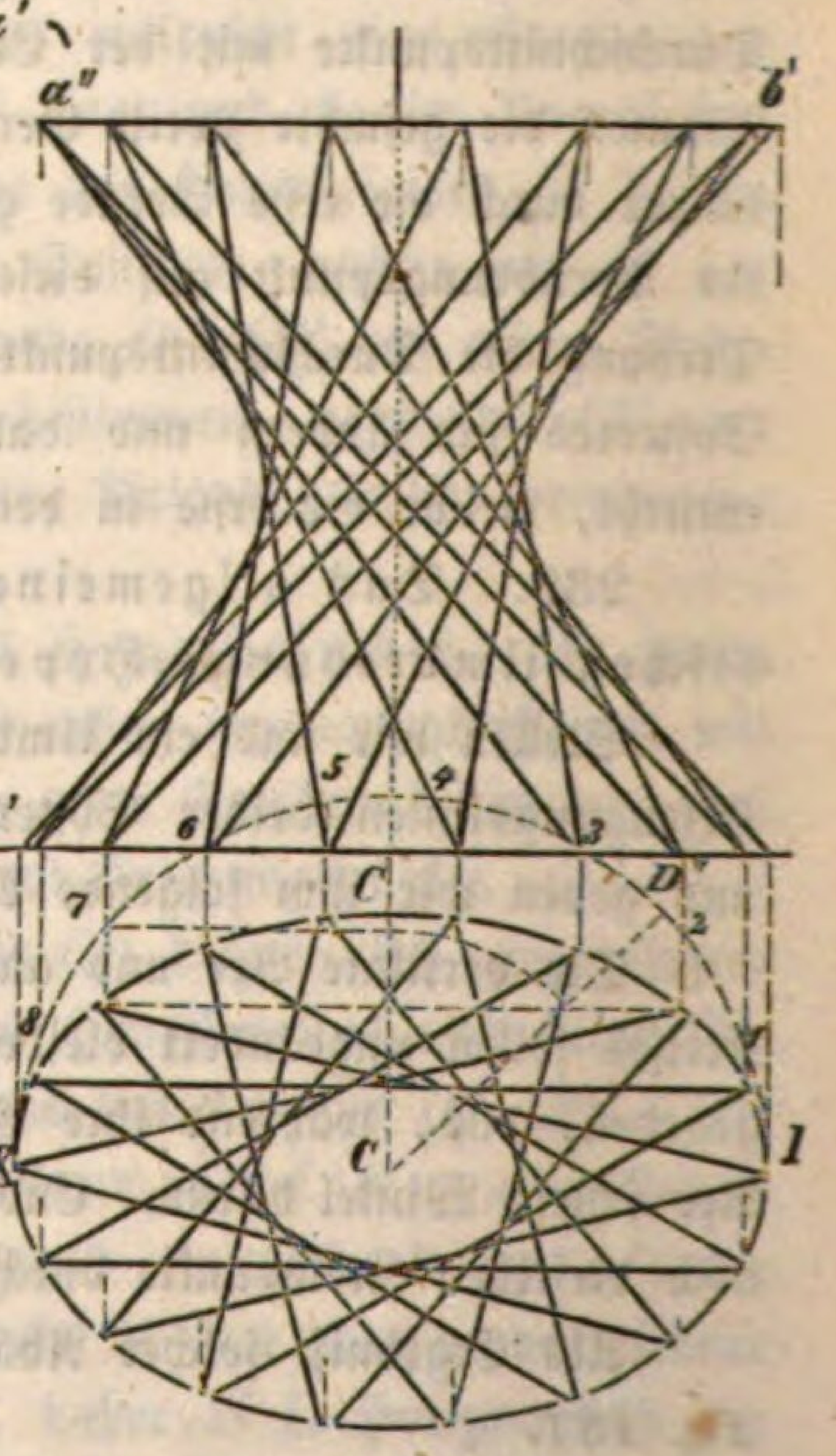


Fig. 183.



Die Umrisse der Vertikalprojektion sind Hyperbeln geblieben, der Umriß der Horizontalprojektion aber, welcher ursprünglich auch die Projektion des Kehlkreises gewesen, dieser hat sich in eine Ellipse F K I L umgewandelt, welche von den Projektionen aller Erzeugungslinien berührt wird.

Man wird ersehen, wie die ganze Horizontalprojektion der Fläche unabhängig sei von dem Abstande der beiden Grundkreise unter sich, oder von

der Länge C′C′ der Axe. Daraus wird zu schließen sein, daß, sowie die Erzeugungslinien des Umdrehungs-Hyperboloides eine Cylinderfläche berührten, welche den Kehlkreis zur Grundlinie hatte, ihrerseits nun die Erzeugungslinien des umgewandelten Hyperboloides eine elliptische Cylinderfläche berühren, von welcher die Projektion FKIL als Basis genommen werden kann. — Die Schnitte der Fläche mit Ebenen, welche zur Axe senkrecht stehen und welche früher Kreise gewesen, haben sich jetzt in Ellipsen umgeändert. Daß dies neue Hyperboloid identisch sei mit demjenigen, welches wir in §. 84 unter den Flächen zweiter Ordnung aufgeführt, und daß dasselbe auch jene Fläche sei, welche durch die Bewegung einer Geraden auf drei beliebig genommenen geraden Leitlinien hervorgebracht wird, soll hier gleichsam nur als geschichtliche Thatsache angeführt werden.

240. Das Hyperboloid, dargestellt nach elliptischen Leitlinien, Fig. *182* u. *183*. Unser Verfahren bei dem Entwurfe der Fig. *115* und *116* dient uns dabei günstig als Vorbild, wobei nur die dortigen konzentrischen Kreise durch konzentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen zu ersetzen sind. Nachdem in Fig. *182* die größere Ellipse mit den Geraden AB, CD als Axen gezeichnet, und bei gleichem Centrum O und gleicher Richtung der Axen die Länge OK als das Maß der halben großen Axe der kleineren Ellipse angenommen worden, bestimmte man den Endpunkt F der kleinen Axe dieser letzteren Ellipse, indem ein Ende C der ersten großen Axe mit einem Ende B der entsprechenden kleinen Axe verbunden und KF parallel zu CB gelegt ward; dadurch erhielt man für die Axen die begehrte Proportion

$$OC : OB = OK : OF.$$

Die äußere Ellipse werde als Projektion der unteren wie oberen Grenzlinie genommen und ihre zugehörige Vertikalprojektion in a′b′ und α′β′ festgesetzt. Indem die innere Ellipse als Kehllinie in Thätigkeit tritt oder als Projektion des elliptischen Cylinders, welcher von allen geraden Erzeugungslinien berührt wird, erscheinen die Horizontalprojektionen der letzteren als Tangenten Ik, Pr.. 2c. der Ellipse. Man hatte die Wahl, I, P... oder aber k, r... als untere Punkte zu betrachten, und wir haben uns für erstere Annahme entschieden. Sonach mußte P sich nach p′ projiciren, r nach r′, und p′r′ war die zu Pr gehörige Vertikalprojektion. Auf (*Pr. p′r′*) ward ein Punkt (*s, s′*) gegeben, und man verlangte die Erzeugungslinie zweiter Generation, welche durch den Punkt geht. Ihre Horizontalprojektion mußte die zweite Tangente sein, welche von s an die Kehlellipse gezogen

werden kann, also die Gerade O s q. Im Vergleiche mit (*P r*, *p' r'*) mußte die zweite durch (*s*, *s'*) gehende Gerade ein entgegengesetztes Ansteigen erhalten und darum O als ihr Fußpunkt genommen werden, wonach o' s' q' als deren Vertikalprojektion hervorging.

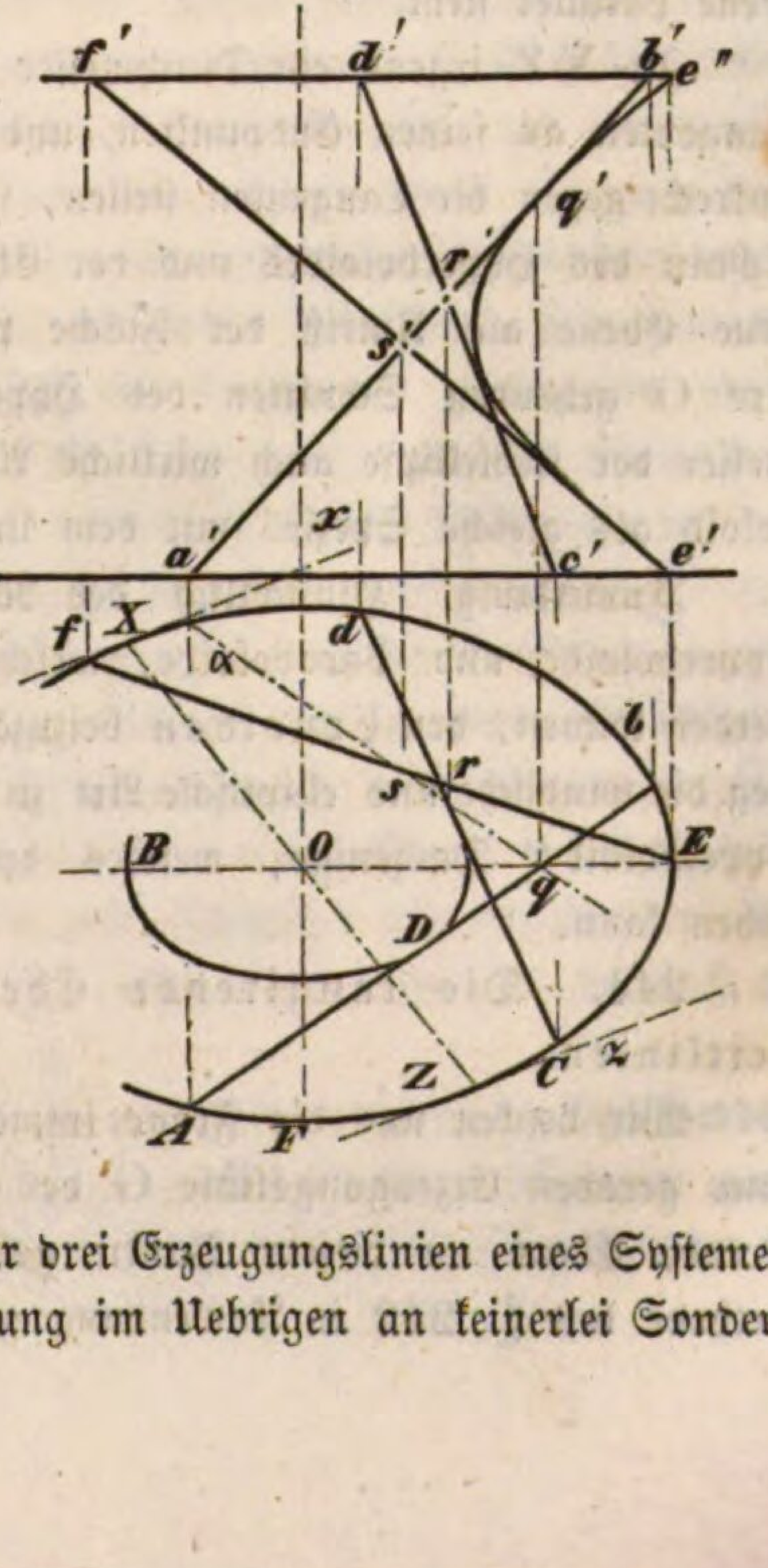
241. Die tangirende Ebene des Punktes (*s*, *s*) geht durch die zwei Geraden (*P r*, *P' r'*), (*O q*, *O' q'*) und hat als Horizontalriß die Gerade O P.

Zieht man an die Kehlellipse irgend zwei unter sich parallele Tangenten, z. B. I k und L r, so müssen diese als Parallele zwischen konzentrischen Ellipsen gleich groß werden. Nimmt man diese Parallelen als Projektionen zweier Erzeugungslinien, deren jede einer anderen Generation angehört, und hat man I als Fußpunkt der ersten gewählt, also b' k' als deren Vertikalprojektion, so erscheint l' r' als Vertikalprojektion der zweiten und dies l' r' muß der Konstruktion zufolge parallel mit b' k' werden. (*I k*, *b' k'*), (*L r'*, *l' r'*) sind somit im Raume parallele Gerade. Eine Ebene durch beide Geraden gelegt, berührt das Hyperboloid in dem Punkte, welchen die Parallelen im Unendlichen gemeinsam haben. So einfach wird im vorliegenden Falle die Konstruktion der Geraden des einen Systemes, welche parallel liegt mit einer gegebenen Geraden der zweiten Erzeugungsart. Wir haben schließlich das Hyperboloid oben durch die Ebene d' h' begrenzt, welche näher als α' β' an der Kehle i' f' liegt. Diese Grenze projicirt sich auf die Horizontalebene als die Ellipse D E H, welche den zwei ersten Ellipsen ähnlich ist und ähnlich liegt. (Nachdem d' auf die Gerade A B nach D herabprojicirt war, bestimmte sich der zweite Axenpunkt E vermittelst der Parallelen K E und B C.)

242. Wie Fig. *116* das Umdrehungs-Hyperboloid nach seinen beiden Erzeugungssystemen darstellt, so geschieht dies in Fig. *183* hinsichtlich des elliptischen Hyperboloides; man hat dabei die Grundellipse konstruirt als die Projektion eines in 18, oder mehr oder weniger, gleiche Theile zerlegten Kreises, der ursprünglich horizontal lag, und dem man alsdann eine Neigung gegen die Horizontalebene gab, wobei der zur Vertikalebene parallele Durchmesser I K als Charnier diente. Die Hälfte des ursprünglich horizontalen Kreises nebst seinen Theilpunkten sieht man bei I D'' K angegeben. D'' C C' ist der Neigungswinkel der Kreisebene gegen den Horizont. Die Bezifferung des Kreises wie der Ellipse geht von 1 als Nullpunkt fortlaufend mit 1. 2. 3 .... Die Projektion der ersten geraden Erzeugungslinie verbindet I mit 7, die zweite verbindet 7 mit 14 (stets mit dem siebenten Punkte),

die dritte 14 mit 3 u. s. f. Durch diese Geraden bildet sich gleichsam von selbst der innere elliptische Kontur. Die Theilpunkte der Ellipse wurden auf die Grundlinie projicirt und auf die Horizontale a′ b′, sie wurden auf beiden wie in der Horizontalprojektion beziffert und in derselben Reihenfolge (*1′* mit *7′*, *7′* mit *14′* .. rc.) durch gerade Linien verbunden, womit die Vertikalprojektionen der Erzeugungslinien gewonnen waren, aus deren Zusammenwirken die Umrisse der Vertikalprojektionen hervorgingen. Jede dieser Geraden, in der Horizontalprojektion wie in der Vertikalprojektion, tritt auf als die Darstellung von zwei Erzeugungslinien des Hyperboloides, deren eine dem ersten, die andere dem zweiten Generationssysteme angehört. Die Geraden beider Systeme sind in unserer Figur als wirklich vorhanden behandelt; es folgte hieraus, daß kein Stück von einer derselben punktirt gezeichnet werden durfte, weil der nicht sichtbare Theil einer jeden durch ein sichtbares Stück einer anderen verdeckt wird. Beide Systeme der Erzeugungslinien zusammengenommen zerlegen die Fläche in kleine windische Vierecke, welche als eine eigene Art von Flächenelementen zu betrachten sind, wenn die Erzeugungslinien unendlich nahe auf einander folgen. All' das sind gemeinsame Eigenthümlichkeiten der beiden windischen Hyperboloide wie des windischen Paraboloides.

Fig. *184.*



243. **Fortsetzung.** Auf dem Hyperboloide Fig. *183* ist es der Hauptschnitt dieser Fläche und der Ebene I K, dessen Projektionen auf der Vertikalebene daselbst den Umriß der Darstellung bildet. Davon sich zu überzeugen bestimme man die Berührungspunkte des Umrisses mit den Projektionen der geraden Erzeugungslinien und man wird finden, daß diese Berührungspunkte in der Ebene I K enthalten sind. Zu näherer Erläuterung diene Fig. *184,* welche gleiche Bedeutung hat mit Fig. *183,* worin aber die Projektionen von nur drei Erzeugungslinien eines Systemes angegeben sind, deren gegenseitige Stellung im Uebrigen an keinerlei Sonder-

bedingung geknüpft ist: $(A b, a' b')$, $(C d, c' d')$ und $(E f, e' f')$ sind diese Geraden. Von einer der Vertikalprojektionen, z. B. von a′ b′, soll der Berührungspunkt q′ mit dem Umrisse e′ q′ e″ konstruirt werden. Zu dem Ende betrachte man a′ b′ als Projektion einer berührenden Ebene des Hyperboloides, welche auf der Vertikalebene senkrecht steht und deren Horizontalriß die Senkrechte a′ A wäre. Diese Ebene schneidet das Hyperboloid noch in einer Geraden des zweiten Erzeugungssystemes (§. 238), welche bestimmt ist, wenn man die Durchschnitte (r, r), (s, s) der Ebene und zweier anderen Geraden des ersten Systemes durch eine gerade Linie verbindet. Der Kreuzungspunkt (q, q') beider Geraden ist der Berührungspunkt. Zieht man nun die elliptische Grundlinie A F E X in Betracht, welche von dem Risse a′ A in α geschnitten wird, so giebt sich (α, a′) als dritter Punkt der Geraden $(s r, s' r')$ zu erkennen. Aber wegen der symmetrischen Lage der beiden Ellipsen A C E und B D müssen sich die zwei Tangenten der Kehlellipse A b, α q in einem Punkte q des Durchmessers B O E kreuzen. Der Punkt (q, q') gehört somit der Ebene B O E an, welche durch die Axe des Hyperboloides geht und zur vertikalen Projektionsebene parallel steht.

Ist X Z irgend ein Durchmesser der Grundellipse, so sind Z z, X x die Tangenten an seinen Endpunkten, und würde man eine neue Projektionsebene senkrecht gegen die Tangenten stellen, so fände sich in gleicher Weise, daß der Schnitt des Hyperboloides und der Ebene X O Z es ist, welcher sich auf die neue Ebene als Umriß der Fläche projicirt. Von allen solchen durch die Axe O gehenden Schnitten des Hyperboloides sind die zugehörigen Durchmesser der Kehlellipse auch wirkliche Axen, womit sich das vorliegende Hyperboloid als gleiche Spezies mit dem in §. 84 angeführten kund giebt.

Anmerkung. Hinsichtlich der Namen dürfte es räthlich scheinen, jene Hyperboloide und Paraboloide, welche nicht durch die gerade Linie erzeugt werden können, den Conoiden beizuzählen und unter „Hyperboloid" schlechtweg die windische und elliptische Art zu verstehen, so wie unter „Umdrehungs-Hyperboloid" Dasjenige, welches durch die Rotation einer Geraden entstehen kann.

244. Die tangirende Ebene windischer Flächen mit drei Leitlinien.

Wir denken uns die Frage immer so gestellt: es ist ein Punkt P auf einer geraden Erzeugungslinie G der Fläche gegeben und es wird die tangirende Ebene an diesem Punkte geheischt. Daß hierzu die Konstruktionsmethode des §. 212 in Anwendung gebracht werden könnte, versteht sich von

selbst, es wäre jene sonst keine allgemeine Methode. Hier aber soll gezeigt werden, wie an deren Stelle die Eigenthümlichkeiten des Hyperboloides und Paraboloides zu benutzen sind.

Die gerade Erzeugungslinie G, auf welcher der Berührungspunkt **P** gegeben, schneidet eine jede der drei Leitlinien. An den Orten, wo dieses geschieht, zeichne man die Tangente jeder Leitlinie und nehme diese drei Tangenten als die Leitlinien eines Hyperboloides, von welchem die Gerade *G* gleichfalls eine Erzeugungslinie ist. In dem Augenblicke, als die Gerade auf den drei Linienelementen hingleitet, welche die Tangenten mit den krummen Leitlinien gemein haben, erzeugt sie ein windisches Flächenelement und dieses bildet ebensowohl einen Bestandtheil des Hyperboloides wie der vorgelegten windischen Fläche. Beide berühren sich somit in allen Punkten dieses Elementes oder der Geraden *G*, also auch in dem Punkte *P*; sie haben darum auch hier eine gemeinsame berührende Ebene und wenn diese nach §. 238 für das Hyperboloid bestimmt wird, ist sie auch für die windische Fläche gefunden.

Es hätte sich fügen können, daß die drei Tangenten zu einer und derselben ebenen Fläche parallel lägen, und in diesem Falle wäre anstatt des berührenden Hyperboloides ein solches Paraboloid entstanden, §. 232. II. Dieser für die graphische Behandlung etwas einfachere Fall aber läßt sich unter allen Umständen herbeiführen. Denn legt man eine Ebene durch die erste Tangente und durch die Gerade *P*, so ist dies die tangirende Ebene der windischen Fläche am Kreuzungspunkt beider Geraden; desgleichen sind die zwei weiteren Ebenen, welche gleichfalls durch die Gerade *P* gehen, die zweite aber noch durch die zweite Tangente, die dritte noch durch die dritte Tangente, abermals berührende Ebenen der windischen Fläche und zwar an dem Kreuzungspunkt der zwei Geraden, welche in einer jeden liegen. Durchschneidet man nun jede der drei berührenden Ebenen im Berührungspunkte durch eine neue Ebene, so ist jeder der entstandenen geraden Durchschnitte eine Tangente der windischen Fläche. Waren nun die drei schneidenden Ebenen unter sich parallel, was immer angeordnet werden kann, so erzeugt die Gerade G durch ihr Hingleiten auf den drei Schnitten ein berührendes Paraboloid, dessen tangirende Ebene an jedem Punkte der Geraden G auch die windische Fläche tangirt.

Als letzte Schlußfolgerung aus dem, was hier und im §. 215 gesagt worden, bleibt noch hervorzuheben, daß die von zwei auf einander folgenden geraden Erzeugungslinien begrenzten Elemente einer jeden windischen Fläche als

hyperboloidische oder paraboloidische Flächenelemente anzusprechen seien, daß somit Paraboloide und Hyperboloide aus gleichen Flächenelementen zusammengesetzt erscheinen, wodurch sich auf's Neue die ersten als Abart der zweiten zu erkennen geben.

Einige weitere Arten windischer Flächen mit drei Leitlinien.

245. **Windisches Cylindroid**, *Fig. 185.* Zwei Kreise und eine Gerade dienen der Fläche als Leitlinien. Erstere haben gleichen Durchmesser, liegen in parallelen Vertikalebenen und die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ist wagrecht, macht aber schiefe Winkel mit den zwei Kreisebenen. Die gerade Leitlinie endlich liegt mit den Mittelpunkten in der gleichen Horizontalebene, steht auf den Kreisebenen senkrecht und durchschneidet sie in gleichen Abständen von den Mittelpunkten. Wolle der Leser die *Fig. 187* vor Augen nehmen, dort das Gerippe der Fläche deutlicher zu erfassen. In dem Parallelogramm F G J H sind die beiden zur Vertikalebene parallelen Seiten F G, H J Horizontalprojektionen der Kreise, deren Mittelpunkte (C, c') und (E, e') in der wagrechten Ebene f′ j′ liegen, welche als horizontale Projektionsebene genommen werden kann. Die Wagrechte O Q, O′, welche durch die Mitte von C E geht, ist die gerade Leitlinie.

Eine beliebige Ebene durch die gerade Leitlinie gelegt, hat O′ p′ als Vertikalprojektion, sie schneidet die eine cirkuläre Leitlinie in (o, o'), die andere in (m, m'), und $(o\,m,\ o'\,m')$ ist eine gerade Erzeugungslinie. Eine regelmäßige Anordnung zu gewinnen, hat man in *Fig. 185,* wo die Buchstaben gleiche Geltung haben, wie in *187,* aus O′ einen Hilfskreis gezogen, diesen von dem wagrechten Durchmesser aus in eine Anzahl (16) gleicher Theile getheilt, nach den Theilpunkten Radien gezogen, als Projektionen gerader Erzeugungslinien. Die Durchschnitte der Radien und der leitenden Kreise wurden mit 1′ und 1′, 2′ und 2′ ... 2c. beziffert und herab auf die Linien F G, H J projicirt, wo sie abermals die Bezeichnung 1 und 1, 2 und 2 ... 2c. erhielten. Zuletzt sind die Geraden 1. 1, 2. 2, 3. 3 .... 2c. Horizontalprojektionen von Erzeugungslinien in gleichmäßiger Aufeinanderfolge. Man hat die Fläche begrenzt 1) durch die vertikale Projektionsebene X Y, 2) durch die ihr parallele Vertikalebene M W. [Die Schnitte dieser Ebenen wurden punktweise konstruirt; eine Gerade *(3. 3, 3′ 3′)* z. B. schneidet die erste Ebene in (m, m') und die andere in (n, n').]

Jeder Schnitt hat die Form einer Schleife und bei O′ einen doppelten Punkt.

Fig. 185.

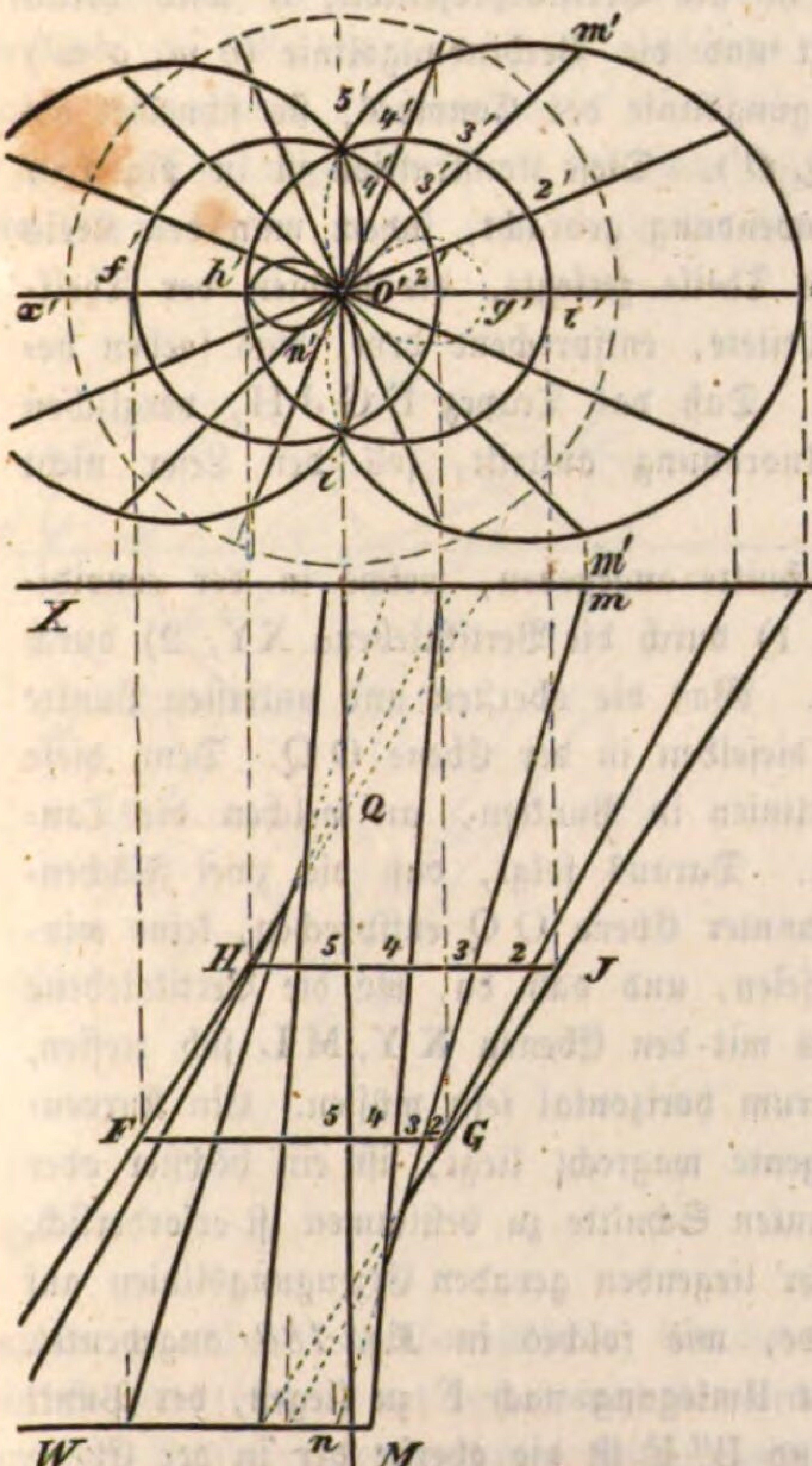
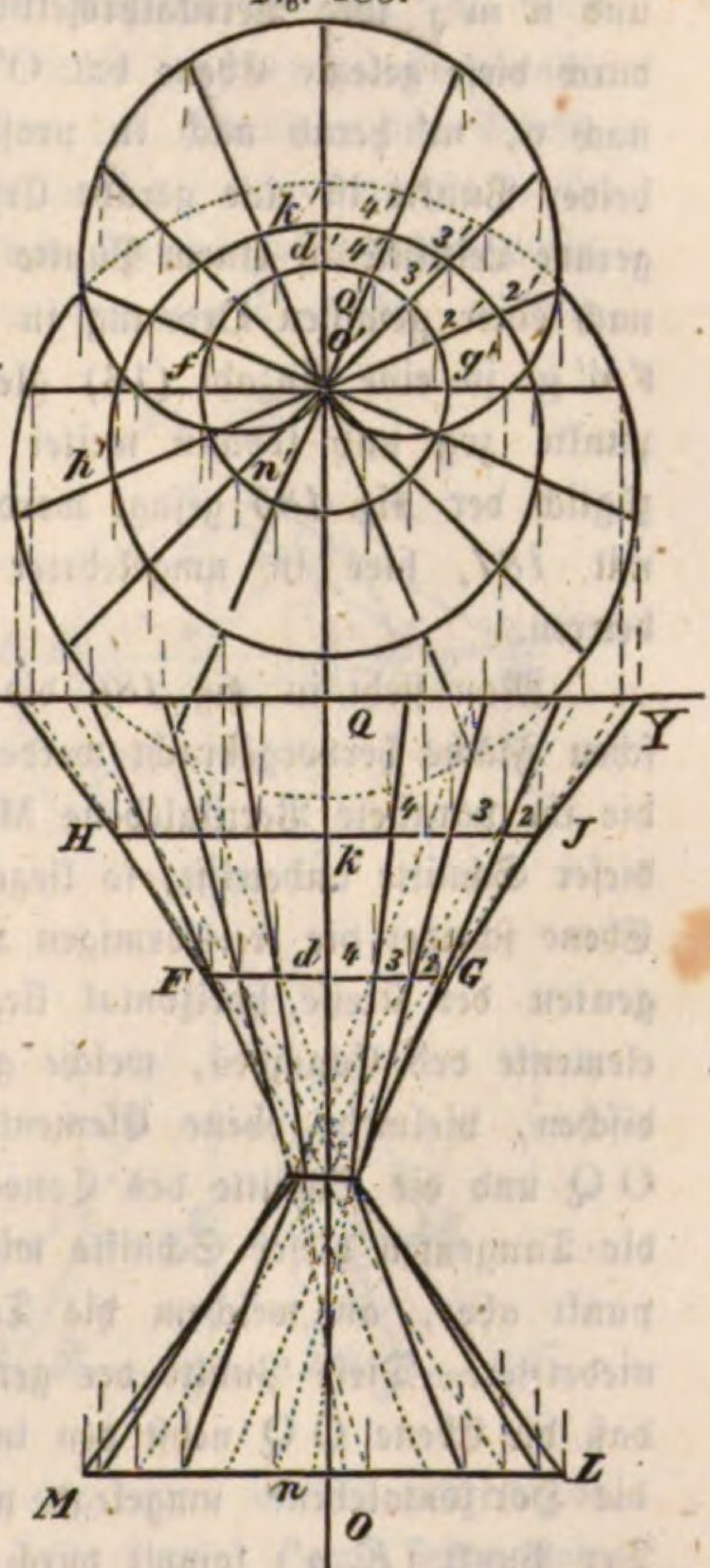


Fig. 186.



246. Fig. 182, windisches Conoid. Es dienen seiner Erzeugung wiederum zwei Kreise und eine Gerade als Leitlinien. Die Kreise liegen abermals in parallelen Vertikalebenen, allein ihre Mittelpunkte gehören einer dritten Vertikalebene an, welche auf den zwei ersten senkrecht steht, und die Verbindungslinie beider Mittelpunkte ist gegen die Horizontalebene geneigt; eine Senkrechte auf die Kreisebenen, durch das eine Centrum gehend, ist die gerade

Leitlinie. Fig. *188* zeigt das Gerippe der Fläche. In dem Paralleltrapeze F G J H, welches symmetrisch liegt gegen die Senkrechte O O′, sind F G und H J die Horizontalprojektionen der zwei kreisförmigen Leitlinien, f′ o′ g′ und h′ m′ j′ ihre Vertikalprojektionen, (*O Q*, *O′*) die gerade Leitlinie. Eine durch diese gelegte Ebene hat O′ o′ m′ als Vertikalprojektion, o′ wird herab nach o, m′ herab nach m projicirt und die Verbindungslinie (*o m*, *o′ m′*) beider Punkte ist eine gerade Erzeugungslinie des Conoides; sie schneidet die gerade Leitlinie in einem Punkte (*Q*, *O′*). Diese Konstruktion ist in Fig. *186* nach einer gewissen Ordnung in Anwendung gebracht, indem man den Kreis f′ d′ g′ in eine Anzahl (16) gleiche Theile zerlegte, die Radien der Theilpunkte zog und sodann weiter arbeitete, entsprechend dem, was soeben bezüglich der Fig. *185* gesagt worden. Daß das Trapez F G J H, verglichen mit *187*, hier in umgekehrter Anordnung auftritt, soll den Leser nicht beirren.

Man sieht in Fig. *186* die Schnitte angegeben, welche in der conoidischen Fläche hervorgebracht werden, 1) durch die Vertikalebene XY, 2) durch die ihr parallele Vertikalebene M L. Was die obersten und untersten Punkte dieser Schnitte anbetrifft, so liegen dieselben in der Ebene O Q. Denn diese Ebene scheidet die kreisförmigen Leitlinien in Punkten, an welchen die Tangenten der Kreise horizontal liegen. Daraus folgt, daß die zwei Flächenelemente des Conoides, welche genannter Ebene O Q entsprechen, keine windischen, vielmehr ebene Elemente seien, und daß da, wo die Vertikalebene O Q und die Schnitte des Conoides mit den Ebenen X Y, M L sich treffen, die Tangenten dieser Schnitte wiederum horizontal sein müssen. Ein Kurvenpunkt aber, an welchem die Tangente wagrecht liegt, ist ein höchster oder niederster. Diese Punkte der genannten Schnitte zu bestimmen ist erforderlich, daß die Ebene O Q nebst den in ihr liegenden geraden Erzeugungslinien auf die Horizontalebene umgelegt werde, wie solches in Fig. *188* angedeutet. Der Punkt (*E*, *a′*) kommt durch die Umlegung nach F zu liegen, der Punkt (*O*, *b′*) nach B″ ($O B'' = O' b'$) und B″ F ist die oberste der in der Ebene O Q liegenden Erzeugungslinien nach deren Umlegung. Nachdem dies B″ F gefunden worden, ergiebt sich alsobald die Höhe oder Tiefe, in welcher die Gerade (*O E*, *b′* O′) von irgend einer zu F G parallelen Vertikalebene getroffen wird.

Anmerkung. Die Flächen Fig. *185*, *186* nannten wir Cylindroid und Conoid, wegen einer gewissen äußeren Aehnlichkeit mit dem Cylinder und dem Conus.

247. **Tangirende Ebene des Cylindroides**, Fig. *187*. (p, p') ist der Punkt des Cylindroides, an welchem die tangirende Ebene bestimmt werden soll. Die gerade Erzeugungslinie dieses Punktes schneidet die erste Kreis-Leitlinie in (o', o), die zweite Kreis-Leitlinie in (m', m) und die gerade Leitlinie in (O', O). — Die tangirende Ebene des Conoides im Punkte (o', o) geht durch die Gerade $(o'\,m', o'\,m)$ und durch die Kreistangente $(o'\,l', o\,l)$. — Die tangirende Ebene des Conoides in dem Punkte (m', m) geht durch die Gerade $(o'\,m', o\,m)$ und durch die Kreistangente $(m'\,k', m\,k)$. — Die

Fig. *187*.

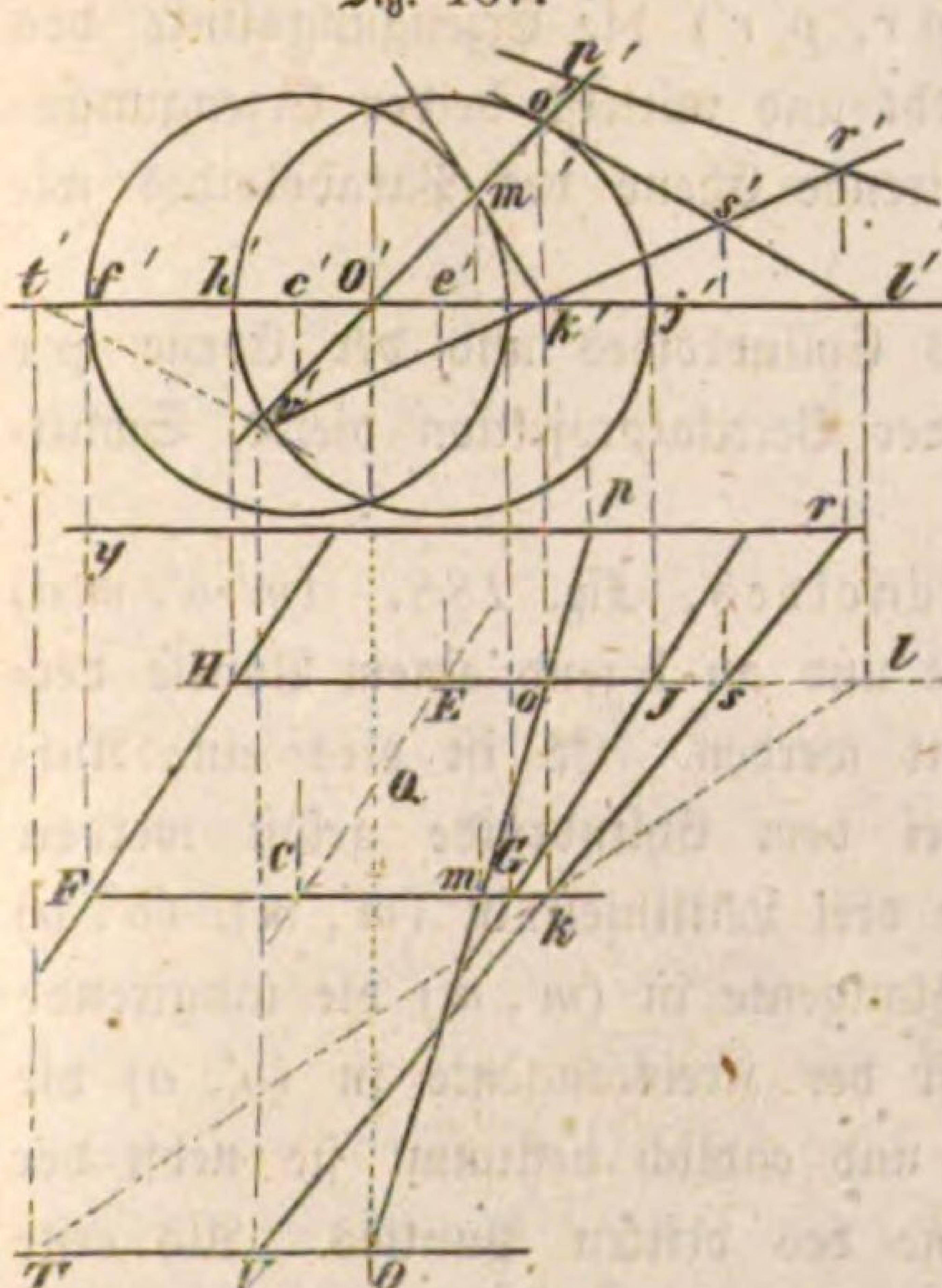
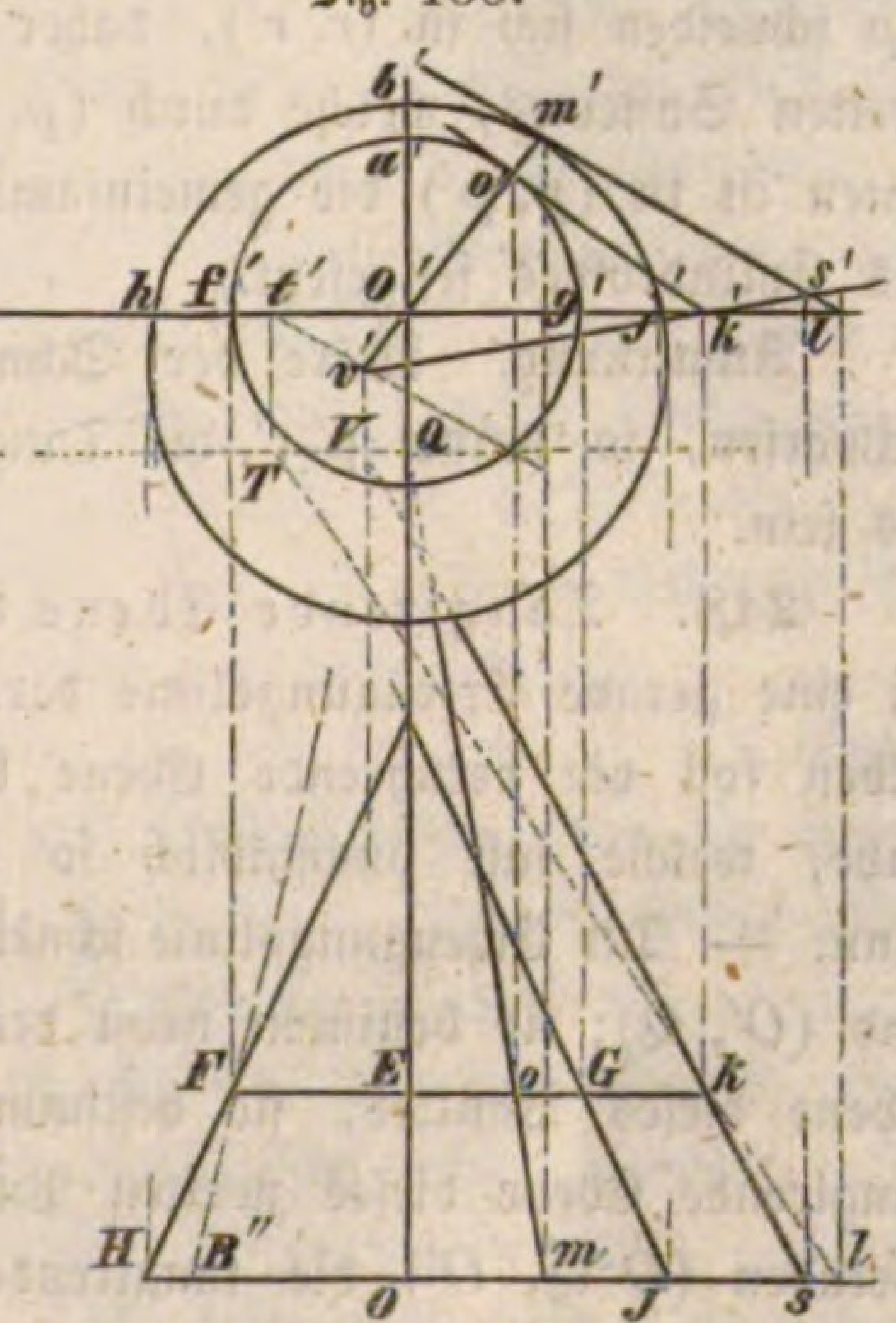


Fig. *188*.



tangirende Ebene des Conoides im Punkte (O', O) des Conoides geht durch die Gerade $(o'\,m', o\,m)$ und durch die Gerade $(O', O\,Q)$. Somit kennt man an drei Punkten der gegebenen Erzeugungslinie die tangirenden Ebenen des Conoides. Die Kreistangenten werden als zwei von den drei Leitlinien des Hilfs-Paraboloides genommen und als dritte Leitlinie eine Gerade, welche in der tangirenden Ebene des Punktes (O', O) enthalten ist, und welche mit den Ebenen H J l, F G k parallel liegt. Die Horizontalprojektion der dritten Leitlinie ist sonach die durch O gehende Parallele O T zu F G, ihre Vertikalprojektion ist die Gerade $O'\,o'$. Es handelt sich zunächst um eine zweite Gerade, welche sich auf die drei Leitlinien stützt. Zu dem Ende legte man durch $(o\,l, o'\,l')$ und durch den Punkt (k, k') eine Hilfsebene und bestimmte

ihren Durchschnitt (v', V) mit der dritten Leitlinie. 1 k ist der Horizontalriß der Hilfsebene, dieser Riß trifft die Ebene O V in (T, t'); die Hilfsebene und die Ebene O V schneiden sich nach einer Geraden, welche durch (T, t') geht und mit $(o\,l, o'\,l')$ parallel sein muß. t′ v′, die Vertikalprojektion dieses Schnittes, muß mit o′ l′ parallel liegen und damit ist auch (v', V) bestimmt. Die Gerade, welche (v', V) und (k', k) verbindet, nämlich $(V k\,s, v'\,k'\,s')$, ist die zweite gerade Erzeugungslinie des Paraboloides, welches mit dem Cylindroide in allen Punkten der Geraden $(o'\,m', o\,m)$ gemeinsame berührende Ebenen hat. Die zweite Erzeugungslinie und die Ebene $y\,p$ schneiden sich in (r, r'), daher ist $(p\,r, p'\,r')$ die Erzeugungslinie des zweiten Systemes, welche durch (p, p') geht und mittelst beider Erzeugungslinien ist in (p, p') die gemeinsame tangirende Ebene des Paraboloides wie des Cylindroides festgesetzt.

Anmerkung. Wäre der Schnitt des Cylindroides und der Ebene p r entworfen, so müßte p′ r′ die Tangente der Vertikalprojektion dieses Schnittes sein.

248. Tangirende Ebene des Conoides, Fig. *188.* $(m'\,o', m\,o)$ sei eine gerade Erzeugungslinie der Fläche und an irgend einem Punkte derselben soll die berührende Ebene bestimmt werden. Es ist dies eine Aufgabe, welche fast buchstäblich so wie bei dem Cylindroide gelöst werden kann. — Die Erzeugungslinie schneidet die drei Leitlinien in (m', m), (o', o) und (O', Q); sie bestimmt nebst der Kreistangente in (m', m) die tangirende Ebene dieses Punktes, sie bestimmt nebst der Kreistangente in (o', o) die tangirende Ebene dieses zweiten Punktes, und endlich bestimmt sie nebst der Geraden $(O\,Q, O')$ die tangirende Ebene des dritten Punktes. Als erste Leitlinie des Hilfsparaboloides bieten sich dar die zwei Kreistangenten $(m'\,l', m\,l)$ und $(o'\,k', o\,k)$. Als dritte Leitlinie hat man eine Gerade in der dritten tangirenden Ebene zu bestimmen, welche durch (O', Q) geht und zu den Ebenen F G, H J parallel liegt. Als Horizontalprojektion dieser dritten Leitlinie giebt sich die Parallele Q T zu F G und als Vertikalprojektion die Gerade O′ m′. Eine zweite Erzeugungslinie zu erhalten, welche sich auf die drei Leitlinien stützt, legte man durch die erste $(m'\,l', m\,l)$ und durch den Punkt (k', k) der zweiten eine Hilfsebene und suchte deren Durchschnitt $(v'\,V)$ mit der dritten, welch letzterer Punkt mit $(k\,k')$ durch eine Gerade zu verbinden blieb. Aber der Horizontalriß der Hilfsebene ist die Gerade 1 k, welche sich mit der Ebene Q V in (T, t') durchkreuzt. Diese letzte Ebene wird von der Hilfsebene nach einer Geraden durchschnitten, welche mit $(m\,l,$

m' l') parallel sein muß. t' o' parallel zu m' l' ist somit die Vertikalprojektion dieses Schnittes, wodurch (*v'*, *V*) festgesetzt wird ꝛc. ꝛc. Eine Ebene, welche in irgend einem Punkte von (*m' o'*, *m o*) parallel zu F G gelegt worden, kreuzt die zweite Leitlinie in einem Punkte, welcher mit dem erst gegebenen die zweite Erzeugungslinie und damit die tangirende Ebene an demselben Punkte festsetzt.

249. Windische Helikoide oder Schraubenflächen.

Diesen Flächen dienen als Leitlinien zwei konzentrische Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe und deren gemeinsame Axe. Ihrer graphischen Darstellung sind die Fig. *189, 190* und *191* gewidmet. Die erste und dritte von ihnen zeigen keine eigentliche Horizontalprojektion, vielmehr nur ein Linienschema zur Verdeutlichung der Konstruktion. In Fig. *189* betrachte man die beiden konzentrischen Kreise als die Projektionen zweier Schraubenlinien, deren gemeinsame Axe die Gerade M M'. Von einem beliebigen Durchmesser g 1 a beginnend, hat man beide Kreise in eine Anzahl (12) gleicher Theile zerlegt, und die Theilpunkte des inneren Kreises fortlaufend mit 1, 2, 3, 4 .... ꝛc. beziffert, die Theilpunkte des äußeren Kreises aber in gleicher Richtung fortlaufend mit a, b, c, d ... ꝛc. Nun sind (*1*, *1'*), (*2*, *2'*), (*3*, *3'*) .... ꝛc. Punkte der inneren Schraubenlinie, (*a*, *a'*), (*b*, *b'*), (*c*, *c'*), (*d*, *d'*) Punkte der äußeren Schraubenspirale; beide von der Beschaffenheit, daß die Höhenunterschiede von 1', 2', 3' ... und von a', b', c', d' .... gleiche Größe haben. Durch Verbinden der Punkte 1' und a', 2' und b', 3' und c' .... ꝛc. ergeben sich die Projektionen einer Reihe von geraden Erzeugungslinien, deren jede beide Schraubenlinien und deren gemeinsame Axe schneidet. Die Schraubenlinien behandelten wir auch als die Gränzen der Fläche. Beachte man nun, daß die Erzeugungslinie (*1 a*, *1' a'*) nach einer halben Umdrehung wieder in der Ebene 1 a liegt, wo (*g 7*, *g' 7'*) ihre jetzige Stellung ist, daß also beide Linien sich durchschneiden werden in einem Punkte, wovon x' die Vertikalprojektion ist. So sind x', y', z' ... ꝛc. die Projektionen von nach einander folgenden Durchschnitten der Erzeugungslinien, welche paarweise in den Diametralebenen 1 a, 2 b, 3 c ... ꝛc. enthalten sind. Die krumme Linie, welche aus diesen Durchschnittspunkten besteht, bildet eine einspringende Kante des Helikoides. Außerhalb derselben theilt die Fläche sich in ein oberes und ein unteres Netz. Jener Theil der Fläche, innerhalb des Durchschneidens der Erzeugungslinien, bildet den Kern des Helikoides, welchen man in Fig. *190* getrennt vom Uebrigen und etwas vergrößert dargestellt sieht.

250. Fortsetzung. Die Bewegung der Erzeugungslinie ließe sich auch der Art formuliren, daß man sagte: die Gerade solle mit ihrem Endpunkte (*1*, *1'*) die Schraubenspirale (*1. 2. 3. 4* ...., *1' 2' 3' 4'* ....) beschreiben und zugleich die Axe stets unter dem gleichen Winkel durchschneiden. Weil dabei aber ein jeder Punkt der Geraden nach einer gewissen Drehung, z. B. nach einer Zwölftels-Umdrehung, auch um $^1/_{12}$ der Ganghöhe parallel zur Axe fortrückt, so zeigt sich, daß der Weg eines jeden dieser Punkte wiederum eine Schraubenspirale von gleicher Ganghöhe sei; so (*a b c d* ... *a' b' c' d'* ....) die, welche von (*a*, *a'*) beschrieben worden, und x' y' z' .... die Projektion derjenigen, welche den Durchschnittspunkt der Geraden (*1 a*, *1' a'*) und (*7 g*, *7' g'*) durchläuft. Diese eigenthümliche Kante des Schrauben-Helikoides ist somit wieder eine Schraubenspirale von gleicher Ganghöhe wie die Leitlinie. Vermittelst ihrer und ihrer Axe als leitender Linien ist das Schrauben-Helikoid schon vollständig bestimmt, denn eine Diametralebene durch die Axe gelegt, schneidet die Spirale in zwei Punkten, welche die Stellung der geraden Erzeugungslinie festsetzen. Nach solcher Wahrnehmung ist die Vertikalprojektion der Fig. *190* gezeichnet worden, indem nur von Nöthen gewesen, den ersten Spiralpunkt mit dem sechsten (wegen der Zwölftheilung des Grundkreises) zu verbinden, den zweiten mit dem siebenten u. s. f.

Zusatz. Weil bei der Umwindung der Erzeugungslinie ihre Punkte stets den ursprünglichen Abstand von der Axe beibehalten, so liegen alle von diesen Punkten beschriebene Spiralen in Cylinderflächen von gleicher Axe wie das Helikoid; und man kann auch sagen: die Schnitte dieser Fläche durch konzentrische Cylinderflächen sind Schraubenspiralen von gleicher Ganghöhe.

251. Lehrsatz. „Die Schnitte des Schrauben-Helikoides durch Ebenen, welche auf der Axe senkrecht stehen, sind archimedische Spiralen.“

Zum Feststellen der Begriffe soll die Axe in senkrechter, die schneidende Ebene also in wagrechter Stellung gedacht werden. *P'*, *P''*, *P'''* seien eine Reihe von Punkten auf der leitenden Schraubenspirale, E', E'', E''' ... die geraden Erzeugungslinien, welche diesen Punkten entsprechen; jede von ihnen sei durch die Axe und durch die Horizontalebene begränzt. Die letzteren Gränzpunkte sollen Q', Q'', Q''' .... heißen und M sei der Ort, wo Axe und Horizontalebene sich kreuzen; somit sind M Q', M Q'', M Q''' .... die Horizontalprojektionen der Erzeugungslinien, und die Winkel, welche diese Projektionen unter sich bilden, sind das Maß der Drehungen, welche die Erzeugungslinien machen müssen, von der ersten Stellung in die zweite überzugehen, von der zweiten in die dritte u. s. f.

Fig. 189.

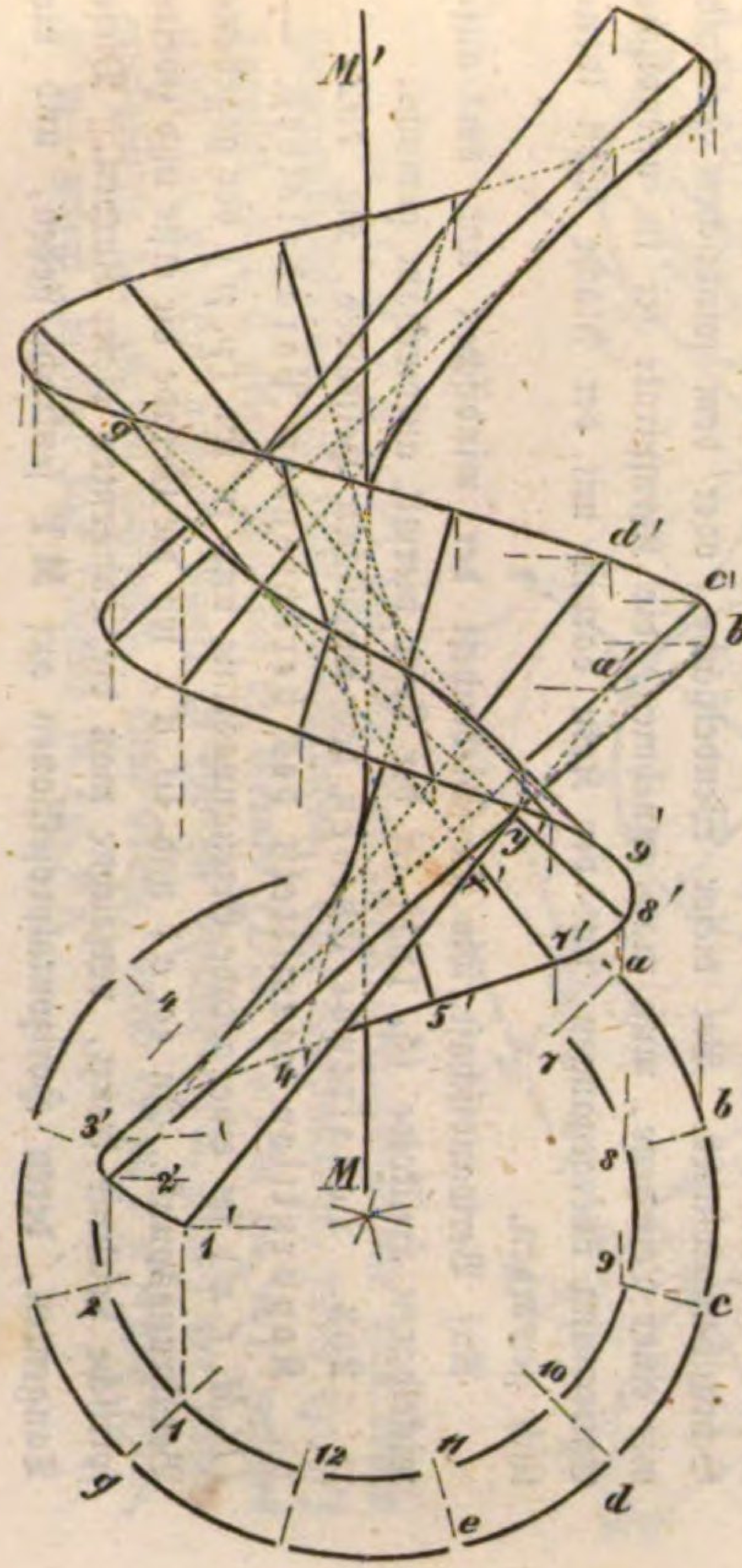


Fig. 190.

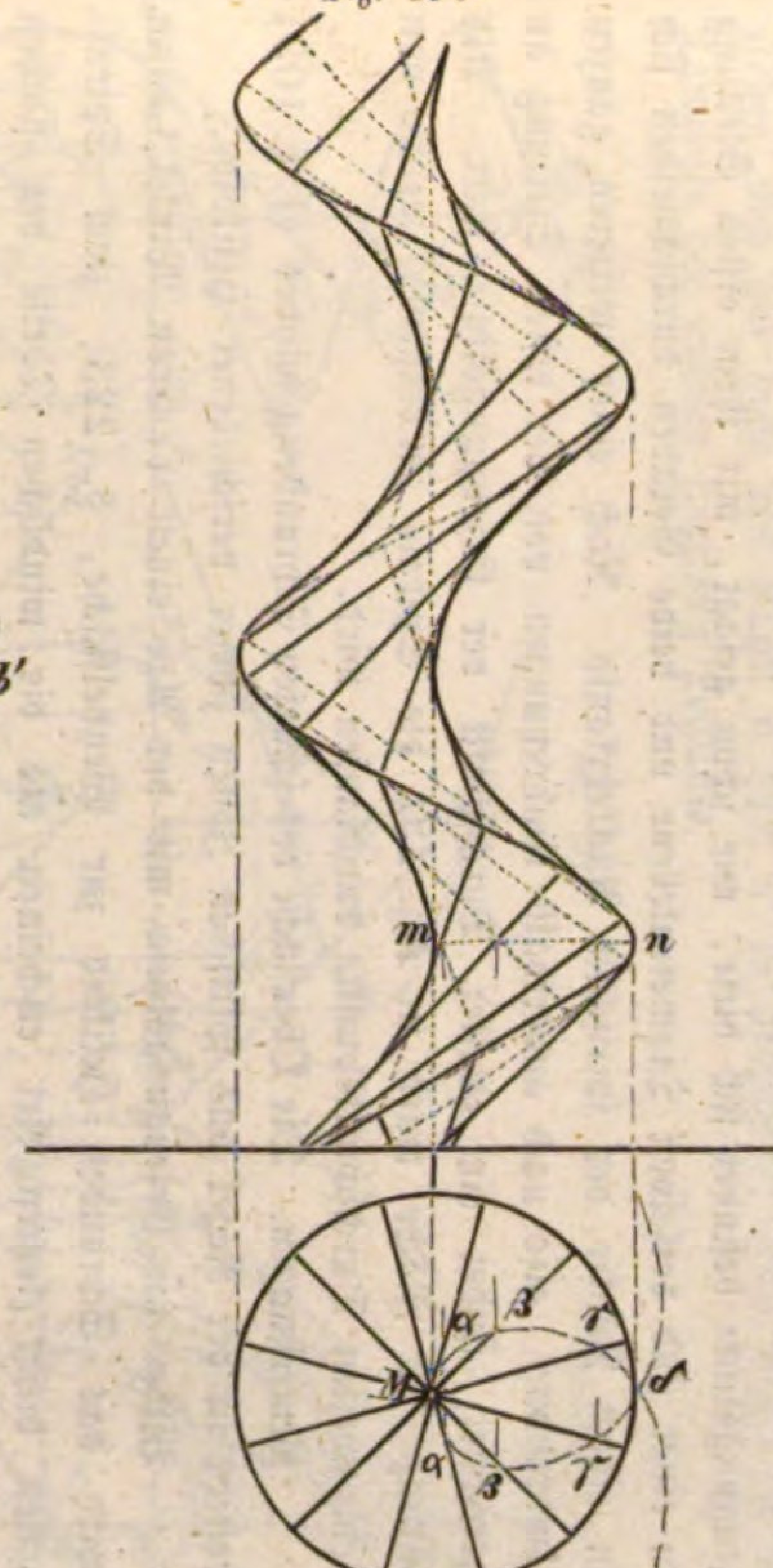
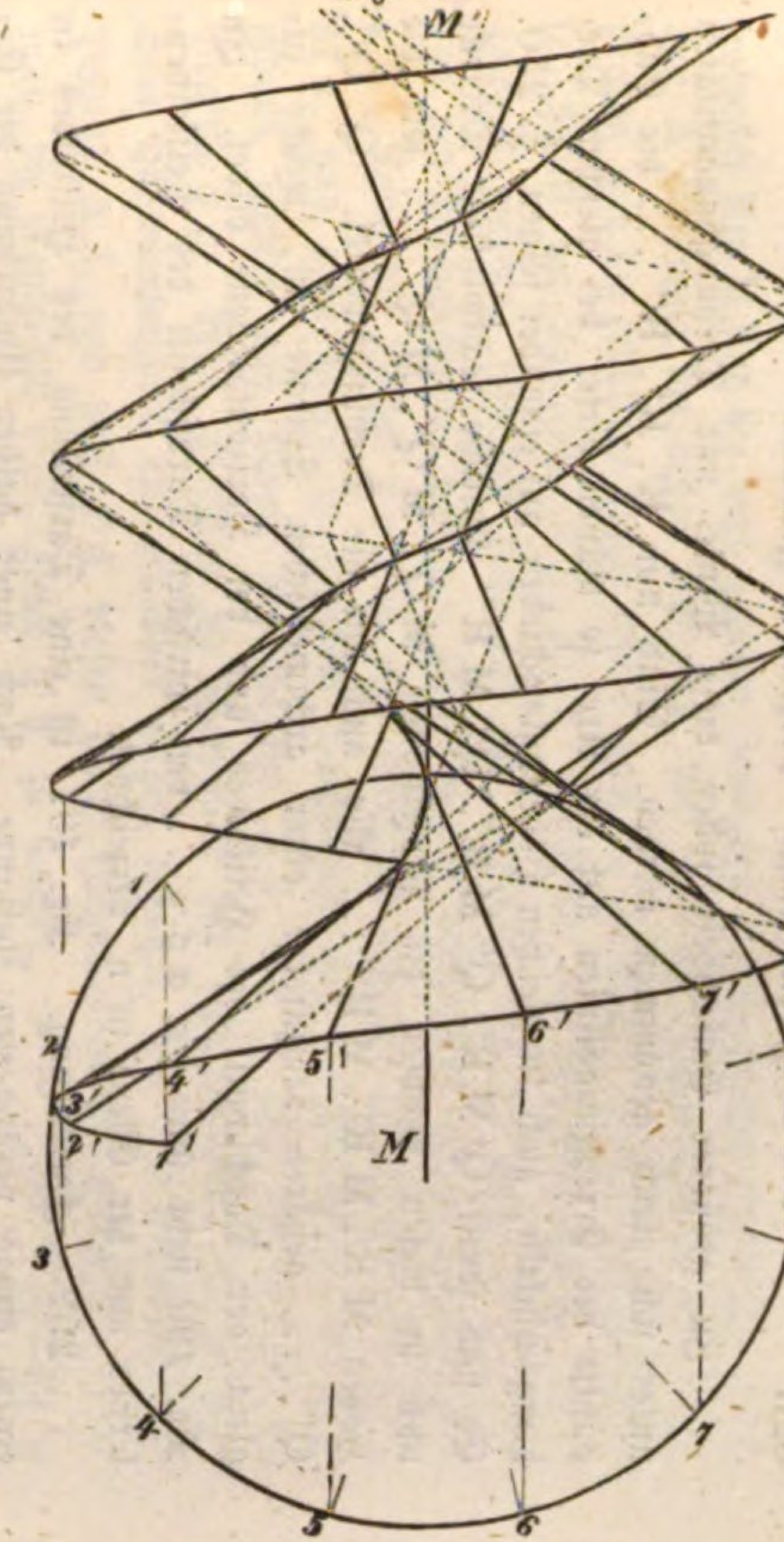


Fig. 191.



Zu größerer Einfachheit sollen diese Winkel und Drehungsquantitäten unter sich gleich genommen werden. Sind nun R′, R″, R‴ ... die Endpunkte der Erzeugungslinien auf der Axe, so müssen diese, bei gleichen Drehungswinkeln, auch in gleichen Höhenunterschieden auf einander folgen, §. 250. Es sind somit Q′ M R′, Q″ M R″, Q‴ M R‴ ähnliche rechtwinklige Dreiecke und in diesen wachsen die Projektionen M Q′, M Q″, M Q‴ ... wie die Höhen M R′, M R″, M R‴ ... also auch wie die Drehungswinkel. Q′, Q″, Q‴ .... gehören demzufolge einer archimedischen Spirale an, welche zugleich den Durchschnitt des Helikoides und der Horizontalebene bildet. In Fig. *190* sieht man bei $\alpha \beta \gamma$ ... den spirischen Durchschnitt des Helikoidenkernes und der Ebene m′ n′ verzeichnet.

252. Fortsetzung. Fig. *191* ist eine Darstellung des Helikoides in einem etwas veränderten Zustande. Nach einer halben Umdrehung der Erzeugungslinie befindet sich diese, wie schon gesagt, mit ihrer ersten Stellung in einer und derselben Diametralebene und beide Geraden durchschneiden sich in einem Punkte der spirischen Rückkehrkante. Nach einer weiteren ganzen Umdrehung, also nach anderthalb Umdrehungen von der ersten Stellung an gerechnet, findet ein zweiter Durchschnitt der Erzeugungslinie statt. Als Gränze der Fläche ward in Fig. *191* die Spirale genommen, welche von dem zweiten Durchschnittspunkte durchlaufen wird.

Bemerkungen. Die Oberfläche des scharfen Schraubengewindes (I, §. 109) besteht in der Regel aus spirischen Zonen zweier verschiedener Helikoide.

Bildet die Erzeugungslinie mit der Axe einen rechten Winkel, dann wird das Schrauben-Helikoid zur Wendelfläche, §. 223; zwei Spiralzonen dieser letzten Art erscheinen als die windischen Theile des flachen Schraubengewindes. Bei dieser Wendelfläche, oder dem windischen Helikoid mit einer Leitebene, muß man annehmen, die Kernspirale sei in unendliche Entfernung übergegangen, und der Kern darum mit der Fläche selbst identisch geworden.

Auf Verwandtschaft wie Verschiedenheit der windischen und der aufwickelbaren Helikoide (§. 181) sei der Leser hiermit aufmerksam gemacht.

253. Tangirende Ebenen des windischen Helikoides, Fig. *192*.

Konstruktion vermittelst des berührenden Paraboloides. — $(F M, f' x')$ sei eine gerade Erzeugungslinie und in ihr (p, p') der gegebene Berührungspunkt. In (c, c') und (d, d'), wo die Gerade die erste und zweite spirische Leitlinie kreuzt, verzeichne man die Tangenten dieser Kurven. Diese Tangenten, deren Horizontalprojektionen auf M F senkrecht stehen, und die

senkrechte Axe M sind die drei geraden Leitlinien des Hilfs=Paraboloides. Weil nun A Ursprung der ersten Spiralen, hat man den Kreisbogen A d zu verstrecken und die erhaltene Länge von d nach L zu tragen; (L, l') ist ein zweiter Punkt der Tangente $(d\,L,\ d'\,l')$. Nachdem die Verbindungslinie M L gezogen worden, schneidet diese auf der Tangente an c einen Punkt n ab von der Beschaffenheit, daß c n gleich ist der verstreckten Länge des Bogens y c. Denn die Bögen y c und A d verhalten sich wie die Radien M c und M d, und diese stehen in gleichem Verhältniß wie die Parallelen n c, L d, wovon letztere das Maaß des Bogens A d; n c ist also das Maaß des Bogens y c. Weil schließlich die Endpunkte des Spiralbogens y c in gleichem Höhenunterschied auf einander folgen müßten, wie die Endpunkte des Bogens A d, und weil o′ d′ diesen letzten Höhenunterschied ausdrückt, so hat man die Senkrechte c′ o‴ gleich d′ o′ zu machen, in o‴ eine Wagrechte zu ziehen und auf diese den Punkt n nach n′ zu projiciren; $(c\,n,\ c'\,n')$ ist die Tangente der zweiten spirischen Leitlinie.

Fig. 192.

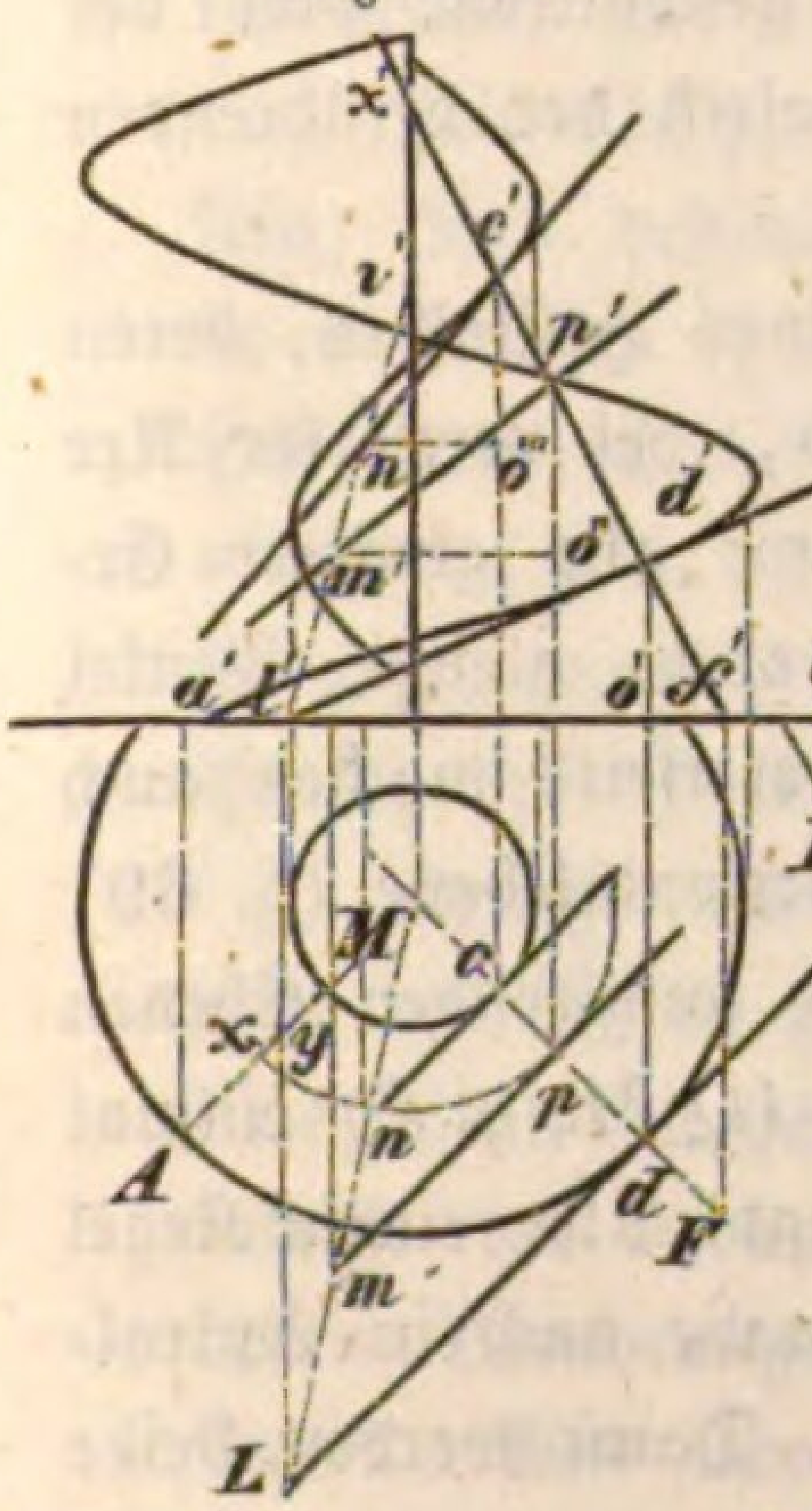


Fig. 193.

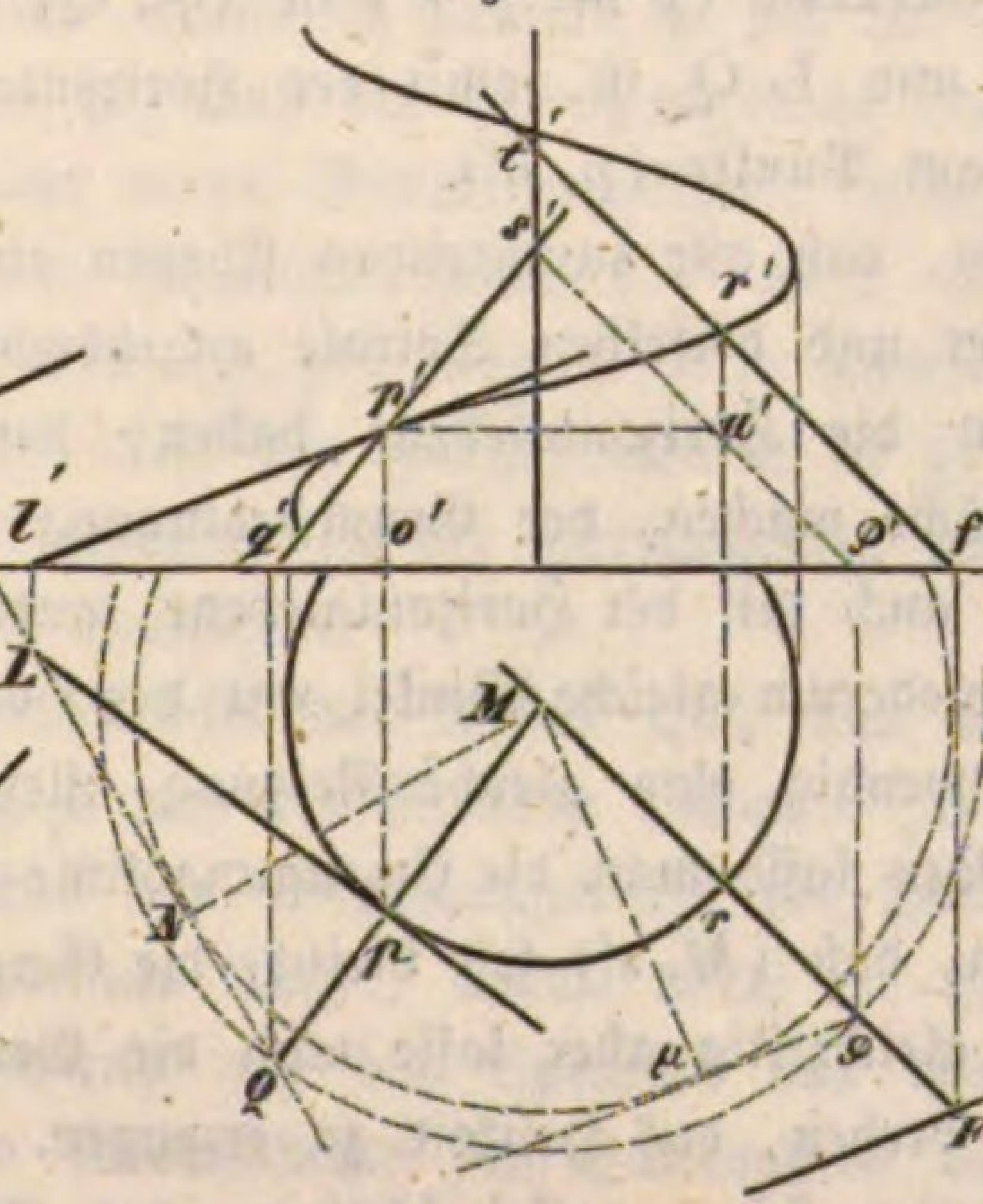
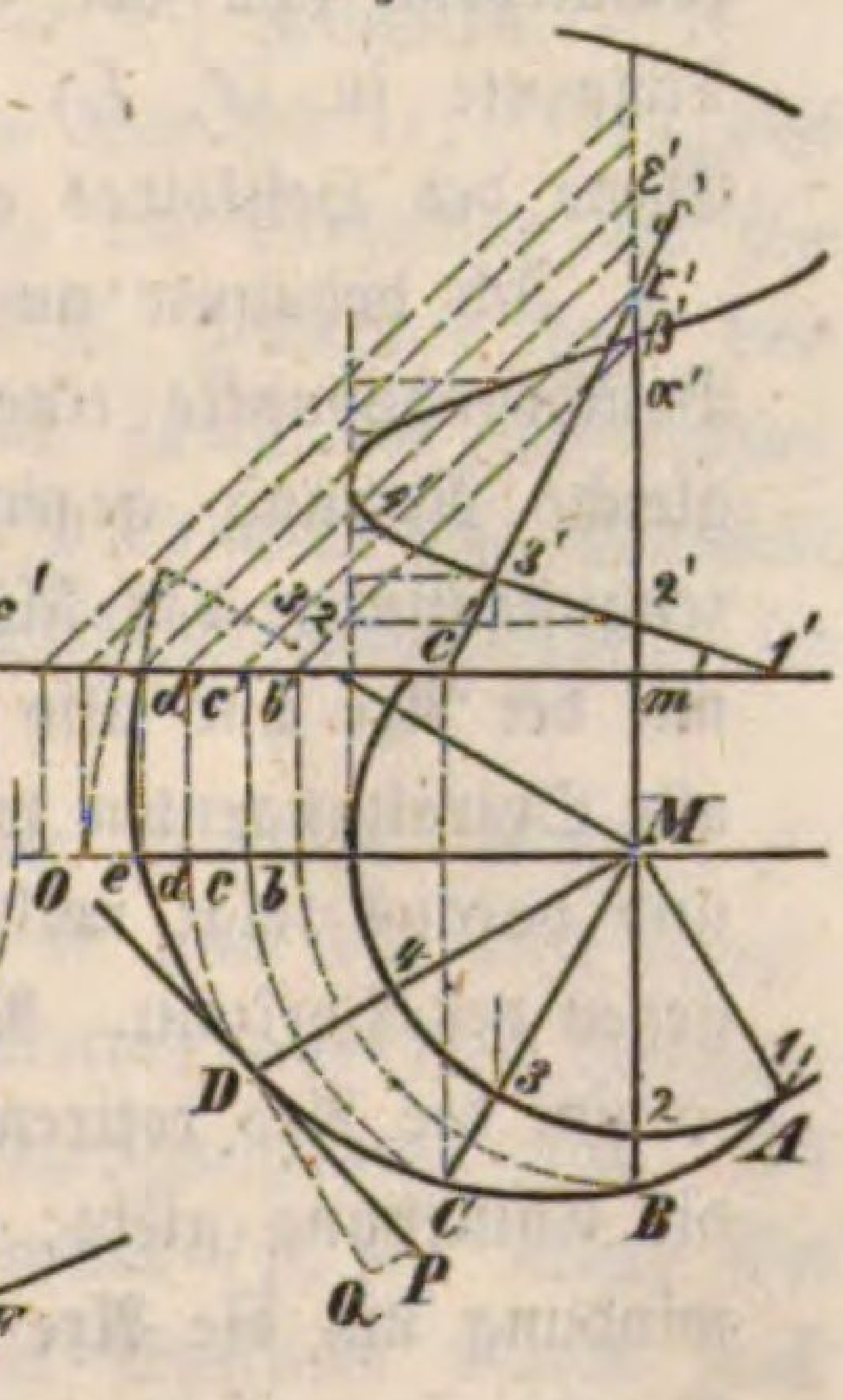


Fig. 194.



In $(L\,M,\ l'\,m'\,n'\,v')$ hat man eine zweite Erzeugungslinie vom ersten Generationssysteme des Hilfs=Paraboloides. Eine Vertikalebene, durch (p, p') parallel zu L d gelegt, schneidet die Gerade $(L\,M,\ l'\,v')$ in (m, m'), welches nebst (p, p') ein anderer Punkt ist für die Gerade $(p\,m,\ p'\,m')$ der Erzeugungslinie des zweiten Systemes. Eine Ebene, durch $(F\,m,\ f'\,x')$ und $(p\,m,\ p'\,m')$ gelegt, berührt das Helikoid in (p, p').

254. **Eine direkte Konstruktion** der tangirenden Ebene ergiebt sich, indem man an die Schraubenspirale des Punktes (p, p') die Tangente $(p\,m, p'\,m')$ zieht. Mit p ist hierzu der Radius M p des Kreises m x gegeben. Der Cylinder, welchem dieser Kreis als Basis dient, schneidet das Helikoid nach genannter Schraubenspirale. Nachdem der Bogen x p verstreckt und von p nach m getragen war, mußte man den Höhenunterschied der Punkte A und x oder d und p, nämlich die Größe d′ o′ auf der Senkrechten des Punktes p′, von hier nach o″ tragen und auf die Wagrechte dieses letzteren den Punkt m nach m′ projiciren. Die Schraubenlinie des Punktes (p, p') selbst kommt hier nicht weiter in Betracht.

255. **Dritte Konstruktion.** (p, p') Fig. *193* sei ein Punkt, auf einer Spiralen des Helikoides gegeben, $(Q\,p, q'\,p')$ die gerade Erzeugungslinie dieses Punktes, welche die Axe in (M, s') schneidet. Endlich sei $(p\,L, p'\,l')$ die Spiraltangente am Punkte (p, p'), (o′ p′ ist gleich einem Achtel der Ganghöhe, weshalb ein Achtel des Umfanges o p r .. verstreckt und auf die Kreistangente von p nach L getragen werden mußte). Nun wird die Horizontalebene von der Geraden $(p\,M, p'\,s')$ in (q', Q) geschnitten, von der Tangente in (l', L) und L Q ist somit der Horizontalriß der berührenden Ebene des Helikoides am Punkte (p, p').

Ich behaupte nun, daß alle tangirenden Ebenen eines Helikoides, deren Berührungspunkte einer und derselben Spirale angehören, bei vertikaler Axe gleiche Neigung gegen die Horizontalebene haben; denn alle geraden Erzeugungslinien der Fläche machen, der Grundbedingung nach, gleiche Winkel mit der Axe und also auch mit der Horizontalebene; andererseits machen auch alle Spiraltangenten wiederum gleiche Winkel mit der Horizontalebene (§. 69) und daraus folgt nothwendig eine gleiche Neigung aller tangirenden Ebenen gegen den Horizont. Nun lasse man die Erzeugungslinie $(Q\,M, q'\,s')$ einmal so um die Axe rotiren, daß (M, s') fest bleibt, die Gerade also einem Kegel die Entstehung giebt; gleichzeitig aber lasse man die Gerade auch in Spiralwindung um die Axe drehen, das Helikoid zu erzeugen. Dann werden beide Gerade fortwährend unter sich parallel bleiben, der Art, daß einer jeden Erzeugungslinie des Helikoides eine ihr parallele Gerade der Kegelfläche entspricht. Stelle man sich vor, von der ersten Geraden werde die tangirende Ebene der Kegelfläche während der Rotation mit geführt, die berührende Ebene des Helikoides aber soll die Bewegung der zweiten Geraden theilen, gleichzeitig, und indem beide Gerade unter sich parallel bleiben, werden es auch die zwei tangirenden Ebenen thun. Einer jeden tangirenden Ebene des

Helikoides, deren Berührungspunkt auf der Spiralen $(p\,r, q'\,p'\,r')$ .. liegt, entspricht somit eine ihr parallel tangirende Ebene der Kegelfläche, deren Scheitel in (M, s'). Grundlinie derselben ist der Kreis, welcher aus M mit dem Radius MQ beschrieben werden kann. Nachdem MN senkrecht auf QL gefällt worden, denke man sich den Scheitel (M, s') mit N verbunden und diese Linie in Rotation um die Axe geführt, wodurch eine zweite Kegelfläche hervorgerufen wird, deren Grundlinie der Kreis vom Radius MN. Dies MN ist auch die Projektion der Berührungslinie des zweiten Kegels und der Ebene $(MQL, s'\,q'\,l')$ und diese Ebene bleibt fortwährend tangirend zur zweiten Kegelfläche, wenn sie, wie bemeldet, um die Axe M rotirt. — Ist nun (r, r') ein anderer Punkt auf derselben Spiralen wie (p, p') und es soll die berührende Ebene dieses anderen Punktes konstruirt werden, so betrachte man Mr als Projektion einer Geraden der ersten Kegelfläche, wonach sie in φ die Horizontalebene durchschneiden muß, und $\varphi'\,s'$ als Vertikalprojektion hat. Eine tangirende Ebene, an die zweite Kegelfläche durch $(M\varphi, s'\,\varphi')$ gelegt, hat als Horizontalriß die Tangente $\varphi\,\mu$ an den zweiten Kreis, und diese Ebene ist parallel zu der für (r, r') gesuchten.

Mit $(M\varphi, s'\,\varphi')$ muß die Erzeugungslinie des Punktes (r, r') parallel sein; dies bestimmt deren Vertikalprojektion, welche die Projektion der Axe in t' kreuzt. (Der Höhenunterschied $s'\,t'$ wird gleich geworden sein dem Höhenunterschiede von (p, p') und (r, r'); nämlich gleich der Senkrechten $r'\,u'$.) $(Mr, t'\,r')$ trifft die Horizontalebene in (f', F) und eine Parallele zu $\varphi\,\mu$, durch F gezogen, ist der Horizontalriß der berührenden Ebene im Punkte (r, r') des Helikoides.

Zusatz. Der Winkel des Risses QL und der Geraden $(MQ, c'\,q')$ oder des Risses $\varphi\,\mu$ und der Geraden $(M\varphi, s'\,\varphi')$ ist auch der unveränderliche Winkel zwischen jeder Erzeugungslinie des Helikoides und dem Horizontalrisse der berührenden Ebene, welche durch die Erzeugungslinie geht, und deren Berührungspunkt auf der Spiralen des Punktes (p, p') seinen Ort findet. Mit dem Wachsthume des Halbmessers der Spiralen nimmt auch dieser Winkel zu, ohne daß er jemals die Größe eines rechten erreichen könnte.

256. Zweiter Zusatz, wodurch wir vermittelst der Fig. *194* hinweisen wollen, wie die Konstruktion der archimedischen Spirale und ihrer Tangenten betrachtet werden darf, als ein Vorgang beim Entwurfe der Projektionen eines windischen Helikoides. Es seien $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$ ... gleich entfernte Punkte der leitenden Schraubenspirale, $(M3, \gamma'\,3')$ eine gerade Er-

zeugungslinie, welche die Axe in ($\gamma' M$), die Horizontalebene in (C', C) schneidet. Werden die Höhenunterschiede der Punkte $2'$ und $1'$ oder $3'$ und $2'$ auf der Axe von γ' auf- und abwärts nach $\beta, \alpha, \delta, \varepsilon \ldots$ getragen, so hat man die Durchschnitte der Axe mit den Erzeugungslinien der Punkte ($1, 1'$), ($2, 2'$) .... ꝛc. Nun hätte der Punkt (C', C) auch so erhalten werden können, daß man die Gerade ($M C$, $\gamma' C'$) um die Vertikale M gedreht, und sie in die der Vertikalebene parallel stehende Ebene $M O$ gelegt hätte. ($3, 3'$) wäre dabei nach $3''$ gefallen, die Linie also (in der Vertikalprojektion) nach $\gamma' 3''$, sie hätte die Horizontalebene in (c', c) geschnitten, welcher Punkt nach dem Zurückbringen der Geraden in die Lage $M 3$ wieder nach (C', C') fallen würde. Indem sämmtliche gerade Erzeugungslinien also in die Ebene $M O$ umgelegt werden, erscheinen sie als Parallelen zu $\gamma 3'$, welche durch die Punkte $\alpha, \beta, \delta, \ldots$ gehen, oder auch durch die Punkte $2'', 3'', 4'' \ldots$, sie schneiden die Horizontalebene in den gleich entfernten Punkten (b', b), (c', c), (d', d) .... und man hat $m' b'$ nach $M B$, $m' d'$ nach $M D \ldots$ ꝛc. zu tragen, und die also erhaltene archimedische Spirale $A B C D \ldots$ ist die Durchschnittslinie des Helikoides mit der horizontalen Projektionsebene.

An einem Punkte D dieser Kurve die Tangente $D P$ zu erhalten, betrachte man dieselbe als den Durchschnitt der Horizontalebene mit der tangirenden Ebene des Punktes D. Nun denkt man sich die Schraubenspirale, welche dem Radius $M D$ entspricht, und an diese eine Tangente gezogen, $D Q$ senkrecht auf $M D$ ist deren Horizontalprojektion. Weil unserer Figur wieder die Zwölftheilung zu Grunde liegt, trug man $1/_{12}$ des Kreises vom Radius $M D$, nämlich den Bogen $d D$, auf die Kreistangente von D nach Q, woraus folgte, daß der Punkt Q um $1/_{12}$ der Ganghöhe, also um eine Größe, gleich $m' 2'$ tiefer liegen müsse als D. Durch Q dachte man sich eine Parallele mit der Erzeugungslinie $M D$, ihre Projektion $Q P$ ist parallel mit $M D$, und sie muß die Horizontalebene in einem Punkte P schneiden, so daß $Q P$ gleich $c d$ ist. Hiernach ergiebt sich $P D$ als Horizontalriß der tangirenden Ebene des Punktes D, und gleichzeitig als Tangente der Spiralen $A B C \ldots$ an demselben Punkte D. Eine Vergleichung des so eben Erklärten mit der Vorschrift zur Konstruktion der Tangente einer archimedischen Spiralen (Thl. I, §. 121) wird zur Erkenntniß der Statthaftigkeit unserer eingänglichen Behauptung führen.

Windische Flächen mit Leitflächen.

257. Wo ebene Flächen als leitende Faktoren bei der Erzeugung scheitrechter Flächen auftreten, sind sie in der Regel von der Forderung begleitet, daß die gerade Erzeugungslinie mit ihnen parallel sein, oder auch daß sie mit ihnen bestimmte Winkel bilden soll. Krumme Flächen aber, welche die Bewegung einer geraden Erzeugungslinie mit bedingen, bewirken dies meist dadurch, daß der Geraden auferlegt bleibt, fortwährend die krumme Fläche zu berühren.

Durch die Fig. *195* und *196* werden uns zwei Fälle dieser Art vorgeführt. In Fig. *195* ist der Erzeugungslinie zum Gesetze gemacht, daß sie zwei gerade Leitlinien $(FG, F'G')$, $(HK, H'K')$ schneide, und eine vertikale Cylinderfläche vom Radius CD berühre.

Auf der ersten Geraden hat man eine Reihe von Punkten $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$ .... genommen; durch jeden eine vertikale Ebene gelegt, welche die Cylinderfläche berührt und deren Horizontalprojektion eine Tangente an den Kreis vom Centrum C ist; man hat ferner die Durchschnittspunkte dieser Vertikalebenen und der zweiten Leitlinie konstruirt, und sie, den ersten entsprechend, auch mit $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$ ... beziffert; endlich blieben noch die gleichnamigen Punkte $(1, 1')$ und $(1, 1')$, $(2, 2')$ und $(2, 2')$ ... 2c. durch gerade Linien zu verbinden. Bestimmte man von irgend einer der Erzeugungslinien, z. B. von der Projektion $3, 3$, den Berührungspunkt i mit dem Kreise C und projicirte i auf $3' 3'$ nach i', so hatte man (i, i') als Berührungsort der Geraden $(3 3, 3' 3')$ mit der Cylinderfläche. Aus allen solchen Berührungspunkten besteht die Berührungslinie des Cylinders mit der erzeugten windischen Fläche.

Begränzende Erzeugungslinien. Die Horizontalprojektionen der Erzeugungslinien, welche durch die Punkte von FG gehen, durchkreuzen die Projektion HK in immer spitzerem Winkel, je weiter die Kreuzungspunkte sich von C entfernen, und die letzte mögliche Projektion, welche KH diesseits von H durchschneidet, ist $v w$, welches zu FG parallel liegt; den (nicht mehr zugängigen) Durchschnitt von $v w$ und KH projicirt man auf $K' H'$ und zieht durch diese Projektion $w' v'$ parallel zu $F' G'$, wodurch die zu $v w$ gehörige Vertikalprojektion $v' w'$ der einen begränzenden Geraden erhalten ist. — Auf der anderen Seite giebt es eine Parallele $y z$ zu KH, welche den Kreis C berührt. Wird der (nicht mehr zugängige) Begegnungspunkt von $y z$ und FG auf $G' F'$ projicirt und dort eine Parallele $z' y'$ zu $H' K'$

Fig. 195.

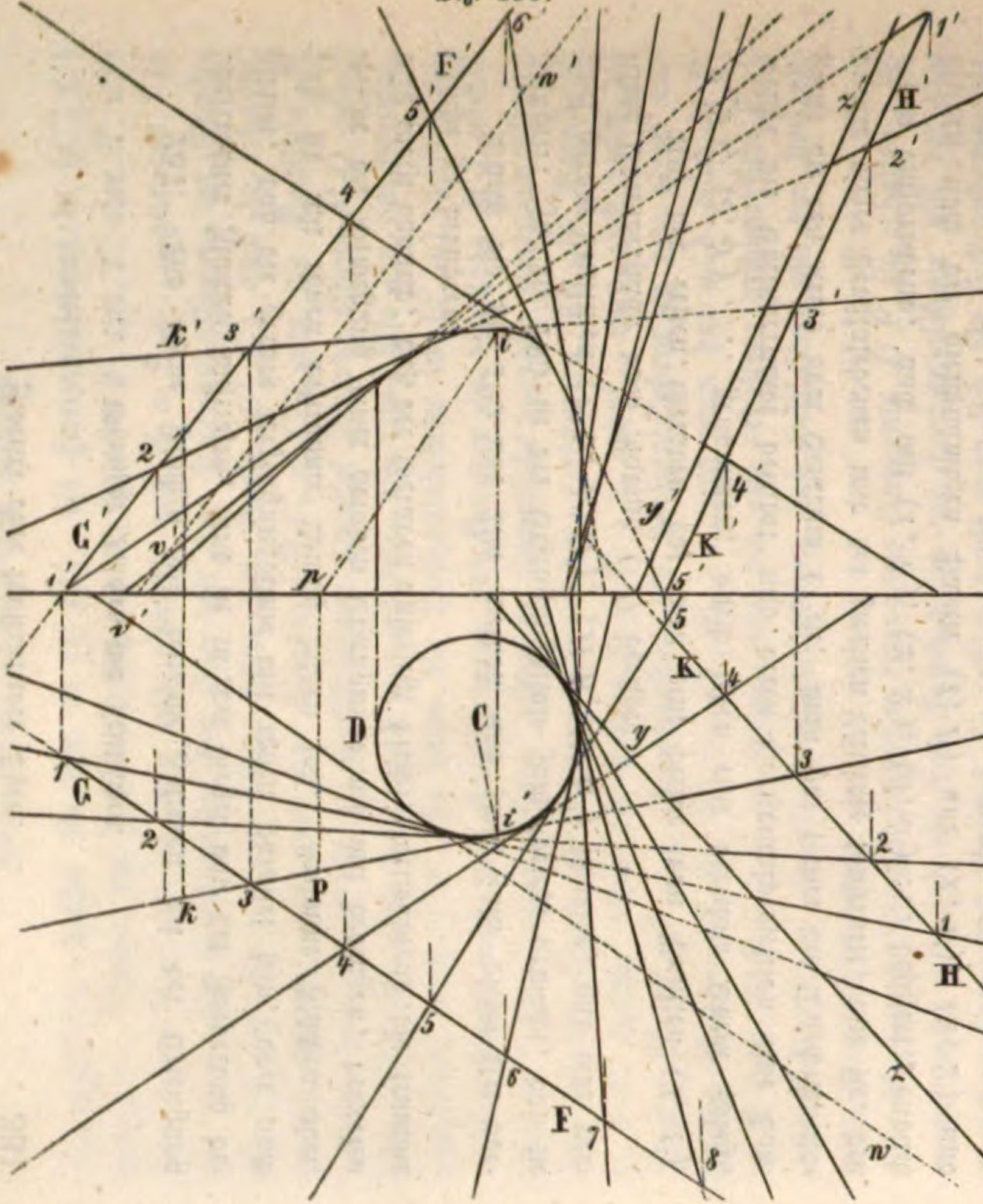
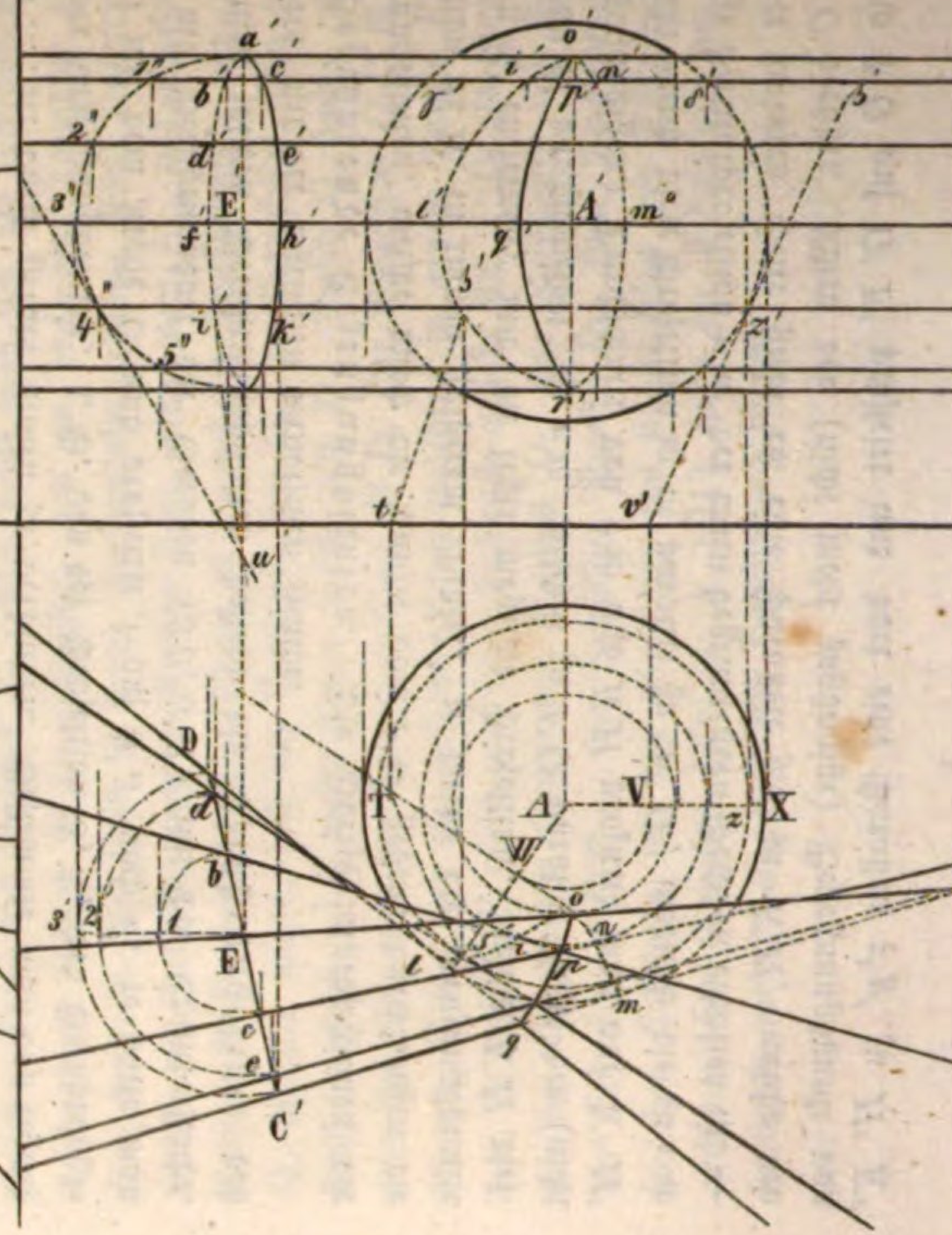


Fig. 196.



gezogen, so hat man in $(y\,z,\; y'\,z')$ die zweite Gränz-Erzeugungslinie gefunden.

258. Tangirende Ebene der Fläche. Wolle man beachten, daß der Bogen des Kreises C, welcher zwischen den Tangenten $v\,w,\; y\,z$ liegt, den Umriß der Fläche in ihrer Horizontalprojektion bilde, und es wird zu entnehmen sein, daß jede der berührenden Vertikalebenen, z. B. $3, 3$, auch als tangirende Ebene der windischen Fläche auftrete, so wie daß (i, i') der Berührungspunkt von beiden sei. Eine jede durch (i, i') und in der Ebene $3, 3$ gezogene Gerade, z. B. $(i\,P,\; i'\,p')$, ist darum in (i, i') Tangente, sowohl des Cylinders wie der windischen Fläche. Soll nun an irgend einem Punkte der Geraden $(3\,3,\; 3'\,3')$ die tangirende Ebene der windischen Fläche bestimmt werden, so hat man in $(F\,G,\; F'\,G')$, $(i\,P,\; i'\,P')$, $(H\,K,\; H'\,K')$ die drei Leitlinien des Hilfs-Hyperboloides, mit dessen Vermittelung die tangirende Ebene an jedem Punkte der Geraden $(3\,3,\; 3'\,3')$ festzusetzen bleibt (§. 244).

Würde man durch (i, i') zwei Parallelen mit den zwei geraden Leitlinien legen, durch beide Parallelen eine Ebene und deren Schnitt mit der Ebene $3\,3$ als dritte gerade Leitlinie der Hilfsfläche annehmen, so verwandelte diese sich in ein Paraboloid.

259. Windisches Conoid, Fig. *196*.

Die Fläche hat als Leitlinie einen vertikalen Kreis $(C\,D,\; a\,b\,d\,\ldots)$, zweitens eine Leitebene, zu welcher alle Erzeugungslinien parallel sein sollen, nämlich die Horizontalebene, drittens eine Leitfläche, welche von allen Erzeugungslinien berührt werden soll, dies ist eine Kugel mit dem Centrum (A, A') und vom Radius $A\,X$.

Konstruktion einer Erzeugungslinie. Eine Horizontalebene $b'\,\beta'$ schneidet die cirkuläre Leitlinie in zwei Punkten (b', b), (c', c) (sie wurden dadurch mit Sicherheit erhalten, daß man den Kreis durch Drehung um seinen senkrechten Durchmesser in eine zur Vertikalebene parallele Stellung brachte rc.). Die Ebene $b'\,\beta'$ schneidet ferner die sphärische Leitfläche nach einem Kreise, dessen Durchmesser gleich $\gamma'\,\delta'$. An die Horizontalprojektion dieses Kreises zog man aus b und c die Tangenten, markirte deren Berührungspunkte i, n, und projicirte diese auf $b'\,\beta'$ nach i', n'. — Aus den Punkten (i, i'), (o, o'), $(n, n')\ldots$ bildet sich die Berührungslinie des Conoides und der Kugel; durch das gegenseitige Schneiden der zwei Erzeugungslinien, welche in jeder wagrechten Hilfsebene liegen, ist auf der Fläche eine einspringende Linie $(o\,p\,q,\; o'\,p'\,q'\,r')$ entstanden, welche das Conoid in zwei Netze theilt. Indem aus $b, E, c\ldots$ Tangenten an die rückwärtigen Theile der Kugelkreise

gezogen werden, bildet man die Projektion eines zweiten Conoides von gleichen Erzeugungsbedingnissen wie das erste. Der Ueberladung wegen wurde es nicht weiter angegeben.

Tangirende Ebene des Conoides. Hierbei ist vorerst zu bemerken, daß jede tangirende Ebene der Kugel, deren Berührungspunkt auf der Linie ($l\,o\,m$, $l'\,o'\,m'\,r'$) liegt, an demselben Punkte auch das Conoid berühre, weil erstens die Erzeugungslinie dieses Punktes als einer Kugeltangente in der tangirenden Ebene liegt, und ebenso die Tangente der Berührungslinie ($l\,i\,o\,m$, $l'\,o'\,m'\,r'$), welche Linie gleichzeitig in beiden Flächen enthalten ist. Es sei nun auf der Geraden ($4'\,s'$, $d\,s$) irgendwo ein Punkt als Berührungspunkt gegeben und es bleiben die Leitlinien des Hilfs-Paraboloides zu bestimmen, dessen Leitebene wiederum horizontal ist. Als erste Leitlinie bietet sich dar die Kreistangente an dem Punkte (i', d), wo die cirkuläre Leitlinie von der Ebene $4'\,s'$ geschnitten wird. In der Umlegung des Kreises zeigt sich diese Tangente bei $4'\,u'$, wonach $i'\,u'$ ihre Vertikalprojektion und $d\,E$ ihre Horizontalprojektion. — Die tangirende Ebene der Kugel am Punkte (s, s') zu erhalten, eine Ebene, welche auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht steht, hat man zuerst den Punkt (s, s') in die Vertikalebene $A\,X$ nach (z, z') umgelegt und hier die Kreistangente gezogen, welche die Horizontalebene in (v', V) schneidet; dieser Punkt ward wiederum in die Ebene $A\,s$ zurückgebracht nach W und hier als Horizontalriß der tangirenden Ebene die Gerade $W\,T$ senkrecht auf $A\,W$ gezogen; eine jede Gerade, z. B. ($s\,T$, $s'\,T'$), welche in der tangirenden Ebene und durch (s, s') gezogen wird, kann als zweite Leitlinie des Hilfs-Paraboloides dienen. Von einigem praktischen Vortheile würde es sein, die Projektion $s\,T$ parallel mit $E\,D$ anzuordnen.

Anmerkung. Daß die windische Fläche von Fig. *196* einige äußere Aehnlichkeit mit der Kegelfläche zur Schau trägt, und deshalb zu den Conoiden gerechnet werden darf, braucht nicht hervorgehoben zu werden. Nimmt man aber, wie dies von Mehreren geschieht, als Merkmal windischer Conoide eine Leitebene und eine gerade Leitlinie, so muß man auch die Nachbarfläche von Fig. *196* als Conoid ansprechen.

260. Zwei krumme Leitflächen und eine beliebige Leitlinie. Es sei P ein Punkt der Leitlinie, für welchen die gerade Erzeugungslinie bestimmt werden soll. Durch P lege ich eine Reihe von Ebenen, welche die erste Leitfläche durchschneiden, und an die entstandenen Schnitte ziehe ich von P aus die Tangenten, welche möglich sind. In der Gesammtheit all' dieser

Tangenten stellt sich eine Kegelfläche dar, deren Scheitel in P und welche die erste Leitfläche umhüllt. Auf ganz entsprechende Weise konstruire ich eine zweite Kegelfläche, deren Scheitel in P und welche die zweite Leitfläche berührend umhüllt. Beide Kegelflächen werden sich in einer oder in mehreren Geraden durchschneiden und jede derselben ist eine Erzeugungslinie der windischen Fläche, weil sie die Leitlinie durchkreuzt und beide Leitflächen tangirt.

261. **Fortsetzung.** Weit einfacher gestaltet sich die Lösung vorstehender Aufgabe, wenn an die Stelle der Leitlinie noch eine ebene Leitfläche tritt, denn jetzt hat man einfach beide krumme Leitflächen durch eine Reihe von Ebenen zu schneiden, welche der Leitebene parallel sind, und in jeder Ebene an die entstandenen Schnitte die gemeinsamen Tangenten zu ziehen, welches Erzeugungslinien sind der windischen Fläche.

262. Drei krumme Leitflächen: sie seien mit A, B, C bezeichnet und die windische Fläche, der sie als Erzeugungselemente dienen, mit Φ. Eine Erzeugungslinie dieser letzteren zu erhalten, werde folgende Kombination angestellt: man bilde eine windische Hilfsfläche V, welche zwei von den drei Flächen A, B, C, etwa die beiden ersten, als Leitflächen hat, und außerdem noch eine beliebige Gerade G als Leitlinie, oder eine gewisse Ebene E als Leitebene. In den vorhergehenden §§. ist gelehrt worden, wie eine oder die andere dieser Hilfsflächen zu bilden sei. Nun wird sich's treffen, daß die Hilfsfläche V und die dritte Leitfläche C sich nach irgend einer krummen Linie durchschneiden, welche näher in's Auge zu fassen ist. Sie wird gebildet durch die Reihe von Punkten, in welcher gerade Erzeugungslinien der Fläche V die Leitfläche C durchdringen. Insofern nun die Fläche V hinreichende Ausdehnung besitzt, wird sie auf einer oder der anderen Seite die Leitfläche C überragen, und in dieser Gegend werden die Erzeugungslinien von V die Fläche C nicht mehr treffen. Zwischen den Geraden nun, welche C schneiden, und jenen, welche mit dieser Fläche nicht mehr zusammentreffen, muß immer eine, Γ, liegen, welche die Fläche C streift oder berührt, und ich sage, dies Γ sei eine Erzeugungslinie der Fläche Φ, weil sie nicht nur C berührt, sondern als Erzeugungslinie von V auch die Leitflächen A, B. Durch Veränderung der willkürlichen Leitlinie G oder der Leitebene E bildet sich eine neue Hilfsfläche V', welche wieder eine oder einige weitere Erzeugungslinien von Φ liefert, insofern dies V' und C sich schneiden und der Schnitt eine Erzeugungslinie von V als Tangente Γ' hat. So ergeben sich die möglichen Erzeugungslinien der Fläche Φ.

263. Berührende Ebene der Fläche Φ. Alle Geraden der Fläche

sind Tangenten an A, B und C, und die Berührungspunkte bilden auf A eine krumme Linie α, in welcher Φ und A sich tangiren; eine eben solche Berührungskurve β mußte auf B hervorgehen, und in einer dritten solcher Linien γ mußten sich Φ und C berühren. Es sei Γ eine Erzeugungslinie, welche α in P kreuzt, β in Q und γ in R. In P konstruire man die Tangente der Linie α, lege durch die Tangente und Γ eine Ebene, so wird diese die gemeinsame tangirende Ebene von A und Φ im Punkte P sein. In Q werde die Tangente der Linie β verzeichnet, welche in Gemeinschaft mit Γ wiederum die gegenseitige tangirende Ebene von Φ und B im Punkte Q festgesetzt; eine dritte Ebene endlich, welche durch Γ geht und durch die Tangente von γ im Punkte R ist hier gemeinsame berührende Ebene von C und Φ. Weil aber die Erzeugungsarten von A, B, C als bekannt angesehen werden dürfen, können die drei tangirenden Ebenen in P, Q, R auch bestimmt werden, ohne die Tangenten an α, β, γ in Mitarbeit zu ziehen. Schneidet man nun die drei tangirenden Ebenen durch drei unter sich parallele Ebenen, deren je eine durch P, Q und R geht, so dienen die drei geraden Durchschnitte als die Leitlinien eines Paraboloides, welches in jedem Punkte der Geraden Γ dieselbe tangirende Ebene hat wie die windische Fläche Φ.

264. Indem wir schließlich noch einiger Eigenthümlichkeiten aller windischen Flächen zu erwähnen haben, führt uns dies nochmals zur Betrachtung der elementaren Formen dieser Gattung zurück, und wir gewinnen damit gleichzeitig eine Art von Abschluß gegenwärtiger Abhandlung über die Genesis windischer Flächen.

Man denke sich eine windische Fläche Φ von irgend welcher Art, und in ihr beliebig eine ihrer geraden Erzeugungslinien E. An drei Punkten P', P'', P''' dieser Geraden seien die tangirenden Ebenen der Fläche konstruirt. Jede dieser Ebenen werde durch eine andere Ebene geschnitten, welche durch den Berührungspunkt geht und dabei auf E senkrecht steht. Mit G', G'', G''' seien die drei schneidenden Ebenen bezeichnet, welche unter sich parallel sein müssen. Der Schnitt einer jeden von ihnen mit der ihr entsprechenden tangirenden Ebene wird eine Tangente der Fläche Φ sein und eine jede dieser drei Tangenten T', T'', T''' steht wiederum senkrecht auf E. Werden die drei Tangenten als die Leitlinien einer neuen windischen Fläche genommen, so ist diese nach §. 244 ein Paraboloid, dessen Erzeugungslinien zweiter Art den Ebenen G' 2c. parallel liegen, während jede dieser berührenden Linien rechtwinklig steht gegen die Gerade E.

Am Punkte P' werde die Normale der Fläche Φ errichtet, d. i. eine Senkrechte auf die tangirende Ebene dieses Punktes. Sie wird in der Ebene G' liegen und auch senkrecht stehen gegen die Tangente T'. Von allen übrigen Normalen der Fläche Φ, welche sie in Punkten der Geraden E durchschneiden, wird jedwede gleicherweise senkrecht stehen gegen die entsprechende Tangente T oder Erzeugungslinie des Paraboloides. Will man sofort annehmen, das Paraboloid werde um die Gerade E als Axe oder Charnier in der Art gedreht, daß jede der Erzeugungslinien gleichzeitig eine Viertelsumdrehung macht, so wird auch eine jede rechtwinklig geworden sein gegen ihre ursprüngliche Stellung, jetzt also mit der Normalen des Drehungspunktes zusammenfallen. In ihrer Gesammtheit bilden aber die Erzeugungslinien immer noch das frühere Paraboloid, welches nur seine Lage geändert hat, woraus endlich hervorgeht, daß die Normalen der Fläche Φ, welche durch die Punkte einer ihrer geraden Erzeugungslinien E gehen, in der Gesammtheit ein windisches Paraboloid bilden.

Betrachtet man gleichzeitig alle Normalen der Fläche Φ, wie sie reihenweise den Punkten der geraden Erzeugungslinien entsprechen, so gehören die Normalen jeder Reihe einem andern Paraboloide an, und sämmtliche Paraboloide durchschneiden die Fläche Φ in normaler Richtung längs ihrer geraden Erzeugungslinien.

Gewundene Flächen.

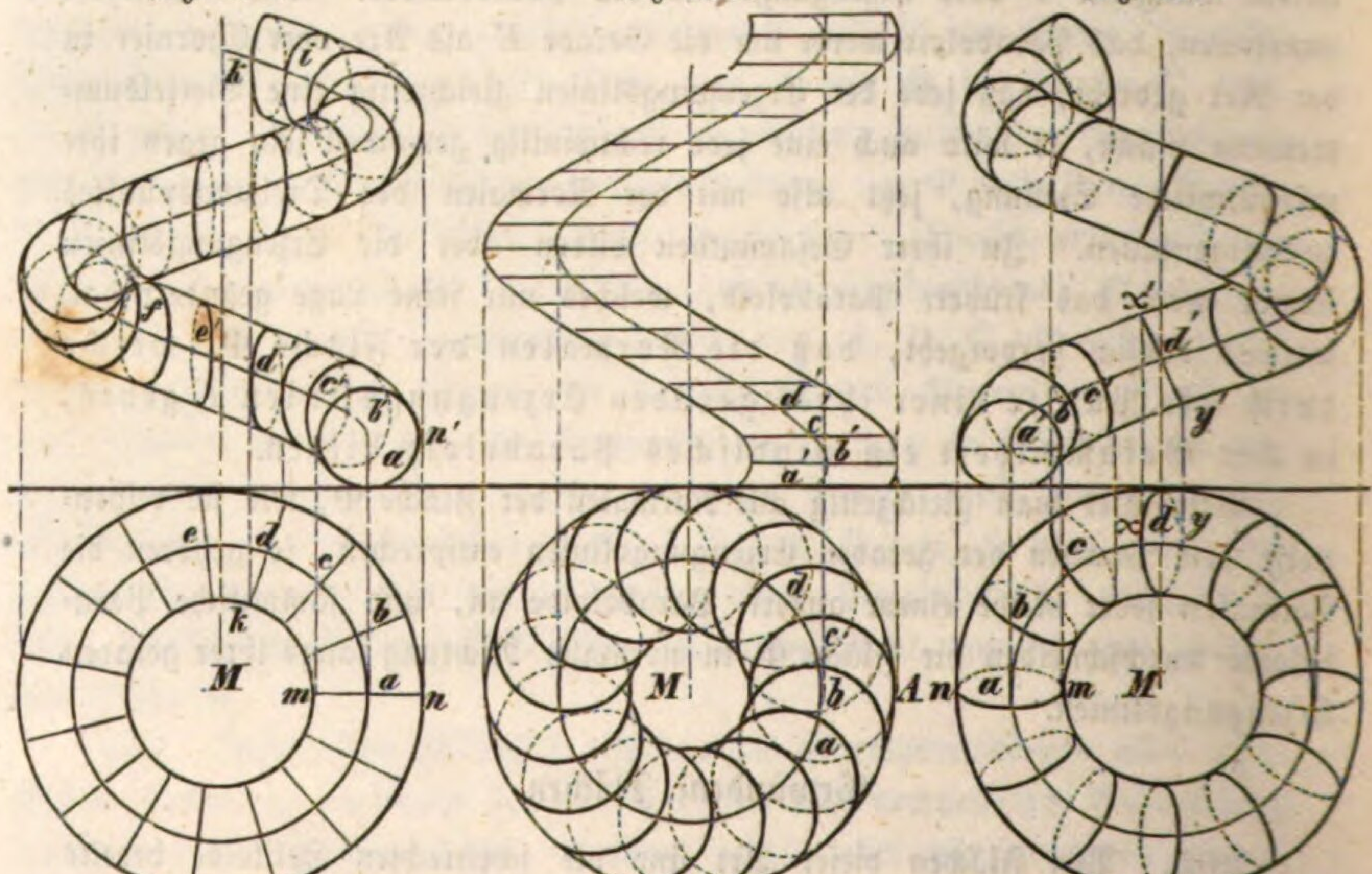
265. Von Flächen dieser Art sind die scheitrechten Helikoide bereits Gegenstand unserer Erörterung gewesen. Was wir hier vorführen, gehört zu den röhren- und schneckenförmigen Flächen, erzeugt durch eine geschlossene Linie, deren Punkte in einer Spiralbewegung fortrücken. Insbesondere betrachten wir jene Gestalten, welche hervorgebracht werden durch einen Kreis von beständigem oder veränderlichem Halbmesser, dessen Centrum eine cylindrische oder konische Spirale durchläuft. Die einzelnen Arten unterscheiden sich durch die Stellung der Kreisebene zur spirischen Leitlinie.

Flächen mit cylindrischer Spirale als Leitlinie. Die Axe der Fläche steht vertikal und die Ebene des unveränderlichen Kreises geht durch die Axe, ist also selbst vertikal, Fig. *197*. Gleiche Erzeugungsart haben die Gewindflächen der Schrauben und wir möchten die Flächen „rundes Gewinde" nennen.

Zweitens. Bei gleichfalls vertikaler Axe und unveränderlichem Kreise

bleibt die Kreisebene immer horizontal, Fig. *194*; wir geben der Fläche den Namen „gewundener Cylinder". Gewundene Säulen, die runden Glieder an den Spindeln von Wendeltreppen, zeigen diese Formen (vergl. Theil I, Fig. *79* und *80*).

Fig. *197*. Fig. *198*. Fig. *199*.



Drittens. Bei stets unverändertem Durchmesser steht die Kreisebene normal zur leitenden Schraubenlinie, Fig. *195*. Das Ergebniß ist ein „Schlangencylinder", wie an dem Kühlrohre eines Destillirapparates.

266. Ueber die graphische Ausführung der Fig. *193—195* werden wenige Worte genügen. Auf der leitenden Spiralen wurden gleich entfernte Punkte (a, a'), (b, b'), (c, c') ... ꝛc. und die Projektionen der Kreiserzeugungslinien entworfen, welche diesen Punkten entsprechen. Die Geraden Ma und MA laufen mit der Grundlinie parallel. man Fig. *197* ist die Horizontalprojektion des Erzeugungskreises, welche durch den Ursprung (a, a') der Leitspiralen geht. Die Umrisse der Horizontalprojektion bilden zwei konzentrische Kreise mit Mm und Mn als Radien beschrieben und alle Horizontalprojektionen der Erzeugungslinien sind nach M gerichtet. Ihre Ver-

tikalprojektionen erscheinen als Ellipsen, deren große Axen vertikal und deren kleine Axen aus der Horizontalprojektion abzuleiten sind, wie es bei *k i* für den Kreis des Punktes (*d, d'*) ersichtlich. Den Umriß der Vertikalprojektion bildet hier, gleichwie in Fig. *199*, eine Linie, welche tangirend an die Projektionen der Kreise gezogen wird und deren einzelne Bögen an den Wendungen sich gegenseitig überschneiden. Aus dem Anblicke der Horizontalprojektion wird entnommen werden können, wie die runde Gewindfläche und die Cylinderfläche vom Radius *M m* sich nach einer Schraubenlinie berühren, deren Horizontalprojektion der Kreis *m k* und deren Ganghöhe gleich ist jenem der Leitlinie. In der Horizontalprojektion von Fig. *198* zeigen sich alle Erzeugungslinien in ihrer Kreisgestalt, während sie in der Vertikalprojektion als Horizontale von einer Länge gleich dem Durchmesser des Erzeugungskreises auftreten. Das übrige Verwandte mit der vorhergehenden Figur wird die Vergleichung von beiden zu erkennen geben. — Es mag hier nicht unerwähnt bleiben, daß in älteren architektonischen Lehrbüchern bisweilen eine Vorschrift sich findet, wie der Umriß der Vertikalprojektion eines einfachen gewundenen Säulenschaftes aus Kreisbögen zusammengesetzt werden könne. Man wird leicht finden, daß diese Umrisse mit keiner der drei hier gegebenen Formen sich vereinbaren lasse, und daß die Vorschrift auf einer Unkenntniß der Gesetze des Zeichnens beruhe.

Etwas umständlicher als bei den vorhergehenden erweist sich die Konstruktion von Fig. *199*. Hier stehen die Erzeugungskreise rechtwinklig auf der Leitspiralen, beziehungsweise rechtwinklig auf deren Tangenten, und wir unterstellen, daß an den Punkten *b', c', d'* .... die Tangenten konstruirt seien. Wir beginnen beim Punkte *d, d'*, wo die Tangente zur Vertikalebene parallel liegt, die entsprechende Kreisebene also senkrecht auf derselben steht, und sich als die Gerade *x' y'* darstellt, deren Größe gleich ist dem Durchmesser *m n* des Erzeugungskreises, und welche rechtwinklig steht auf der Tangente in *d'*. Hieraus leitet sich die Ellipse bei *x y* ab, als Horizontalprojektion desselben Kreises, und dieser Ellipse gleichen die Horizontalprojektionen aller übrigen Erzeugungskreise, denn alle Spiraltangenten machen den gleichen Winkel mit der Horizontalebene und eben so die Kreisebenen, welche auf den Tangenten senkrecht stehen. Was die Vertikalprojektionen betrifft, so haben wir zur Erläuterung des praktischen Verfahrens dies in Fig. *200* näher veranschaulicht. *x m y n* sei hier die Horizontalprojektion eines der Kreise, (*e, e'*) sein Mittelpunkt und (*q' r', x y*) die Tangente der spirischen Leitlinie an ihrem Punkte (*e, e*). Auf die Wagrechte des Centrums projiciren sich die Punkte

m, n nach $m'\,n'$. Da ferner für alle Ellipsen der Vertikalprojektion Fig. *195* der höchste und niederste Punkt einen Höhenabstand haben, gleich dem Höhenunterschiede von x' und y', so müssen in Fig. *200* der höchste und niederste Punkt y', x' auf den zwei Horizontalen $t'\,u'$, $v'\,w'$ liegen, deren Höhenunterschied von e' gleich ist dem Höhenunterschiede von d' und x' oder von d' und y' Fig. *199*; auf diese Parallelen (Fig. *200*) werden y und x nach y' und x' projicirt. Zieht man den Durchmesser $y'\,e'\,x'$, so sind mit diesem die Tangenten in m' und n' parallel. — Weil die Kreisebene auf $(x\,y,\ q'\,r')$ senkrecht steht, muß ihr Vertikalriß auch auf $q'\,r'$ senkrecht stehen (§. 30), und $i'\,k'$ senkrecht auf $q'\,r'$ muß der Richtung nach die Projektion jenes Kreisdurchmessers sein, welcher mit der Vertikalebene parallel steht, und sich in seiner unveränderten Länge darauf projicirt. Trägt man somit den Radius $e\,m$ von e' nach o' und p', so ist in $o'\,p'$ die große Axe der Ellipse bestimmt und $q'\,r'$ liegt in der Richtung ihrer kleinen Axe. Sechs Punkte nebst den entsprechenden Tangenten genügen vollkommen zum Zeichnen solcher Ellipsen.

Fig. 200.

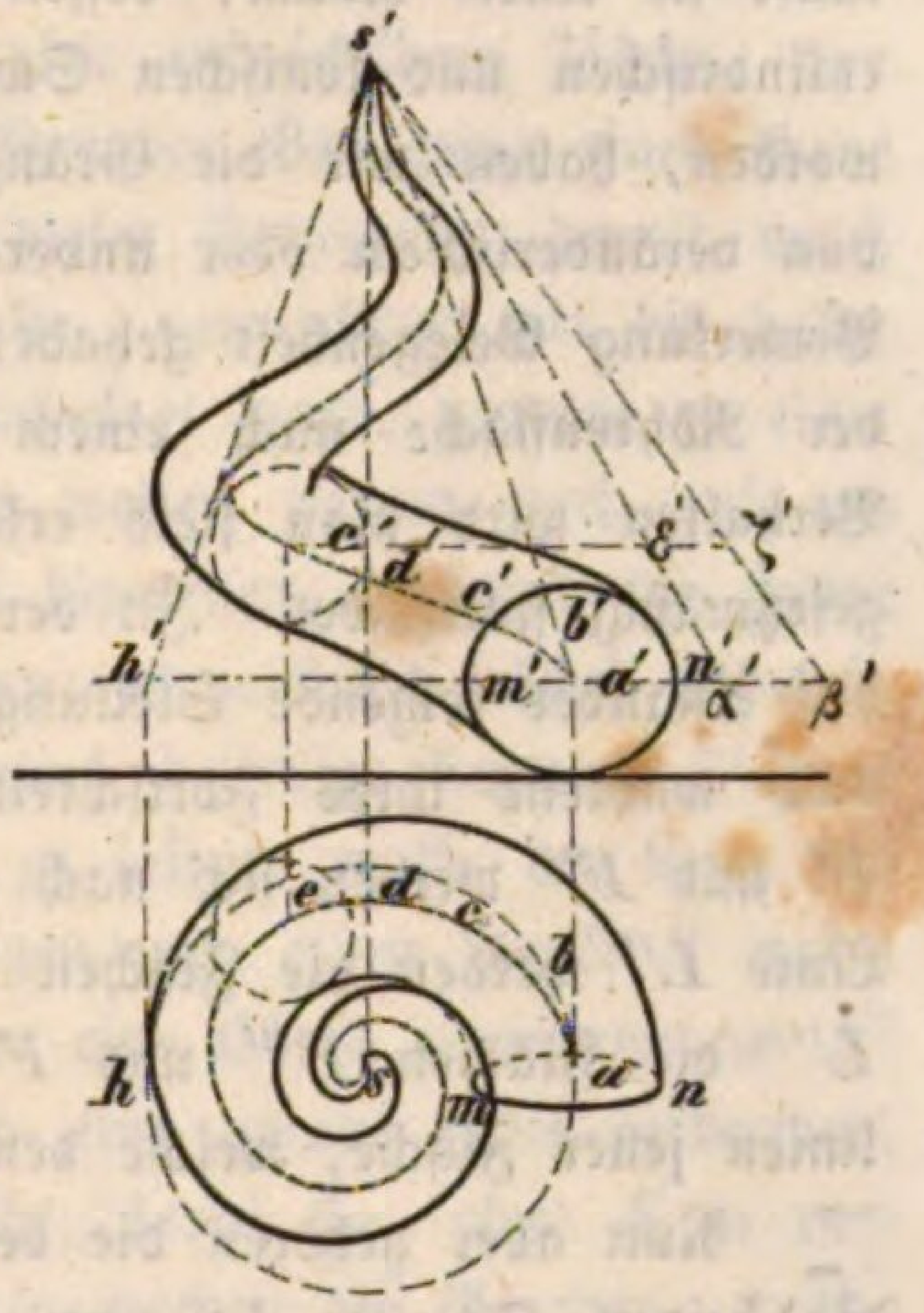


267. **Tangirende Ebenen der genannten spirischen Flächen.** Nach Allem, was über die Spiralbewegung flächenerzeugender Linien vorgetragen worden, muß einleuchten, daß auch bei den drei Flächenarten, welche in den Fig. *197—199* repräsentirt sind, ein jeder Punkt des erzeugenden Kreises während dessen Bewegung in einer Schraubenspirale von gleicher Ganghöhe fortrückt. Mit der Horizontalprojektion eines solchen Punktes ist auch der Radius der ihm zugehörigen Spiralen bestimmt. Somit wird die tangirende Ebene an jedem Flächenpunkte festgesetzt durch die Tangenten des Kreises und der Schraubenspirale, welche mit dem Punkte sich kreuzen.

268. **Flächen mit konischer Spirale als Leitlinie und erzeugt durch die Bewegung eines Kreises, dessen Centrum die Leitlinie durchläuft, dessen Ebene gegen die Leitlinie eine bestimmte Stellung hat und dessen Halbmesser wächst oder abnimmt, in demselben Verhältniß als das Centrum von der Spitze des Kegels sich entfernt, oder sich ihr nähert.** Es mögen wiederum drei Arten dieser spirischen Flächen angemerkt werden — erstens jene Art, wobei die Ebene des Erzeugungskreises immer durch die Axe geht, und welche deshalb wieder den Gewindflächen beizuzählen sind; — zweitens jene Art, deren Erzeugungskreis bei vertikaler Axe stets horizontal bleibt: dies ist die gewundene Kegelfläche; — drittens, der geschlängelte Kegel oder die spirische Schneckenfläche, wovon Fig. *201* ein Bild giebt. Auf einer Kegel-

fläche, deren Grundlinie der wagrechte Kreis vom Durchmesser $a\ h$, und deren Spitze in (s, s'), ist eine Spirale $(a\ b\ c\ d\ .., a'\ b'\ c'\ ...)$ als Leitlinie gegeben; $(m\ n, m'\ n')$ horizontaler Durchmesser des erzeugenden Kreises. Insofern es sich nur um die Konturen der Schneckenfläche handelt, können diese in einfacher Weise gefunden werden. Nachdem man $h'\ a'$ verlängert, auf der Verlängerung $\alpha'\ \beta'$ gleich dem Radius $a'\ m'$ genommen, und α' wie β' mit s' verbunden hat, zieht man aus den Punkten $a', b', c' ...$ wagrechte Hilfslinien (für e' ist eine davon angegeben) und die Stücke dieser Wagerechten zwischen $\alpha'\ s'$ und $\beta'\ s'$ sind gleich den Radien der Erzeugungskreise, welche den Punkten $b', c' ...$ entsprechen, so $\varepsilon'\ \zeta'$ Radius des Kreises für den Punkt (e', e). Mit solchen Radien werden aus $b', c' ...$ und aus $b, c, d ...$ Kreise beschrieben, endlich an alle Kreise die Konturen berührend gezogen. Es

Fig. 201.



beruht diese Konstruktion auf der Vorstellung, daß eine Kugel vom Radius $a'\ m'$, deren Centrum die Kegelspirale $(a'\ b'\ c'\ ..., a\ b\ c\ d\ ...)$ durchläuft, während ihr Umfang proportional zu ihrer Entfernung vom Scheitel (s, s') abnimmt, daß, sage ich, diese Kugel von der Schneckenfläche fortwährend nach einem ihrer größten Kreise berührt wird. — Wollte man eine cirkuläre Erzeugungslinie entwerfen, deren Centrum auf der spirischen Leitlinie gegeben wäre, so wäre in dem Centrum die Tangente der Leitlinie zu bestimmen; alsdann hätte man eine Hilfsprojektion anzuordnen, deren Ebene der Tangente parallel stünde (ähnlich wie $x\ y$ und $x'\ y'$ Fig. 199), mittelst dieser die Horizontalprojektion des Kreises zu entwerfen und alsdann zur gewöhnlichen Vertikalprojektion überzugehen.

Anmerkung. Es bleibt dem Leser anheimgestellt, eine Darstellung der konischen runden Gewindfläche und der gewundenen Kegelfläche (erste und zweite Art) zu entwerfen.

Umhüllungsflächen.

269. Indem irgend eine krumme Fläche stetig fortbewegt wird, durchläuft sie einen Raum, dessen Gränze wiederum eine Fläche ist. In der cylindrischen und konischen Schlangenfläche, wovon im vorigen §. gehandelt worden, haben wir die Gränzen des Raumes erkannt, welchen eine Kugel von veränderlichem oder unveränderlichem Halbmesser durchläuft, und zu der Bemerkung Gelegenheit gehabt, wie die Kugel in jeder ihrer Stellungen von der Röhrenfläche nach einem Kreise berührt werde. Aber ein ähnliches Verhalten wird man stets erkennen, sobald das Fortschreiten einer Fläche gesetzmäßig stattfindet. In der That wollen wir mit F', F'', F''', F'''' ... auf einander folgende Stellungen einer beweglichen Fläche bezeichnen, welche auch während ihres Fortschreitens die Gestalt ändern kann. Die Flächen F' und F'' werden sich nach einer Linie L' schneiden; nach einer ähnlichen Linie L'' werden die Flächen F'' und F''' sich schneiden; nach einer Linie L''' die Flächen F''' und F'''' u. s. f. Diese Schnitte sind Erzeugungslinien jener Fläche, welche den von F' durchlaufenen Raum umgränzt.

Nun aber gehören die beiden Schnitte L' und L'' der Fläche F'' an, die beiden Schnitte L'' und L''' der Fläche F''' u. s. w. Waren nun die Flächen F', F'', F''' ... ꝛc. unendlich nahe auf einander folgende, so sind es auch die Linien L', L'', L''' ... ꝛc., dann aber begränzen L' und L'' ein Element der Fläche F'', die Linien L'' und L''' begränzen ein Element der Fläche F''' u. s. w. Dieselben Elemente gehören aber auch gleichzeitig der Gränzfläche an, woraus hervorgeht, daß diese die Fläche F in jeder ihrer Stellungen nach einer Linie L berühre und umhülle. Die Linien L' und L'', weil der Fläche F'' angehörig, werden sich auf dieser kreuzen oder schneiden, und wir wollen unterstellen, dies geschehe in einem Punkte P'. L'' und L''', als der Fläche F'' angehörig, werden sich in einem Punkte P'' durchkreuzen, welcher von P' verschieden ist, aber mit ihm der Linie L'' angehört und unendlich nahe auf ihn folgt. So giebt es ferner einen Durchschnittspunkt P''' der Linien L''' und L'''', welcher auf der Linie L''' unendlich nahe bei P'' liegt u. s. w. $P'\,P''\,P'''$ .... bilden nothwendig eine stetige krumme Linie, welche das Element zwischen P' und P'' mit L'' gemein hat, das Element zwischen P'' und P''' mit L''' u. s. f., welche also all' die Erzeugungslinien $L'\,L''\,L'''$ berührt und sich somit als eine Rückkehrkante der Umhüllungsfläche ausweist. Wir haben uns dieses Namens bedient, gelegenheitlich der aufwickelbaren Flächen, namentlich des

aufwickelbaren Helikoides, §. 181; doch wird sich bald zeigen, wie derselbe bezüglich aller Umhüllungsflächen zu rechtfertigen sei.

270. **Aufwickelbare Umhüllungsflächen.** Sobald F eine ebene Fläche ist, und $L', L'', L''' \ldots$ somit gerade Linien sind, entsteht als Umhüllung des Raumes, welchen F durchläuft, eine aufwickelbare Fläche, von welcher $P' P'' P''' \ldots$ ꝛc. die Rückkehrkante. Von der Bewegung einer Ebene an sich, oder vielmehr von den Bedingnissen dieser Bewegung, damit durch sie eine krumme Fläche die Entstehung erhalte, vermochten wir bis daher nur die eine hervorzuheben, daß der Ebene auferlegt ward, normal zu einer nicht ebenen krummen Linie zu bleiben; wir wollen darum noch auf andere Bedingungen von allgemeinem Charakter hinweisen, wodurch die stetige Bewegung einer Ebene vorgezeichnet werden kann; es geschieht solches dadurch, daß man der Ebene auferlegt, fortwährend zwei beliebige krumme Flächen zu berühren. Nichts Dunkles in der Sache zu lassen, wolle der Leser sich eine einzige krumme Fläche F' vergegenwärtigen und einen Punkt S außer ihr, beide in fester Stellung. Durch S werde eine Ebene tangirend an F' gelegt und ihr Berührungspunkt mit S durch eine gerade Linie verbunden. Indem man sofort die Ebene sich drehen läßt, sodaß sie, ohne S zu verlassen, fortwährend die Fläche F' berührt, so werden die Geraden, welche aus S nach den neu entstehenden Berührungspunkten gehen, als Erzeugungslinien einer Kegelfläche auftreten, deren Scheitel in S; die bewegliche Ebene bleibt fortwährend tangirend auch zur Kegelfläche, und diese erscheint als die Umhüllung des von der Ebene durchlaufenen Raumes. Nun werde außer F' noch eine zweite krumme Fläche F'' eingeführt, und die bewegliche Ebene soll während ihres Hingleitens auf F' einmal auch die Fläche F'' berühren; ihr Berührungspunkt mit F' heiße Q, jener mit F'' sei R. Damit ist aber die Bewegung der Ebene gehemmt, und um sie wieder zu ermöglichen, wollen wir ihr frei geben, den Punkt S zu verlassen, aber so fort zu gleiten, daß sie die Fläche F' fortwährend in einem Punkte Q, die Fläche F'' in einem Punkte R berühre. In unendlich nahe auf einander folgenden Stellungen der Ebene entstehen die geraden Durchschnitte L', L'', L''', deren jede eine gemeinsame Tangente ist an die Leitflächen F' und F''. Aber L' und L'', als einer Ebene angehörig, schneiden sich in P' und begränzen ein unendlich langes Flächenelement. Desgleichen werden L'' und L''' sich in einem Punkte P'' kreuzen, welcher auf L'' unendlich nahe bei P' liegt, und die Geraden begränzen ein zweites Element der aufwickelbaren Umhüllungsfläche, auf welcher von den Punkten $P', P'', P''' \ldots$

die Rückkehrkante gebildet wird. Aus den Punkten Q', Q'', Q''' ... ꝛc. bildet sich die Berührungslinie der aufwickelbaren Fläche und der Leitfläche F und aus den Punkten R', R'', R''' ... ꝛc. die Berührungslinie mit der Leitfläche F''.

271. *Fortsetzung.* Giebt man eine der zwei Leitflächen F' oder F'', nebst der ihrer Berührungslinie, als Erzeugungselemente der aufwickelbaren Umhüllungsfläche, dann ist diese bestimmt, ohne daß die andere Leitfläche in Mitthätigkeit gezogen würde, weil der beweglichen Ebene nur auferlegt werden darf, diese eine Leitfläche in einem Punkte der Berührungslinie zu tangiren, und sich dann immer tangirend um dieselbe zu bewegen, sodaß der Berührungspunkt die genannte Berührungslinie zu durchlaufen hat.

Wird überhaupt eine Leitfläche und auf oder in ihr eine krumme Linie K gegeben, und ward an irgend einem Punkte von K die tangirende Ebene konstruirt, so sind damit ganz allgemein die Erzeugungselemente einer aufwickelbaren Umhüllungsfläche aufgestellt, weil man die tangirende Ebene nur der Art in Bewegung zu setzen braucht, daß sie stets die Leitfläche berührt, während der Berührungspunkt immer auf der Linie K bleibt.

Wählen wir als ein Beispiel das windische Helikoid, Fig. *191*, §. 249, und auferlegen einer Ebene, sie solle sich der Art bewegen, daß sie das Helikoid stets in einem Punkte der Schraubenspiralen ($a\,b\,c\,\ldots$, $a'\,b'\,c'\ldots$) berührt, so ist für's Erste klar, daß eine aufwickelbare Fläche dadurch entstehen werde. Nach der weiteren Erwägung aber, daß jede der tangirenden Ebenen eine von den Tangenten der Spiralen enthält und mit der Horizontalebene einen unveränderlichen Winkel bildet, wird sich sofort der Schluß ergeben, daß die gegenseitigen Durchschnitte der unendlich nahe auf einander folgenden tangirenden Ebenen nichts Anderes sein können als wiederum die Tangenten der Schraubenspirale, und daß die entstandene Umhüllungsfläche ein aufwickelbares Helikoid sei, von welchem ($a\,b\,c\ldots$, $a'\,b'\,c'\ldots$) die Rückkehrkante.

272. Anstatt der zwei Leitflächen F' und F'' konnten auch die zwei Berührungslinien $P'\,P''\,P'''\ldots$, $Q'\,Q''\,Q'''\ldots$, überhaupt zwei beliebige krumme Linien L und Λ, als die Leitlinien einer aufwickelbaren Fläche, gegeben sein und wir wollen ausdrücklich unterstellen, daß dies zwei verschiedene, nicht ebene Kurven seien. Hier gestaltet sich die Frage also: es soll die Bewegung einer Ebene regulirt werden, daß sie stets zwei krumme Linien berührt, mit andern Worten, daß stets gleichzeitig eine Tangente der Linie L und eine Tangente der Linie Λ in ihr liegt. Dadurch nun ist folgendes

Benehmen angezeigt: ich wähle auf L' einen ersten beliebigen Punkt P' und bestimme hier die Tangente T' der Linie. Ich betrachte P' sofort als den Scheitel einer Kegelfläche, wovon Λ die Leitlinie. Angenommen jetzt, es ließe sich durch T' eine tangirende Ebene E' an die Kegelfläche legen (wir werden im nächsten Abschnitte diese Frage näher zu erörtern haben), so wird die Berührung in den Punkten einer geraden Erzeugungslinie der Kegelfläche stattfinden; diese Gerade wird die Leitlinie Λ in einem Punkte Q' kreuzen, und die Tangente t' von Λ in diesem Punkte wird gleichfalls in der Ebene E' liegen. Diese enthält somit gleichzeitig eine Tangente der ersten und eine Tangente der zweiten Leitlinie, ist also eine von den Erzeugungsebenen der zu bildenden aufwickelbaren Fläche, und die Gerade $P'\,Q'$ ist eine Erzeugungslinie derselben. Wird auf der Linie L ein Nachbarpunkt von P' genommen, welcher P'' heißen soll, hier die Tangente T'' gezogen, sodann P'' als Scheitel einer neuen Kegelfläche genommen, welche abermals Λ als Leitlinie hat, sodann durch T'' eine tangirende Ebene E'' an die zweite Kegelfläche gelegt, welche Λ in einem Punkte Q'' berührt, so ist E'' eine zweite Stellung der Erzeugungsebene, und $P''\,Q''$ eine zweite, der ersten benachbarte Erzeugungslinie der zu bildenden aufwickelbaren Fläche, welche aller Eigenthümlichkeiten ihrer Gattung theilhaft sein wird u. s. w.

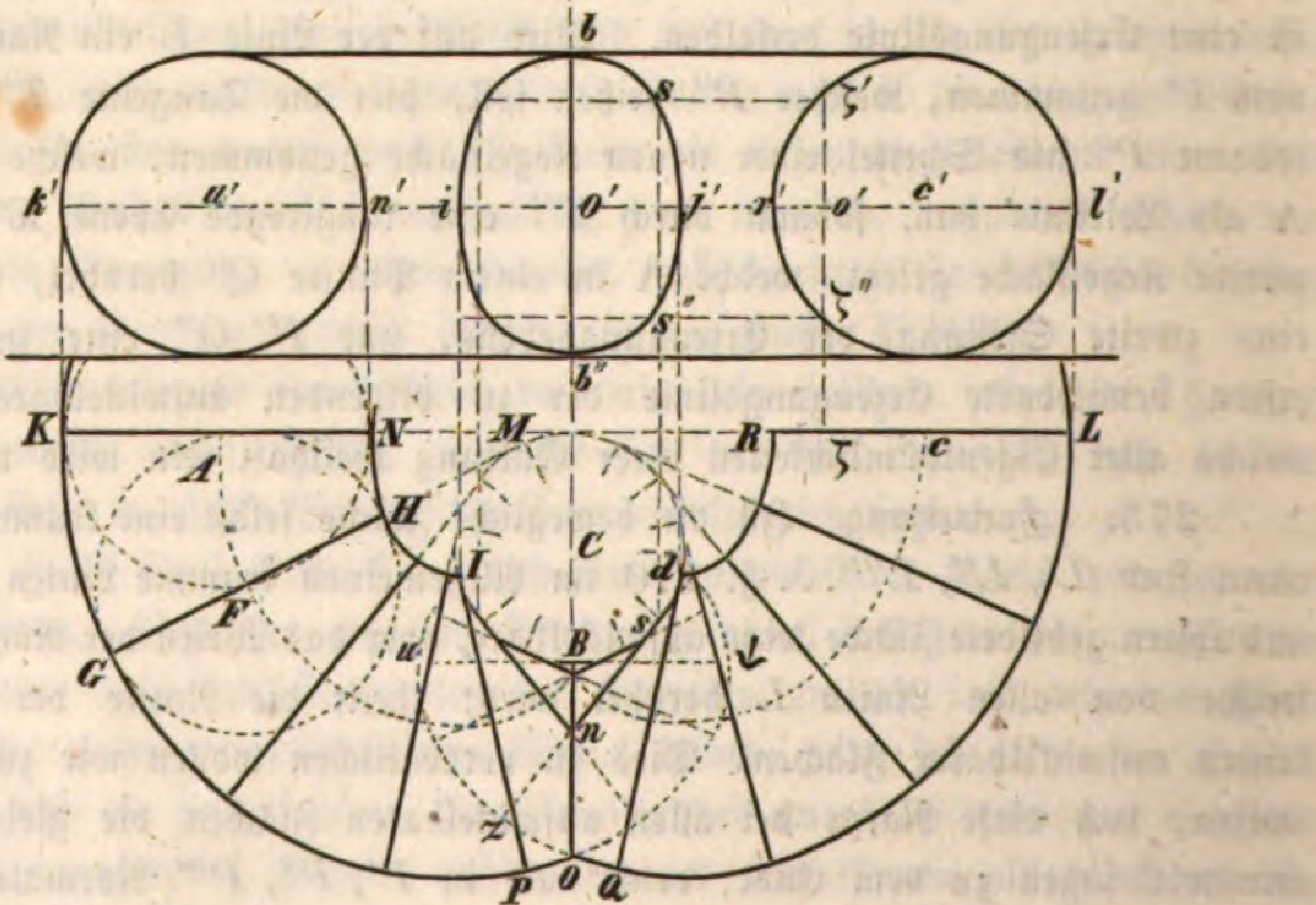
273. Fortsetzung. Ist die bewegliche Fläche selbst eine krumme Fläche, dann sind $L', L'', L''' \ldots$ §. 270 im Allgemeinen krumme Linien, und die aus ihnen gebildete Fläche keine aufwickelbare, aber das Wesen der Rückkehrkante, welche von allen Linien L berührt wird, theilt die Natur der Rückkehrkanten aufwickelbarer Flächen. Dies zu verdeutlichen wollen wir zuerst nachweisen, daß diese Natur bei allen aufwickelbaren Flächen die gleiche bleibt, und wir sagen zu dem Ende: denkt euch in P', P'', P''' Normalen $n', n'', n''' \ldots$ auf die Flächenelemente an diesen Orten errichtet. Diese Normalen bilden eine scheitrechte (aufwickelbare oder windische) Fläche, welche selbst normal zur aufwickelbaren Fläche steht. (Vergl. §. 264.) Aber die benachbarten Linien $L', L'', L''' \ldots$ liegen in der Regel auf einer und derselben Seite der Rückkehrkante, von welcher sie Tangenten sind, woraus folgt, daß die aufwickelbare Fläche nicht in die normale Fläche eindringen wird, und daß die beiden Netze der ersten an der Linie $P'\,P''\,P''' \ldots$ 2c. eine eigentliche Rückkehr oder Wiederkehr bilden.

274. Fortsetzung. Vergegenwärtigen wir uns fortwährend eine Umhüllungsfläche, welche nicht zu den aufwickelbaren gehört, und lassen wir eine Gerade tangirend auf ihrer Rückkehrkante hingleiten, dann wird diese Gerade in

jeder ihrer Stellungen auch Tangente sein an einem der Durchschnitte L' L'' L''', und in der Gesammtheit aller dieser Tangenten bildet sich wiederum eine aufwickelbare Fläche, welche mit der ersten Umhüllungsfläche nicht nur die gleiche Rückkehrkante hat, sondern an allen Punkten dieser Kante gleiche Flächenelemente. Daraus erhellt schließlich, daß auch die erste Umhüllungsfläche durch ihre Rückkehrkante in zwei Flächennetze getheilt werde, von gegenseitiger Beschaffenheit wie die Netze der aufwickelbaren Fläche.

275. Von Umhüllungsflächen nicht aufwickelbarer Natur führt uns Fig. 202 ein Beispiel vor. In der Horizontalebene $k' l'$, welche auch als

Fig. 202.



Projektionsebene angenommen werden mag, ist ein Kreis ($i' j'$, $J B I K$) gegeben, und seine Evolvente, §. 64 ($a' c'$, $A F B C$), deren Rückkehrpunkt in B. Eine Kugel vom Durchmesser ($K N$, $k' n'$) bewegt sich so, daß ihr Centrum (A, a') die Evolvente durchläuft. Wolle man indeß kein sonderliches Gewicht darauf legen, daß $A F B C$ eine Kreisevolvente sei, denn es würden nur Einzelheiten der Umhüllungsfläche sich ändern, wäre die Bahn des Kugelcentrums eine andere, in wagrechter Ebene liegende Kurve. Welches auch diese Bahn sei, es werden sich je zwei unendlich nahe auf einander folgende Kugelflächen oder Stellungen der beweglichen Kugel nach demjenigen ihrer größten Kreise schneiden, man könnte auch sagen berühren,

dessen Ebene auf der Bahn normal steht. Wird ein solcher Kreis für sich in Bewegung gesetzt, sodaß sein Centrum die Linie *A F B C ...* durchläuft und seine Ebene stets normal auf dieser Linie steht, dann erzeugt er dieselbe Fläche, wie vorhin die Kugel. — Handelte es sich nur um die Konturen *K G O Q L ..*, *N H I B J R*, so führte die Vorstellung einer beweglichen Kugel auf einfachem Wege zu deren Konstruktion; man hätte nämlich aus den Punkten *A*, *F* ... ꝛc. der Leitlinie Kreise vom Durchmesser *K N* zu beschreiben, und an diese Kreise die Konturen berührend zu ziehen. Wird dabei in Betracht genommen, daß die Kreise Umrisse der beweglichen Kugel sind, zugleich aber auch deren Schnitte durch die Horizontalebene $k' l'$, so erhellt, daß die Konturen *K G P ...*, *N H I ...* zugleich die Projektionen der Schnitte sind, welche in der Umhüllungsfläche durch die Ebene $k' l'$ hervorgebracht werden. — Dagegen ist es zur Erkenntniß der Eigenthümlichkeiten der Fläche förderlicher, dieselbe zu betrachten als erzeugt durch die Bewegung des Kreises *K N*. Weil nun die Tangenten des abgewickelten Kreises Normalen sind zur Abwickelungslinie oder Evolventen *A F B C ...*, hat man nur solche Tangenten wie *M F* zu ziehen, auf ihnen die Größe *A K* von *F* nach *G* und *H* zu tragen ꝛc., um damit Punkte für die Konturen *K G P* ψ *J*, *N H I B J R* zu erhalten, welche, wie dies klar daliegt, gleichfalls Evolventen des Kreises *M I B J* sind. Diesen Kreis betrachte man jetzt als Horizontalprojektion einer senkrecht stehenden Cylinderfläche und jede der Tangenten *M F ...* als Projektion einer unbegränzten Vertikalebene, welche den Cylinder tangirt, dann stellt der Berührungspunkt *M* die Projektion der vertikalen Berührungslinie des Cylinders und der Ebene vor. Setzt sich die Ebene in Bewegung, währenddem sie stets normal zur Kurve *A F B C* bleibt, so tangirt sie fortwährend auch die Cylinderfläche. Jede Vertikale dieser Fläche, wie z. B. *M*, erscheint als die Durchschnittslinie der Ebene *G F M* mit der unendlich nahe vorhergehenden oder nachfolgenden u. s. w., mit einem Worte, die Cylinderfläche erweist sich als die Umhüllung des von der Ebene durchlaufenen Raumes.

Folgt man der vom Kreise *K N* erzeugten Fläche in der Richtung von *A* gegen *F*, so trägt diese Fläche bis zum Punkte *I* nur den allgemeinen Charakter des Röhrenförmigen. *I* ist der Rückkehrpunkt der Evolventen *N H*, und hier wird die Projektion *I P* des beweglichen Kreises (nicht ihre Verlängerung) zur Tangente an *M B J*, und der Berührungspunkt projicirt sich auf die Vertikalebene nach i'; bei weiterem Fortschreiten berührt der Kreisumfang die Cylinderfläche in zwei Punkten, einem oberhalb der Ebene $k' l'$

und einem unterhalb dieser Ebene. Ist der Rückkehrpunkt B zugleich der Berührungspunkt des Cylinders und der Kreisebene $\mu.\psi$ geworden, dann haben die drei Berührungspunkte des Kreisumfanges und der Cylinderfläche, nämlich (B, b') und (B, b''), ihr Maximum von Höhe oder Tiefe in Bezug auf $k'l'$ erreicht, um sofort wieder sich zu nähern und bei (J, j) abermals in einen einzigen Punkte zusammen zu fallen. Die Projektionen (s, s') oder (s, s'') von zwischenliegenden Berührungspunkten zu erhalten, trage man den betreffenden Abstand $z\,s$ von l' nach o' und errichte hier eine Senkrechte, welche den Kreisumfang in ζ' oder ζ'' schneidet, und damit die Höhen von s' oder s'' bestimmt.

Ich behaupte nun, die Linie $(I B J, i' b' j' b'')$ sei die Rückkehrkante der Umhüllungsfläche. Dies zu erfassen bilde man sich folgende Vorstellung von ihrem Entstehen: die Kreisebene IP werde durch senkrechte Linien in unendlich schmale vertikale Streifen oder Elemente getheilt, jede Vertikallinie diene als Charnier, um durch Drehen um dies Charnier die Kreisebene nach und nach auf die Cylinderfläche zu rollen; dann wird, nachdem dies geschehen, der Kreisumfang mit der Linie $(I B J, i' b' j' b'')$ in Eins zusammengefallen sein. Diese Kurve wird also aus den Linienelementen der beweglichen Kreise gebildet, indem deren Umfänge sich der Reihe nach auf der erstgenannten Kurve durchschneiden; jeder Kreis berührt somit die Linie in den Punkten, welche er mit ihr gemein hat, solches aber sind die entscheidenden Merkmale einer Rückkehrkante. Sie theilt die Fläche in zwei oder eigentlich in vier Netze, getrennt durch eine eigenthümliche Linie, welche in der Vertikalebene des Rückkehrpunktes B liegt und durch die Axe C des senkrechten Cylinders geht. Zwei der Flächennetze sind äußere, die beiden anderen innere Theile des Ganzen. Den Umfang der inneren Theile erkennt man an den punktirten Linien.

Anmerkung. Die Vertikalprojektion der Fig. 202 wurde behandelt, als wenn die Fläche von der Seite KL sichtbar wäre.

276. Tangirende Ebene der Fläche. Während der Bewegung des Erzeugungskreises beschreibt ein jeder Punkt seines Umfanges eine Kreisabwicklungslinie gleich der Leitenden $AFBC$; es kreuzen sich darum in jedem Punkte der Umhüllungsfläche zwei bekannte Linien, nämlich ein Kreis und eine Kreisevolvente, und durch die Tangenten der zwei Linien an dem betrachteten Punkte ist die tangirende Ebene der Fläche bestimmt. Aber die Tangente der Evolventen steht immer senkrecht auf der Ebene des Erzeugungskreises, weshalb dies auch bei der tangirenden Ebene der Fall ist.

Aufgaben über tangirende Ebenen.

277. Während unseres nun beendigten Studiums einzelner Flächen-Familien haben wir das gegenseitige Verhalten dieser Flächen und ihrer berührenden Ebenen in's Auge gefaßt und erörtert, weil dies Verhalten mit zur Charakteristik der Familien und Arten gehörte. Es war dabei der Berührungspunkt in der Regel das Gegebene, und die Stellung der Ebene das Gesuchte; doch sind uns auch Fragen gegenüber getreten, welche auf die Betrachtung tangirender Ebenen führten, deren Berührungspunkt nicht unmittelbar gegeben, sondern dadurch bedingt war, daß die Ebene noch anderen Forderungen Genüge thun mußte, als z. B. durch Punkte außerhalb der krummen Fläche zu gehen, und andere mehr. Aufgaben dieser Art treffen sich beim Anwenden der darstellenden Geometrie auf graphische, überhaupt technische Fragen unter den mannichfaltigsten Formen, die jedoch, des Aeußerlichen entkleidet, immer darauf hinauslaufen, daß eine Ebene bestimmt werden soll, welche eine krumme Fläche tangirt, während sie zugleich durch einen oder den andern Punkt außerhalb der Fläche geht, oder während sie gewissen Richtungen parallel ist. Unter solcher abstrakter Form werden wir die Aufgabe auch in den folgenden §§. behandeln.

278. **Erste Aufgabe.** Es ist eine Cylinder- oder eine Kegelfläche gegeben, nebst einem Punkte außer ihr; man soll die berührende Ebene der Fläche bestimmen, welche durch den Punkt geht.

Determination der Aufgabe. Die Fläche wird durch eine Ebene längs einer ihrer geraden Erzeugungslinien berührt, sie kann alsdann immer berührend um die Fläche rollen, bis sie den außerhalb gegebenen Punkt erreicht, und in diesem Augenblick ist ihre Stellung festgesetzt.

a) Konstruktion für die Cylinderfläche.

Erstens: Durch den Punkt lege ich eine Hilfsebene, und bestimme den Durchschnitt derselben mit der Cylinderfläche. An den Schnitt ziehe ich aus dem gegebenen Punkte die Tangenten (es werden meist deren zwei möglich sein), bestimme einen jeden Berührungspunkt, führe durch denselben eine gerade Erzeugungslinie, lege schließlich durch jede Erzeugungslinie und ihre zugehörige Tangente eine Ebene.

Zweitens: In dem häufigsten Falle, wenn die Leitlinie der Cylinderfläche eine ebene Fläche ist, kann diese folgender Art mit zur Konstruktion gezogen werden. Durch den Punkt führe ich eine Gerade parallel zu den Erzeugungslinien der Cylinderfläche; ich bestimme den anderen Punkt, wo

diese Parallele die Ebene der Leitlinie trifft; von hier aus ziehe ich an die Leitlinie die Tangenten, bestimme einen jeden Berührungspunkt, führe durch denselben eine gerade Erzeugungslinie und lege durch Tangente und Erzeugungslinie eine Ebene.

279. b) Konstruktion für die Kegelfläche.

Die erste und allgemeinste Konstruktionsart ward bereits in dem vorigen „Erstens" ausgesprochen, wenn dort anstatt „Cylinderfläche" Kegelfläche gelesen wird.

In dem Falle einer ebenen Leitlinie der Kegelfläche gewährt es wiederum Vortheil, diese Ebene der Leitlinie mit zur Konstruktion zu ziehen, indem man den Punkt außerhalb mit dem Scheitel der Fläche durch eine Gerade verbindet, den Durchschnittspunkt der Geraden mit der Ebene der Leitlinie bestimmt, und aus ihm an die Leitlinie die Tangenten zieht, endlich durch jede Tangente und durch den Scheitel der Fläche eine Ebene legt.

280. Zweite Aufgabe. An eine Cylinder- oder Kegelfläche soll eine tangirende Ebene gelegt werden, welche einer gegebenen geraden Linie parallel ist.

a) Konstruktion für die Cylinderfläche.

Erstens: Durch die gegebene Gerade lege ich eine Hilfsebene, welche die Cylinderfläche schneidet; an den Schnitt ziehe ich die Tangenten, welche der gegebenen Geraden parallel sind. Ich bestimme den Berührungspunkt einer jeden und führe durch ihn eine gerade Erzeugungslinie: eine Ebene, durch die Erzeugungslinie und die entsprechende Tangente gelegt, ist die gesuchte.

Zweitens: Indem man die Ebene der Leitlinie zur Konstruktion benutzt, führe ich durch einen beliebigen Punkt der gegebenen Geraden eine Parallele zu den Erzeugungslinien der Cylinderfläche, lege durch beide eine Ebene, welche parallel sein wird mit der geforderten tangirenden. Ich bestimme deshalb den Durchschnitt dieser Ebene und jener der Leitlinie, ziehe an diese die Tangenten, welche dem Durchschnitte parallel sind, fixire deren Berührungspunkte, führe durch diese gerade Erzeugungslinien und lege durch jede derselben und die zugehörige Tangente eine Ebene.

281. b) Konstruktion für die Kegelfläche.

Wiederum läßt sich die unter „Erstens" für die Cylinderfläche gegebene Konstruktion allgemeinen Charakters buchstäblich auf die Kegelfläche in Anwendung bringen. Nur mag noch beigefügt werden, daß, wenn zwei Tangenten möglich sind, wie in den meisten Fällen, die beiden mittelst ihrer erhaltenen tangirenden Ebenen sich nach einer geraden Linie schneiden werden,

welche durch den Scheitel der Kegelfläche geht, und welche den beiden Tangenten parallel ist.

Diese Wahrnehmung leitet auf die

Zweite Konstruktion vermittelst der Ebene der Leitlinie. Nachdem man nämlich durch die Scheitel der Kegelfläche eine Parallele zu der gegebenen Geraden geführt, so muß diese jedenfalls der berührenden Ebene angehören. Man bestimmt deshalb den Durchschnittspunkt der Parallelen mit der Ebene der Leitlinie, zieht aus ihm die Tangenten an dieselbe, und legt durch jede der möglichen Tangenten und durch den Scheitel eine Ebene.

282. Eine Bemerkung. In den angegebenen Konstruktionen wird der Jünger unseres Lehrganges nichts gefunden haben, was er nicht sofort graphisch auszuführen vermöchte. Aber das Verständniß der Sache wird er sich durch einige mechanische Hilfsmittel wesentlich erleichtern. Diese Hilfsmittel bestehen in einem Modelle der Kegel- und Cylinderfläche, wenn auch nur aus altem Zeichenpapiere flüchtig zusammengeheftet, und einigen Stricknadeln zum Versinnlichen der geraden Linien, welche in Frage kommen. Im Uebrigen geben wir in den Fig. *203—206* ein Beispiel jeder Konstruktion, hauptsächlich gewisser Einzelheiten willen.

283. In den vier Figuren ward als Leitlinie der Cylinder- oder Kegelfläche eine Kurve angenommen, welche in der horizontalen Projektionsebene liegt, (p, p') ist der Punkt außerhalb der Fläche, durch welchen die tangirende Ebene gehen, und $(x\,y, x'\,y')$ ist die Gerade, zu welcher die Ebene parallel sein soll.

Fig. *203*. Durch (p, p') ward eine Parallele mit den Erzeugungslinien der Cylinderfläche gelegt, und ihre Durchschnitte (T, t'), (r, R') mit beiden Projektionsebenen bestimmt. Aus T zog man an die Ellipse $a\,k\,b$ die Tangenten $T\,Q$, $T\,S$, womit die Horizontalrisse der berührenden Ebene gewonnen waren. Nachdem die Berührungspunkte Q, S festgesetzt worden und durch sie die Erzeugungslinien $(Q\,h, q'\,H')$ ꝛc. gezogen, war die Konstruktion im engeren Sinne als vollendet zu betrachten. Man hat aber noch beigefügt: die Vertikalrisse $R'\,H'$, $Y\,R'\,V'$ der berührenden Ebenen, von welchen die letztgenannte als nicht wirklich vorhanden behandelt ward. Zweitens den Durchschnitt der Cylinderfläche und der Vertikalebene, welcher gebildet wird aus den Durchschnittspunkten der geraden Erzeugungslinien mit der Vertikalebene. Als besondere Punkte dieses Schnittes sind hervorzuheben — erstens (α, α'), (β, β'), gelegen auf jenen Erzeugungslinien, deren Horizontalprojektion $a\,\alpha$, $b\,\beta$ die geradlinigen Umrisse bilden. Werden diese

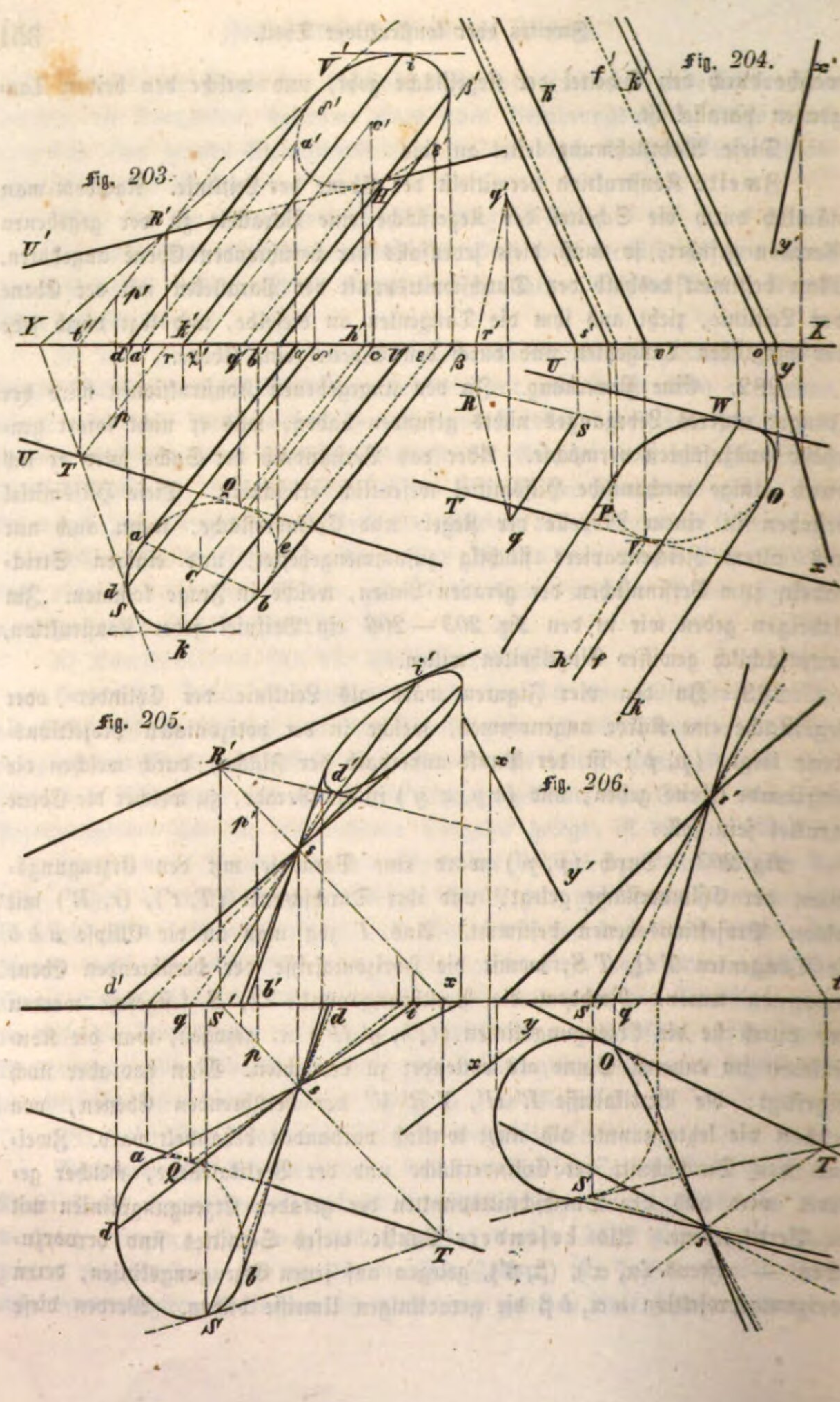


Fig. 203.

Fig. 204.

Fig. 205.

Fig. 206.

Geraden als die Projektionen berührender Ebenen der Cylinderfläche betrachtet, so erscheinen deren Vertikalrisse $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ als Tangenten des Schnittes in α' und β'. — Zweitens, die Punkte δ', ε' auf den Umrissen der Vertikalprojektion, beziehungsweise auf den Erzeugungslinien ($d\,\delta$, $d'\,\delta'$), ($e\,\varepsilon$, $e'\,\varepsilon'$), welche durch die Berührungspunkte d, e der Ellipse und jener auf $X\,Y$ senkrecht stehenden Tangenten gehen. — Drittens, der höchste und tiefste Punkt, auf jenen Geraden wie ($k\,i$, $k'\,i'$) liegend, an deren Fußpunkte k die Tangenten der Ellipse mit $X\,Y$ parallel laufen, weil diese Tangenten auch die Risse der tangirenden Ebene an k und i' sind.

Fig. 204. Die berührende Ebene der Cylinderfläche zu erhalten, welche zu ($x\,y$, $x'\,y'$) parallel ist, hat man durch einen beliebigen Punkt (q, q') die Gerade ($q\,S$, $q'\,s'$) parallel mit den Erzeugungslinien der Cylinderfläche gezogen; zweitens, die Gerade ($q\,R$, $q'\,r'$) parallel mit ($x\,y$, $x'\,y'$). Eine Ebene, durch beide Gerade gelegt, hat $R\,S$ als Horizontalriß und ist der geforderten Tangirenden parallel. $W\,U$, $V\,T$, die Tangenten der elliptischen Leitlinie, welche mit $R\,S$ parallel laufen, sind die Horizontalrisse der tangirenden Ebenen, welch' letztere völlig bestimmt erscheinen, sobald die Erzeugungslinien ($V\,h$, $v'\,h'$), ($W\,f$, $w'\,f''$) der Berührungspunkte V und W festgesetzt wurden.

Fig. 205. (p, p') ward mit dem Scheitel (s, s') der Kegelfläche durch die Gerade ($p\,s$, $p'\,s'$) verbunden, und deren Durchschnitte (t', T), (r, R') *) mit den Projektionsebenen verzeichnet. T gehört dem Horizontalriß der tangirenden Ebene an, welche keine anderen Risse haben kann als die Tangente $T\,Q$ oder $T\,S$. Die Berührungen Q, S wurden markirt und die Geraden ($Q\,s$, $q'\,s'$), ($S\,s$, $S'\,s'$) gezeichnet, welche die Vertikalebene in (i, i') und (d, d') schneiden, wodurch die Vertikalrisse $R'\,i'$, $R'\,d'$ der berührenden Ebenen festgesetzt waren. Von den zwei Ebenen ward wiederum diejenige, welche dem einen Berührungspunkte S entspricht, als nicht wirklich vorhanden angenommen. Die Vertikalrisse $R'\,i'$, $R'\,d'$ berühren in i' und d' den Durchschnitt der Kegelfläche und der vertikalen Projektionsebene, dessen besondere Punkte ganz entsprechend, wie oben bezüglich auf Fig. 203 erklärt, ausgewählt und bestimmt worden sind.

---

*) An der Grundlinie von Fig. 205 wolle für x die Bezeichnung t' gesetzt, und rechts neben S' unter R' das Zeichen r beigefügt werden. Für O in Fig. 206 setze man Q.

Fig. 206 unterscheidet sich von *Fig.* 205 wol im anfänglichen Entwurfe, aber nur wenig nach beendeter Ausführung. Durch den Scheitel (s, s') ward $(s\,T, s'\,t')$ parallel zu $(x\,y, x'\,y')$ gelegt, der Durchschnitt (T, t') mit der Horizontalebene festgesetzt und durch T die Tangenten $T\,Q$, $T\,S$ an die Leitlinie der Kegelfläche gezogen. Diese sind die Risse der zwei Ebenen, welche parallel zu $(x\,y, x'\,y')$ tangirend an die Kegelfläche gelegt werden können und deren Lage im Raume durch diese Risse und den Scheitel (s, s') festgesetzt wird. Die Geraden $(Q\,s;\ q'\,s')$, $(S\,s, S'\,s')$, welche die Berührungspunkte Q, S mit dem Scheitel der Kegelfläche verbinden, sind die Berührungslinien der Kegelfläche und beider tangirenden Ebenen.

Anmerkung. Auch für den Fall, daß eine Kurve L von doppelter Krümmung als Leitlinie einer Kegel- oder Cylinderfläche gegeben wäre, an welche durch einen Punkt außerhalb eine tangirende Ebene gelegt werden soll, ließe sich eine direkte Konstruktion denken, ohne nämlich der Fläche vorerst eine ebene Leitlinie zu geben. Nachdem die Gerade G festgesetzt worden, welche den Punkt außerhalb mit dem Scheitel der Kegelfläche verbindet (oder welche durch den Punkt parallel mit den Geraden der Cylinderfläche geht), handelt es sich darum, den Punkt T zu bestimmen, wo G die aufwickelbare Fläche schneidet, von welcher L die Rückkehrkante ist und welche aus den sämmtlichen Tangenten der Kurve L gebildet wird. Ist dies geschehen, so hat man aus T die möglichen Tangenten an L zu ziehen u. s. w. T aber muß in dem Schnitte liegen, welchen eine beliebige durch G gelegte Ebene in der aufwickelbaren Fläche hervorbringt. — Diese Bemerkung mag auch zum Vervollständigen der Erörterungen von §. 273 dienen.

284. Dritte Aufgabe. Es ist eine beliebige aufwickelbare Fläche gegeben und ein Punkt außer ihr; durch ihn soll eine tangirende Ebene an die Fläche gelegt werden.

Die Konstruktion unterscheidet sich kaum von derjenigen, welche wir für die erste Aufgabe als der formell allgemeinsten gegeben. Es bleibt nämlich durch den Punkt eine Ebene zu legen, welche die aufwickelbare Fläche schneidet, und an den Schnitt aus dem Punkte die Tangenten zu ziehen. Diese nebst den geraden Erzeugungslinien der Berührungspunkte bestimmen die geforderte Ebene. Man wird nun leicht entnehmen, wie die allgemeine Konstruktion unserer zweiten Aufgabe auf irgend eine aufwickelbare Fläche anzupassen sei.

285. Vierte Aufgabe. Es ist irgend eine Umdrehungsfläche

gegeben und eine Gerade außer ihr; durch diese soll eine Ebene berührend an die Fläche gelegt werden.

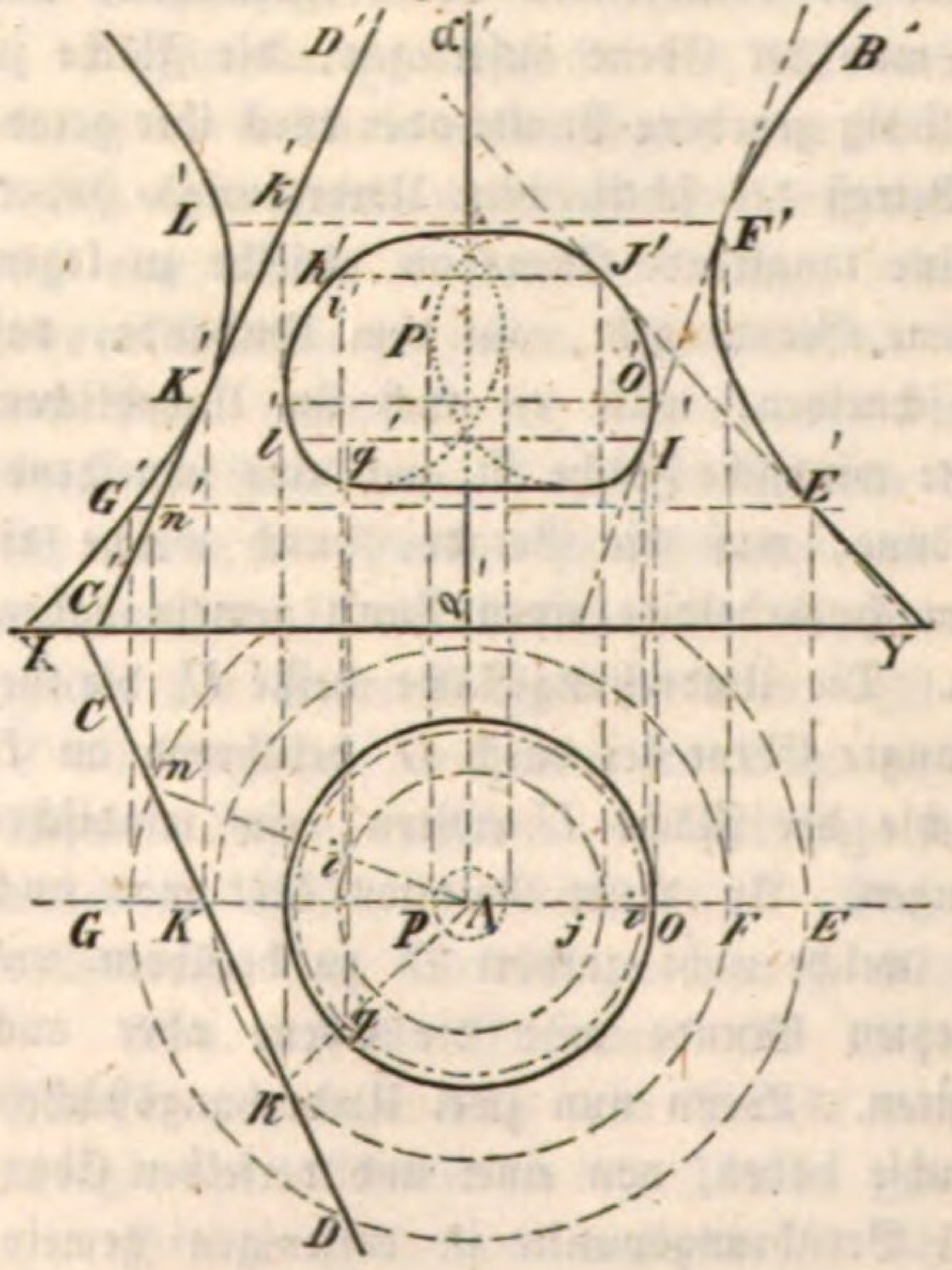
Determination der Aufgabe. Man denkt sich durch die Gerade irgend eine Ebene gelegt, läßt diese um die Gerade als Achse rotiren, bis sie einmal die Umdrehungsfläche berührt. In diesem Augenblicke befindet die Ebene sich in der begehrten Stellung. Dieser Nachweis über die Möglichkeit der Konstruktion bezieht sich keineswegs auf diejenigen Umdrehungsflächen, welche zu den scheitrechten gehören. Was namentlich Umdrehungscylinder oder Kegelflächen betrifft, so genügt hier schon ein Punkt außerhalb der Fläche, um die Stellung einer sie berührenden Ebene festzusetzen, und es wäre zu viel verlangt, wollte man der Ebene auferlegen, die Fläche zu berühren und noch durch zwei beliebig gegebene Punkte oder durch ihre gerade Verbindungslinie zu gehen. In Betreff des scheitrechten Umdrehungs-Hyperboloides beruht die Möglichkeit, eine tangirende Ebene an dieselbe zu legen, welche durch eine außerhalb gegebene Gerade geht, auf dem Umstande, daß die Gerade und die Fläche sich schneiden, wäre es auch im Unendlichen, denn jede tangirende Ebene an eine windische Fläche ist auch eine schneidende Ebene, und damit sie dies sein könne, muß die Gerade, durch welche die Ebene gelegt werden soll, mit dem Hyperboloide einen Punkt gemein haben.

286. Erste Konstruktion. Die Umdrehungsfläche heiße *U*, die Gerade *G*. Angenommen, die verlangte Ebene sei durch *G* berührend an *U* gelegt. Man läßt *G* nun die Achse der Fläche *U* rotiren, ein windisches Umdrehungs-Hyperboloid zu erzeugen. An dieser Rotation läßt man auch die tangirende Ebene theilnehmen, welche nicht aufhört *U* zu berühren und durch *D* zu gehen. Aus dem letzten Grunde wird die Ebene aber auch fortwährend das Hyperboloid tangiren. Wenn nun zwei Umdrehungsflächen, welche eine gemeinsame Rotationsachse haben, von einer und derselben Ebene tangirt werden, so liegen die zwei Berührungspunkte in derjenigen gemeinsamen Meridianebene beider Flächen, welche auf der berührenden Ebene senkrecht steht; diese Ebene schneidet jede der zwei Flächen nach einem Meridiane, sowie die tangirende Ebene nach einer Geraden, welche die gemeinsame Tangente der zwei Meridiane sein muß. Man konstruirt daher den Hauptmeridian der Fläche *U* (im Fall er nicht schon gegeben sein sollte), sowie den Hauptmeridian des Hyperboloides; man zieht an beide Meridiane eine gemeinsame Tangente und bestimmt deren Berührungspunkte. Diese Punkte gehören zwei Parallelkreisen an, einem der Fläche *U* und einem des

Hyperboloides, auf welchen die Berührungspunkte der gesuchten tangirenden Ebene liegen müssen. Weil aber der Berührungspunkt des Hyperboloides auch der Geraden G angehört, so liegt er im Kreuzungsorte dieser Geraden und des Parallelkreises, und mit ihm ist auch der andere Berührungspunkt festgesetzt, weil er in der gleichen Meridianebene enthalten sein muß und sein Parallelkreis bekannt ist.

287. Ausführung, Fig. 207. ($A, \alpha' \alpha'$) die Rotationsachse. In der Hauptmeridianebene GE ist eine Ellipse ($O' P' J', O P$) mit schiefliegender großer Achse gegeben, welche durch ihre Umdrehung ein Melonoid (§. 149) erzeugt; ($CD, C' D'$) die gerade Linie, durch welche eine tangirende Ebene an diese Rotationsfläche zu legen ist. ($B' F' E' \ldots, G' K' L' \ldots, G E$) Hauptmeridian des von ($CD, C' D'$) erzeugten Hyperboloides (§. 107). Man zeichnet die gemeinsamen Tangenten $E' J'$, $F' I'$ der beiden Hauptmeridiane und bestimme deren Berührungspunkte $E' F'$, $J' I'$ *), welche sich herab nach E, F, j, i projiciren.

Fig. 207.



Linker Hand hätten noch zwei gemeinsame Tangenten der beiden Hauptmeridiane gezogen werden können; sie würden mit je einer der zwei ersten symmetrisch liegen, bezüglich der Geraden $\alpha' \alpha'$, und im Uebrigen die gleichen Ergebnisse zu Tage fördern, wie jene ersten. — Aus dem Umstande, daß auf einer Seite zwei gemeinsame Tangenten der beiden Hauptmeridiane möglich sind, ist zu schließen,

---

*) Bei der Hyperbel gleichwie bei der Ellipse bestimmt sich der Berührungspunkt mit einer Tangente dadurch, daß man zwei der Tangente parallele Sehnen der Kurve halbirt und ihre Mitten verbindet; die Verbindungslinie ist ein Durchmesser, welcher durch den Berührungspunkt abschneidet. Vergl. §. 171.

daß unsere Aufgabe eine doppelte Lösung zulasse, daß nämlich durch die Gerade $(CD, C'D')$ zwei tangirende Ebenen an das Melonoid gelegt werden können, was übrigens schon der Anblick der Figur lehrte.

Nun ist die erste Tangente $E'J'$ zu betrachten, einmal als die Projektion der rotirenden Geraden $(CD, C'D')$, in dem Augenblicke erfaßt, als sie die Hauptmeridianebene in E' durchschneidet. (Ihre Horizontalprojektion, worauf übrigens nichts weiter ankommt, wäre eine aus E' an die Projektion des Kreises O gezogene Tangente, §. 111.) — Zweites ist $E'J'$ zu nehmen als die Projektion einer gemeinsamen tangirenden Ebene des Hyperboloides sowol wie der gegebenen Umdrehungsfläche (des Melonoides). — Man zeichne die Parallelkreise, welche von den Punkten (E', E) und (J', j) beschrieben werden, und deren erster dem Hyperboloid, der andere dem Melonoid angehört; ihre Vertikalprojektionen sind die Wagrechten $E'G'$, $J'h'$, ihre Horizontalprojektionen die Kreise, mit den Radien AE und Aj beschrieben. Nun soll die Gerade eine volle Umdrehung bis wieder in ihre ursprüngliche Stellung $(CD, C'D')$ gemacht und dabei die gemeinschaftliche tangirende Ebene beider Umdrehungsflächen mitgeführt haben, so wird der Berührungspunkt mit dem Hyperboloide nach (n, n') kommen, also der Meridianebene An angehören, welche den Parallelkreis des Punktes (J', j') in (i, i') schneidet, und dies ist der Berührungspunkt der ersten Ebene, welche durch $(CD, C'D')$ tangirend an die gegebene Umdrehungsfläche gelegt werden kann. Eine Gerade aber und ein Punkt außer ihr bestimmen die Ebene.

Was die Tangente $F'I'$ anbetrifft, so liefert sie zwei Parallelkreise der Umdrehungsflächen, deren Vertikalprojektionen die Gerade $F'L'$ und $I'l'$ sind, und deren Horizontalprojektionen die Kreise mit den Radien AF, Ai beschrieben. Der Erste schneidet $(CD, C'D')$ in (k, k') und die Meridianebene Ak kreuzt den zweiten Parallelkreis in (g, g'), dem Berührungspunkte der zweiten tangirenden Ebene, welche durch $(CD, C'D')$ an die gegebene Umdrehungsfläche gelegt werden kann.

288. Zweite Konstruktion. Man denkt sich vorerst, die Aufgabe sei gelöst, und man habe die verlangte Ebene durch die Gerade G tangirend an die Fläche U gelegt, auch deren Berührungspunkt P festgesetzt. Auf der Geraden G wählt man sofort irgend einen Punkt Q und verbindet ihn mit P durch eine Gerade E, welche eine Tangente an U sein wird und P ihr Berührungspunkt mit der Fläche. Dies E gleitet nun stets tangirend

um die Fläche U und ohne dabei den Punkt Q zu verlassen. Dadurch erzeugt die Gerade eine Kegelfläche, welche die Fläche U umhüllt und berührt; der Berührungspunkt P hat die Berührungslinie beider Flächen beschrieben, und endlich ist die Ebene, welche durch G berührend an die Umdrehungsfläche U gelegt ward, auch eine tangirende Ebene der Kegelfläche und berührt sie nach der Geraden E, der Verbindungslinie von Q und P.

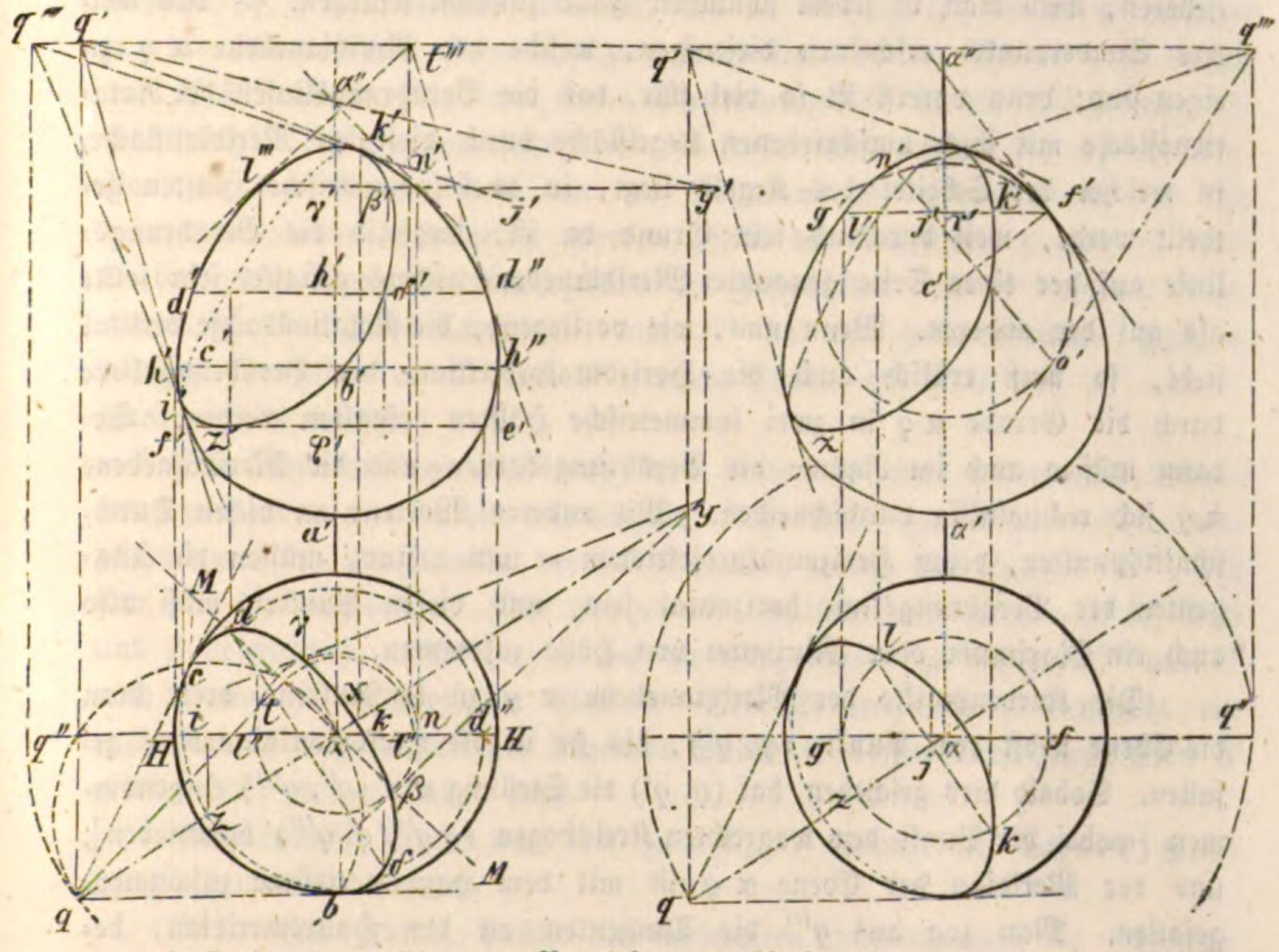
Q war aber ein ganz beliebiger Punkt auf G; wenn man daher sich vorstellt, Q bewege sich längs dieser Geraden, bleibe aber fortwährend der Scheitel einer die Umdrehungsfläche umhüllenden und berührenden Kegelfläche, so wird diese bewegliche und zugleich auch veränderliche Kegelfläche stets von der Ebene berührt werden, welche durch G tangirend an U gelegt ist. Diese Fläche selbst wird von der Kegelfläche immer nach einer krummen Linie berührt, welche durch P geht. Hat man daher außer dem Punkte Q auf der Geraden G noch einen zweiten Punkt R genommen, beide Punkte als die Scheitel zweier um die Fläche U beschriebenen Kegelflächen, und hat man die zwei Berührungslinien dieser Flächen konstruirt, so werden diese Berührungslinien auf der Fläche U sich in dem gesuchten Berührungspunkte P kreuzen.

289. Fortsetzung. Was die Konstruktion einer Kegelfläche betrifft, deren Scheitel ein gegebener Punkt S, und welche von einer krummen Fläche F umschrieben ist, so ward bereits §. 260 hingewiesen, wie dies zu bewerkstelligen sei, indem man durch S eine Reihe von Ebenen legt, welche die Fläche F schneiden, und daß man an die entstandenen Schnitte aus S Tangenten zieht. Diese Tangenten sind Erzeugungslinien und ihre Berührungspunkte gehören zur Berührungslinie der Fläche F und ihrer umschriebenen Kegelfläche. — Eine Vorstellung derselben Kegelfläche wird aber auch gewonnen, indem man sich aus S eine beliebige tangirende Ebene an F gelegt denkt und diese Ebene fortwährend tangirend um die Fläche gleiten läßt, ohne daß sie aufhört durch S zu gehen. Die auf einander folgenden Durchschnitte der Ebene sind gerade Erzeugungslinien der Kegelfläche, und die Bahn des Berührungspunktes auf der Fläche F ist die Berührungslinie dieser Kegelfläche mit der Fläche F. — Auf die Umdrehungsflächen läßt sich diese letzte Anschauungsweise mit Vortheil anwenden, wie solches eine Erörterung der Fig. *208* und folgender lehren wird.

290. Konstruktion tangirender Kegelflächen an Umdrehungsflächen.

Eine Rotationsfläche ist gegeben durch ihren Hauptmeridian $d'' e' f' l'$, welcher in der Ebene HH liegt, und durch ihre Achse $(\alpha, \alpha' \alpha')$. (q, q') ist ein Punkt außerhalb der Fläche, welcher als Scheitel einer ihr umschriebenen Kegelfläche zu nehmen, und deren Berührungslinie $(k \beta z \gamma, \beta' \delta' z' \gamma')$ konstruirt werden soll.

Fig. 208. Fig. 209.



a) Sonderpunkte der Berührungslinie.

Nachdem der Kreis vom Durchmesser HH oder $h' h''$ gezeichnet war, welcher den Umriß der Horizontalprojektion vorstellt, zog man aus q an den Kreis die Tangenten $q b$, $q c$ und betrachtete sie als die Projektionen jener zwei tangirenden Ebenen der Umdrehungsfläche, welche durch (q, q') gehen und auf der Horizontalebene senkrecht stehen; man projicirte die Berührungspunkte auf die Wagrechte $h' h''$ nach b', c', wodurch zwei erste Punkte (b, b'), (c, c') der Berührungslinie gefunden waren. — Sodann zog man aus q' die Tangenten $q' i'$, $q' k'$ an die Linie $d' e' f' l'$, als dem Umrisse der Vertikalprojektion, und betrachtete sie als Projektionen

zweier durch (q, q') gehenden tangirenden Ebenen der Umdrehungsfläche, welche senkrecht stehen auf der vertikalen Projektionsebene, oder, was hier gleichbedeutend ist, senkrecht auf der Hauptmeridianebene. Man projicirte demzufolge die Berührungspunkte i', k' auf HH nach i, k, und hatte somit zwei weitere Punkte (i, i'), (k, k') der Berührungslinie. — Diese vier Sonderpunkte, deren Projektionen paarweise den Umrissen der Fläche angehören, wird man in jedem ähnlichen Falle zunächst festsetzen. — Als weitere Sonderpunkte erscheinen diejenigen, welche der Meridianebene $\alpha\, q$ zu eigen sind; denn vorerst ist so viel klar, daß die Berührungslinien der Rotationsfläche mit ihrer umschriebenen Kegelfläche durch diejenige Meridianfläche, in welcher der Scheitel des Kegels liegt, in zwei symmetrische Hälften getheilt werde, weil durchaus kein Grund da ist, weshalb die Berührungslinie auf der einen Seite genannter Meridianebene anders gestaltet sein sollte als auf der anderen. Wenn nun, wie vorliegend, die Rotationsachse vertikal steht, so muß erstlich auch die Horizontalprojektion der Berührungslinie durch die Gerade $\alpha\, q$ in zwei symmetrische Hälften gespalten werden. Sodann müssen auch im Raume die Berührungskurven und die Meridianebene $\alpha\, q$ sich rechtwinklig durchschneiden. Mit anderen Worten: an diesen Durchschnittspunkten, deren Horizontalprojektionen x und z sind, müssen die Tangenten der Berührungslinie horizontal sein, und diesen Punkten muß also auch ein Maximum oder Minimum von Höhe zukommen.

Die Kurvenpunkte der Meridianebene $\alpha\, q$ zu konstruiren, dreht man die Ebene nebst dem Punkte (q, q'), bis sie in die Hauptmeridianebene gefallen. Sobald dies geschehen, hat (q, q') die Stellung von (q'', q''') eingenommen [wobei der Punkt den wagrechten Kreisbogen $(q\, q'', q'\, q''')$ beschrieben], und der Meridian der Ebene $\alpha\, q$ ist mit dem Hauptmeridiane zusammengefallen. Man zog aus q''' die Tangenten an den Hauptmeridian, bestimmte deren Berührungspunkte f' (der andere nahe bei k' konnte nicht mehr bezeichnet werden), und beschrieb endlich in beiden Projektionen die Parallelkreise, welchen die Berührungspunkte angehören. Auf diesen Parallelkreisen bewegen sich die Berührungspunkte, wenn ihre Ebene wieder in die Stellung $\alpha\, q$ zurückgebracht wird; sie projiciren sich, nachdem solches geschehen, nach x, z, von wo sie auf die entsprechenden Horizontalen nach z' rc. zu bringen sind.

291. b) Zwischenpunkte.

Erstlich in bestimmten Meridianebenen. — Geringes Ueberlegen wird erkennen lehren, wie die Bestimmung der Berührungspunkte k', i' lediglich

dadurch bedingt gewesen, daß q' als die Projektion des Scheitels der Kegelfläche in der Meridianebene HH zu betrachten war, und wirklich giebt jener Vorgang ein bequemes Verfahren an die Hand, Punkte der Berührungslinie zu bestimmen, welche irgend einer bezeichneten Meridianebene angehören. Man verlangt z. B. die Punkte (d, d'), (β, β') in der Meridianebene MM. Ich betrachte MM als eine vertikale Projektionsebene und projicire den Scheitel (q, q') in dieselbe, dadurch, daß ich aus (q, q') einen Perpendikel auf die Ebene fälle. Seine Horizontalprojektion ist die Gerade qt, welche auf MM senkrecht steht, und seine Vertikalprojektion ist die Horizontale des Punktes q'. Als Horizontalprojektion des Fußpunktes ergiebt sich der Punkt t. Nachdem die Ebene MM um die Rotationsachse gedreht und in die Hauptmeridianebene umgelegt worden, fällt die Projektion t nach t'' und die ihr entsprechende Vertikalprojektion des Fußpunktes nach t''' auf der Wagrechten $q'\,t'''$. Zwei Tangenten, aus t''' an den Hauptmeridian gezogen, berühren denselben in d''' und l''', welche Punkte auf HH nach d'' und l'' herabprojicirt werden.

Die Meridianebene HH nebst den beiden so eben bestimmten Berührungspunkten wieder in die ursprüngliche Lage MM zurück zu drehen, verzeichnet man die Projektionen der Parallelkreise, welche den Punkten (d''', d'') und (l''', l'') entsprechen. Ihre Horizontalprojektionen werden von MM in d und β geschnitten, welche Punkte auf die Wagrechten der Punkte d''' und l'' nach d' und β' zu projiciren bleiben. Dem Kurvenpunkte d entspricht ein bezüglich auf αq symmetrisch liegender Punkt δ, dessen Vertikalprojektion δ' gleiche Höhe mit d' haben muß.

Gleicherweise könnte noch der zu (β', β) symmetrisch liegende Punkt (γ, γ') gewonnen werden.

291. Zweitens, Punkte auf bestimmten Parallelkreisen. — Als Beispiel werde der Parallelkreis des Punktes (n, n') auf dem Hauptmeridian gewählt. — Man konstruire in n' die Tangente des Hauptmeridians, welche die Drehungsachse in α'' schneidet. Indem die Tangente mit sammt dem Hauptmeridiane um die Achse $(\alpha, \alpha'\,\alpha')$ rotirt, erzeugt sie eine Kegelfläche, welche die Umdrehungsfläche umhüllt und längs des durch (n, n') gehenden Parallelkreises berührt. Eine jede tangirende Ebene an die Kegelfläche berührt auch die Umdrehungsfläche, da nämlich, wo die gerade Berührungslinie der beiden ersten den Parallelkreis $(n'\,l', n\,\beta\,\gamma)$ durchkreuzt. — Man legt daher durch (q, q') eine solche Ebene berührend an die Hilfskegelfläche. Zu diesem Zwecke verbindet man (q, q') mit (α, α'') durch eine Gerade, welche

die Ebene des Parallelkreises in (y', y) schneidet. Zwei Tangenten, aus (y, y') an den Kreis gezogen, berühren ihn in den gesuchten Punkten (β, β'), (γ, γ').

Man wird erkennen, daß die Bestimmungsweise der Punkte (b, b'), (c, c'), §. 190, auf einer verwandten Vorstellung beruht; nur handelte es sich bei ihnen um Punkte, welche auf dem größten Parallelkreise liegen, und bei diesem ist die umschriebene Kegelfläche zur Cylinderfläche geworden, welche von den zwei Vertikalebenen $q\,b$, $q\,c$ tangirt wird.

292. Fortsetzung. Punkte, einem Parallelkreis angehörig, findet man auch noch vermittelst einer in die Umdrehungsfläche eingeschriebenen Kugel, welche sie nach einem Parallelkreise berührt. Den hierauf bezüglichen Konstruktionen ist die Fig. *209* gewidmet, welche ihrer Anlage nach lediglich als eine Wiederholung von Fig. *204* betrachtet werden wolle. — In dem Punkte (f', f) des Hauptmeridians hat man an denselben eine Tangente $f''\,\alpha''$ gezogen, und auch eine Normale $f'\,c'$, welche die Rotationsachse in (α, c') schneidet; mit $c'\,f'$ als Radius beschrieb man in der Meridianebene einen Kreis, welcher den Meridian in f' und g' berühren muß. Wird nun der Meridian sammt dem Kreise in Rotation um die Achse $(\alpha, \alpha'\,\alpha'')$ gesetzt, so erzeugt ersterer die Umdrehungsfläche, und letzterer eine Kugel, welche beide sich selbst nach dem Parallelkreise $(f'\,g', f\,h\,g)$ berühren. Eine jede tangirende Ebene der Kugel, deren Berührungspunkt dem Parallelkreise angehört, ist auch tangirend an die Umdrehungsfläche. Man umschreibe, aus (q, q') als Scheitel, der Kugel eine Kegelfläche. — Beide Flächen werden sich nach einem Kreise berühren, dessen Ebene auf der Geraden $(q\,\alpha, q'\,c')$ senkrecht steht, und eine jede tangirende Ebene dieser Kegelfläche berührt auch die Kugel in einem Punkte des genannten Kreises, so wie umgekehrt eine jede tangirende Ebene der Kugel, deren Berührungspunkt auf dem Kreise liegt, auch durch den Scheitel des Kegels geht. Bestimmt man somit die Durchschnittspunkte (k, k'), (l, l') des in Rede stehenden Kreises und des Parallelkreises, so hat man damit zwei Zwischenpunkte der Berührungslinie $(k\,z\,l, k'\,z'\,l')$ gefunden.

Graphische Ausführung hiervon. Durch (q, q') eine Meridianebene $\alpha\,q$ gelegt, diese mit sammt dem Punkte (q, q') um die Rotationsachse gedreht und in die Hauptmeridianebene umgelegt, wodurch (q, q') nach (q'', q''') fällt. Aus q''' an den Kreis $f'\,o'\,g'$ die Tangenten $q'''\,o'$, $q'''\,n'$ gezogen, und ihre Berührungspunkte durch die Gerade $o'\,n'$ verbunden. Dies ist die Projektion der Berührungslinie des Kegels, dessen Spitze in

(q'', q''') und der Kugel; der Kreuzungspunkt j' ist die gemeinsame Projektion beider Durchschnittspunkte der Kreise $f' g'$, $o' n'$. — Die Ebene $\alpha q''$ wieder in die Stellung αq zurückgebracht und die fraglichen Kreuzungspunkte mitgeführt. Hierzu den Abstand $r' j'$ auf αq von α nach j getragen und $k j l$ senkrecht auf αq gezogen. Dies ist die Projektion der Durchschnittslinie beider in Rede stehenden Kreisebenen bei deren richtiger Stellung, womit (k, k') und (l, l') bestimmt sind.

293. **Fortsetzung.** War (q, q') ein Punkt auf irgend einer geraden Linie G, durch welche an die Umdrehungsfläche der Fig. *208* oder *209* eine tangirende Ebene gelegt werden sollte, so mußte jetzt auf dieser Geraden ein zweiter Punkt gewählt werden als Scheitel einer zweiten, der Rotationsfläche umschriebenen Kegelfläche, und es mußten nach einer der beschriebenen Methoden die Berührungslinien auch dieser zweiten Kegelfläche konstruirt werden. Ein Kreuzungspunkt beider Kurven mußte der gesuchte Berührungspunkt der tangirenden Ebene sein. Damit ein solcher Kreuzungspunkt praktisch sicher bestimmt sei, ist es erforderlich, daß die zwei Berührungslinien sich nahezu rechtwinklig durchschneiden, und dies Letztere erheischt seinerseits eine große Entfernung der Scheitel beider umschriebenen Kegelflächen, was hinwieder praktische Unbequemlichkeiten herbeiführt. Dies aber wird aufgehoben, sobald man auf das Aeußerste geht und den Scheitel der einen Kegelfläche auf der gegebenen Geraden G in unendlicher Entfernung von der Rotationsachse annimmt, denn dadurch verwandelt sich die Kegelfläche in eine Cylinderfläche, deren gerade Erzeugungslinien der Geraden G parallel sind. Es läßt sich mit Recht vermuthen, daß die Konstruktion der Berührungslinie einer Umdrehungsfläche und einer ihr umschriebenen Cylinderfläche auf ähnlichen Anschauungen beruhen werde, wie die Konstruktion der Berührungslinien umschriebener Kegelflächen.

294. **Umdrehungsflächen und umschriebene Cylinderflächen, deren Erzeugungslinien einer bestimmten Geraden G parallel sind.**

Die Linie wird hervorgebracht durch eine Ebene, welche die Fläche berührt, indem sie der Geraden G parallel ist, und welche sich tangirend um die Fläche herumbewegt, während sie fortwährend zu G parallel bleibt. Der Berührungspunkt der Ebene hat bei solcher Bewegung der Ebene die gesuchte Berührungslinie beschrieben und es giebt keine andere tangirende Ebene der Umdrehungsfläche, welche der gegebenen Geraden parallel läge und deren Berührungspunkt außerhalb jener Berührungslinie sich befände.

Erste allgemeine Bestimmungsart einzelner Punkte. — Man projicirt die Gerade G in irgend eine Meridianebene und zieht an den Meridian jene Tangenten, welche der erhaltenen Projektion von G parallel sind. Ihre Berührungspunkte gehören zu den Gesuchten, weil die Tangenten betrachtet werden dürfen als tangirende Ebenen der Umdrehungsfläche, welche auf der Meridianebene senkrecht stehen, während sie zu G parallel sind.

Zweite Bestimmungsart einzelner Punkte. — Durch einen beliebigen Punkt P eines Meridians legt man erstlich den entsprechenden Parallelkreis der Umdrehungsfläche, zweitens zieht man an demselben Punkte die Meridiantangente, durch deren Rotation um die Achse eine Hilfskegelfläche hervorgebracht wird, welche die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreise berührt. Nachdem dies geschehen, werden jene zwei berührenden Ebenen der Kegelfläche bestimmt, welche der Geraden G parallel sind und welche auch die Umdrehungsfläche in zwei Punkten des Parallelkreises tangiren.

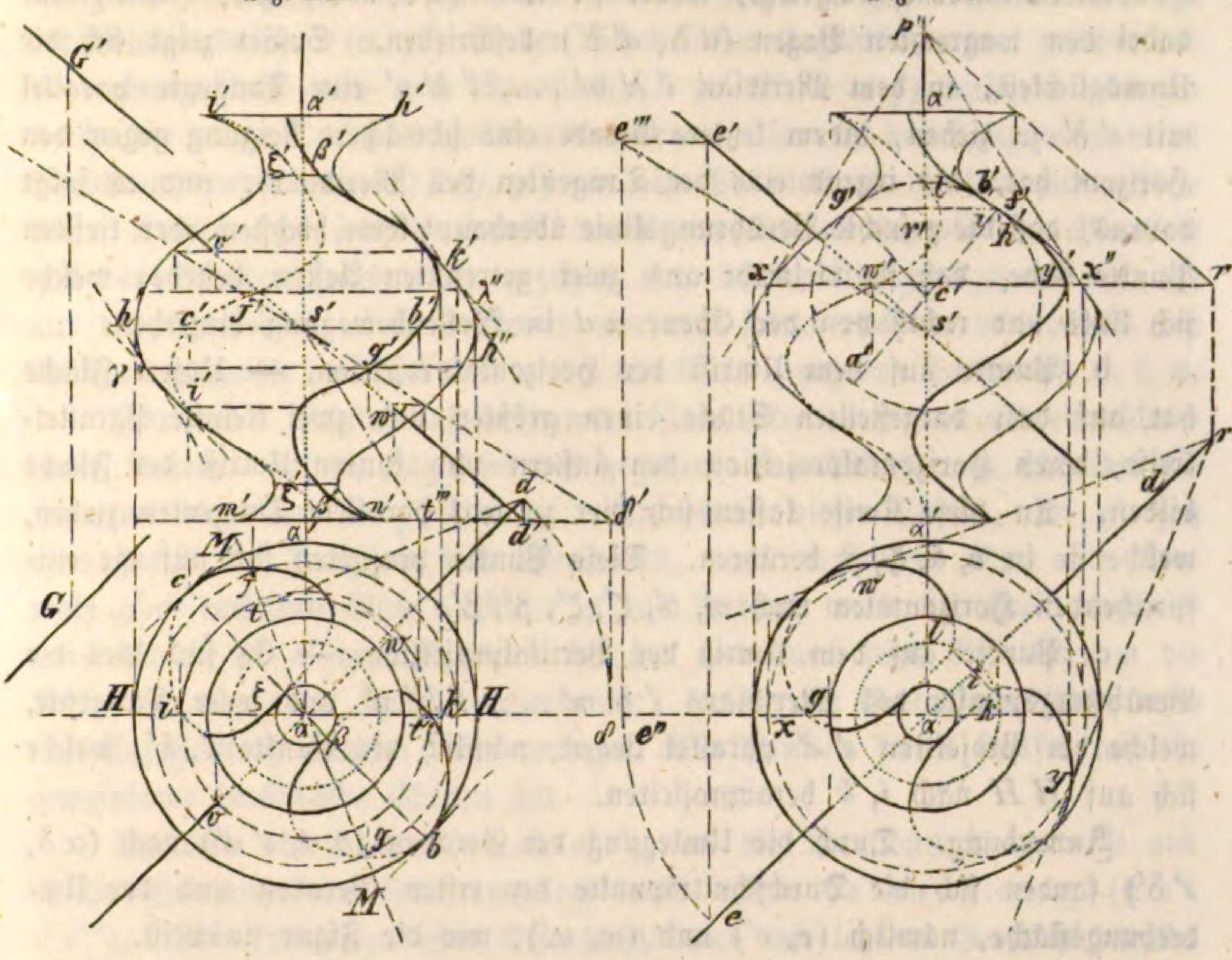
Dritte allgemeine Bestimmungsart. — Nachdem, wie so eben, an einem beliebigen Meridianpunkte P die Tangente und der zugehörige Parallelkreis bestimmt worden, zieht man durch denselben Punkt eine Senkrechte auf die Tangente, d. i. eine Normale der Fläche, und beschreibt mit dem Stück der Normalen zwischen dem Punkte P und der Achse einen Kreis. Durch die Rotation dieses Kreises entsteht eine Kugel, welche die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreise berührt. Der Kugel umschreibt man eine Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien zur Geraden G parallel sind und welche sie nach demjenigen ihrer größten Kreise berührt, dessen Ebene auf der Geraden senkrecht steht. Eine jede tangirende Ebene dieser Cylinderfläche ist erstlich der gegebenen Geraden G parallel, zweitens berührt sie auch die Kugel in einem Punkte des größten Kreises und an den Durchschnittspunkten dieses Kreises; mit dem bezeichneten Parallelkreis haben Cylinder-, Kugel- und Rotationsfläche einerlei tangirende Ebenen, weshalb diese Durchschnitts- oder Kreuzungspunkte zur Reihe der gesuchten zählen.

Was bei graphischer Anwendung dieser allgemeinen Bestimmungsarten die Sonderpunkte betrifft, welche dabei sich hervorthun, so beruht deren Konstruktion auf verwandten Anschauungen mit jenen von §. 290.

295. Anwendung auf bestimmte Fälle, Fig. *210* und *211*.

In der Hauptmeridianebene HH ist die Linie $i'\,h'\,m'$.., $l'\,h''\,n''$ als

Fig. 210. Fig. 211.



erzeugender Meridian gegeben. (Eine Linie derselben Art, wie in Fig. 139, S. 232.) (G, G') eine Gerade, parallel zu welcher der Umdrehungsfläche eine Cylinderfläche zu umschreiben und die Berührungslinie zu verzeichnen ist. Zur Ausführung der nachfolgenden Konstruktionen schien es bequem, durch irgend einen Punkt (α, s') der Rotationsachse eine Parallele $(\alpha\, d,\ s'\, d')$ zu (G, G') in Anwendung zu bringen. Außerdem verwenden wir die Hauptmeridianebene auch als vertikale Projektionsebene, als Horizontalebene aber, je nach Umständen, bald diese bald jene Ebene eines Parallelkreises, von welchen z. B. die mit $n'\, m'$ bezeichnete unsere vorhin genannte Parallele in (d, d') schneidet.

Sonderpunkte der Berührungskurve. a. Höchste oder niederste Punkte. — Diese müssen, insofern sie wirklich vorhanden, nothwendig in der Ebene $\alpha\, d$ enthalten sein, welche als Symmetrie-Ebene der Berührungskurve auftritt, und es müßten die Berührungspunkte sein des Meridians der Ebene $\alpha\, d$ mit jenen Tangenten, welche zu $(\alpha\, d,\ s'\, d')$ parallel liegen. Diese Gerade ward mit der Ebene $\alpha\, d$ um die Rotationsachse gedreht und in die

Hauptmeridianebene umgelegt, wobei sie nach ($\alpha\,\delta$, $s'\,\delta'$) fiel; (d, d') hat dabei den wagrechten Bogen ($d\,\delta$, $d'\,\delta'$) beschrieben. Sofort zeigt sich die Unmöglichkeit, an dem Meridian $i'\,h'\,m'\ldots$, $l'\,k'\,n'$ eine Tangente parallel mit $s'\,\delta'$ zu ziehen, indem letztere Gerade eine schwächere Neigung gegen den Horizont hat, als irgend eine der Tangenten des Meridians, und es folgt daraus, daß die gesuchte Berührungslinie überhaupt keine höchsten oder tiefsten Punkte habe, daß sie vielmehr aus zwei getrennten Aesten bestehe, welche sich links und rechts von der Ebene $\alpha\,d$ in Wellenbewegung hinziehen.

b. Punkte auf dem Umriß der Horizontalprojektion. — Unsere Fläche hat auf dem dargestellten Stücke einen größten und zwei kleinste Parallelkreise, deren Horizontalprojektion den äußern und innern Umriß der Fläche bilden. An diese Kreise lassen sich vier zu $\alpha\,d$ parallele Tangenten ziehen, welche sie in c, b, ζ, β berühren. Diese Punkte projiciren sich auf die entsprechenden Horizontalen nach c', b', ζ', ζ', β', β'.

c. Punkte auf dem Umriß der Vertikalprojektion. — Es sind dies die Berührungspunkte des Meridians $i'\,h'\,m'\ldots$, $l'\,h''\,n'$ und jener Tangente, welche der Projektion $s'\,d'$ parallel liegen, nämlich die Punkte i', k', welche sich auf $H\,H$ nach i, k herabprojiciren.

Anmerkung. Durch die Umlegung der Geraden ($\alpha\,d$, $s'\,d'$) nach ($\alpha\,\delta$, $s'\,\delta'$) fanden sich die Durchschnittspunkte der ersten Geraden und der Umdrehungsfläche, nämlich (v, v') und (w, w'), wie die Figur ausweist.

296. Zwischenpunkte. a. In bestimmten Meridianebenen. $M\,M$ sei eine solche. ($\alpha\,d$, $s'\,d'$) bleibt in die Erde zu projiciren; ein Perpendikel, aus (d, d') auf die Ebene gefällt, hat $d\,t$ senkrecht auf $M\,M$ als Horizontalprojektion. $M\,M$ wird durch Drehung um die Rotationsachse in die Hauptmeridianebene umgelegt, und t mit geführt, welcher Punkt nach t'' zu liegen kommt; von hier aus projicirt man ihn nach t''' auf die Horizontale des Punktes d', und $s'\,t'''$ ist die umgedrehte Projektion der Geraden ($\alpha\,d$, $s'\,d'$) in der Ebene $M\,M$. Zwei Tangenten des Hauptmeridians parallel zu $s'\,t'''$ berühren denselben in γ', λ', womit die Parallelkreise bestimmt sind, auf welchen die der Ebene $M\,M$ angehörigen Kurvenpunkte liegen. Nach zurückgebrachter Ebene ist deren Horizontalprojektion in g und j, woraus die entsprechenden Vertikalprojektionen g', j' hervorgehen.

b. Punkte auf bestimmten Parallelkreisen. — Erstlich vermittelst berührender Hilfskegel — Fig. 211, welche rein als Wiederholung von Fig. 210 betrachtet werden möge. — An dem Punkte (x', x) des Hauptmeridians, wo der gegebene Parallelkreis ($x'\,x''$, $x\,w\,y$) denselben kreuzt, zieht man die

Tangente des Hauptmeridians und markirt deren Begegnungspunkt p' mit der Rotationsachse. (α, p') ist der Scheitel der Kegelfläche, von welcher die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreise $(x' x'', x w y)$ berührt, und an welche die zu $(\alpha d, e' s')$ parallelen tangirenden Ebenen, beziehungsweise deren Berührungspunkte (w, w'), (y, y') mit dem Parallelkreise zu konstruiren bleiben. Nachdem zu solchem Zwecke durch den Scheitel (α, p') eine Parallele mit der Geraden $(\alpha d, e s')$ gezogen und deren Begegnungspunkt (r, r') mit der Kreisebene $x' x''$ bestimmt worden, finden sich w und y als die Berührungspunkte der zwei aus r an den Kreis gezogenen Tangenten u. s. w.

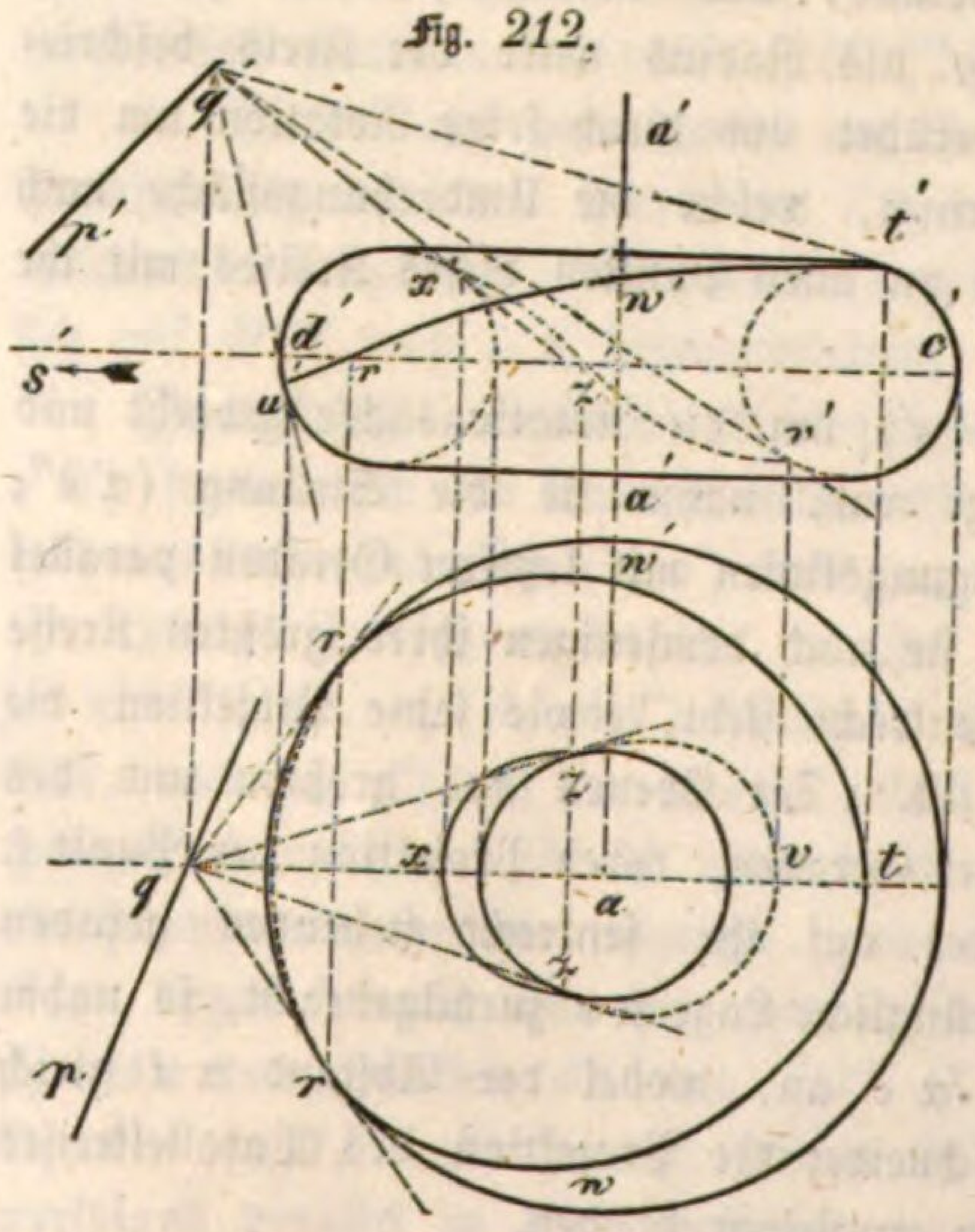
Zweitens. Punkte auf bestimmten Parallelkreisen vermittelst eingeschriebener Kugeln. $(f' g', f l g)$ sei der gegebene Parallelkreis; er schneidet die Hauptmeridianebene in f' oder g'. An einem dieser Punkte, an g', zog man zuerst die Tangente des Meridians, und vermittelst ihrer die Normale $g' c'$ derselben Linie. Mit $c' g'$ als Radius ward der Kreis beschrieben, der in g', f' den Meridian berührt und durch seine Rotation um die Achse $(\alpha, \alpha' \alpha')$ die Kugel hervorbringt, welche die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreise berührt, also auch an allen Punkten dieses Kreises mit ihr gemeinsame berührende Ebenen hat.

Nachdem die Gerade $(e \alpha d, e' s')$ um die Rotationsachse gedreht und in die Hauptmeridianebene umgelegt war, nahm sie die Stellung $(\alpha e'', s' e''')$. Ein Cylinder, dessen Erzeugungslinien mit letzterer Geraden parallel sind, umhüllt die Kugel, indem er sie nach demjenigen ihrer größten Kreise berührt, welcher auf $(\alpha e, s' e''')$ senkrecht steht, sowie seine Projektion die auf $s' e'''$ senkrechte Gerade $a' c' r'$ ist. Die Ebenen des größten und des Parallelkreises schneiden sich nach einer Geraden, deren Projektion der Punkt i. Ward die Ebene $a\ e''$ sammt der auf ihr senkrecht stehenden geraden Durchschnittslinie wieder in die ursprüngliche Lage αe zurückgebracht, so nahm sie die Stellung $l k$ senkrecht auf αe an, wobei der Abstand αi gleich $r' i'$ zu nehmen war. Dies $l i k$ schneidet die Projektion des Parallelkreises in k, l, welche Punkte nach $k' l'$ zu projiciren bleiben.

297. Ein besonderer Fall. — Wird eine Umdrehungsfläche von einer Kegelfläche umhüllt und berührt, deren Scheitel in einem gegebenen Punkt P außerhalb der Fläche liegt, oder wird sie von einer umschriebenen Cylinderfläche berührt, deren Erzeugungslinien einer gegebenen Geraden G parallel sind, so ist in allen Fällen die Berührungslinie symmetrisch gestaltet, bezüglich der Meridianebene, welche durch P geht, oder welche mit

G parallel steht. Dabei kann die Berührungskurve aus einem oder aus einigen geschlossenen Aesten bestehen, oder auch aus zwei oder irgend einer geraden Anzahl von offenen Aesten. Steht nun die Symmetrie-Ebene einer derartigen Linie parallel zu einer Projektionsebene, etwa parallel zur Vertikalebene, so haben je zwei symmetrisch liegende Punkte der Linie einen einzigen Punkt als gemeinsame Projektion, wodurch sich erstlich der Grad oder die Ordnung der Projektion auf die Hälfte niedriger stellt, als die Ordnung der Linie gewesen. War diese Linie im Raume z. B. eine Kurve vom vierten oder vom sechsten Grad (ziemlich häufige Fälle), d. h. konnte sie von einer Ebene in vier oder sechs Punkten geschnitten werden, so wird deren Vertikalprojektion jetzt mit einer Geraden nur noch zwei, bezw. drei Punkte gemein haben, mit anderen Worten: sie wird nur noch eine Linie der zweiten, bezw. dritten Ordnung sein. Die Fig. 212 soll erläutern, wie dieses Verhältniß zu einiger Vereinfachung der graphischen Arbeit bei gegenwärtiger Aufgabe benutzt werden mag. Diese Figur zeigt eine gewöhnliche runde Ringfläche mit vertikaler Rotationsachse, an welche durch die Gerade $(p\,q, p'\,q')$ die tangirende Ebene gelegt werden soll. Man wählte jenen Punkt (p, p') der Geraden, welcher zugleich der Hauptmeridianebene angehört, als Scheitel einer ersten, die Ringfläche tangirenden Kegelfläche und konstruirte die Berührungslinie nach den Vorschriften der vorhergehenden §§. Diese

Fig. 212.

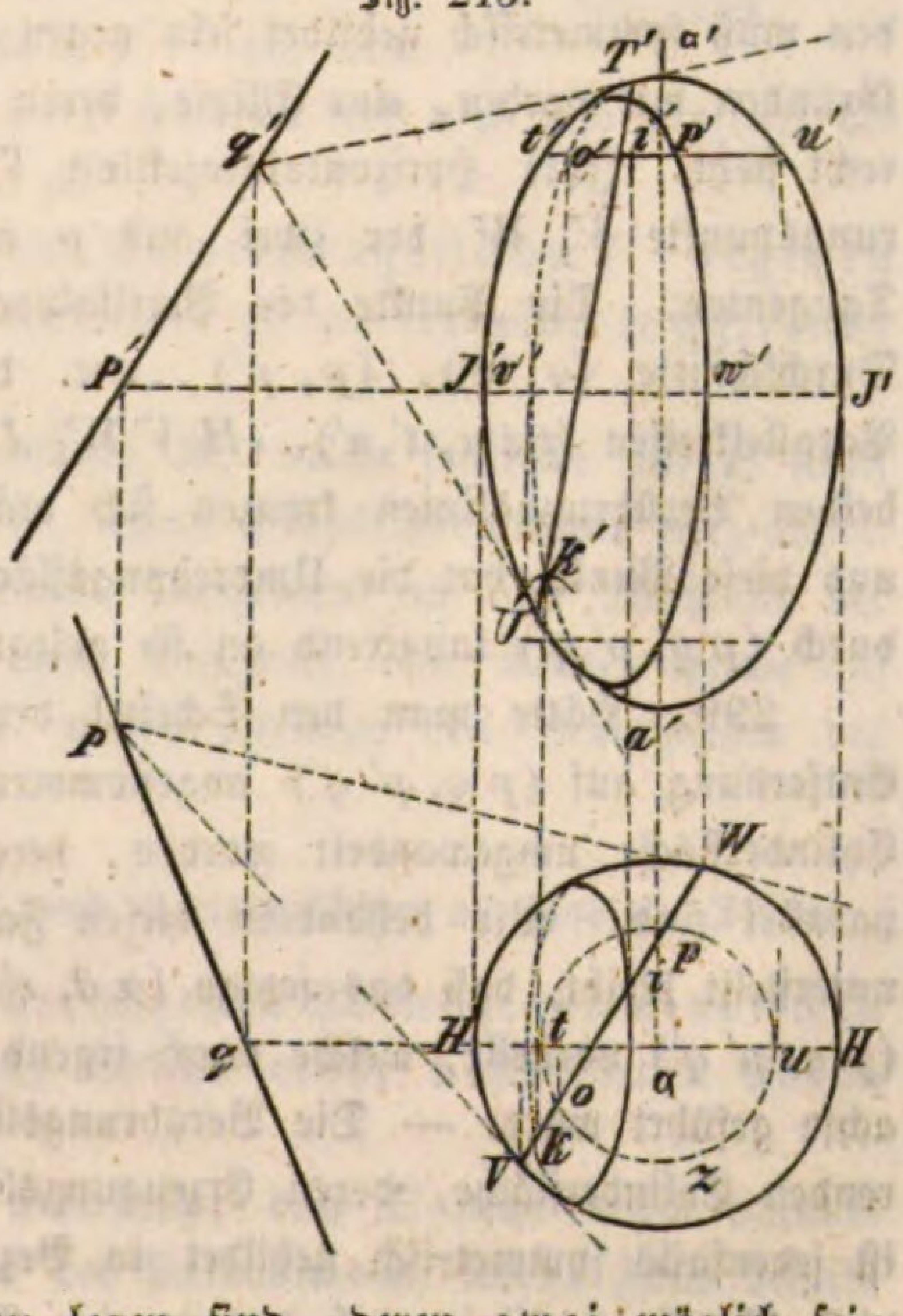


Linie besteht aus zwei geschlossenen Aesten $(r\,w\,t\ldots, u'\,r'\,w'\,t')$ und $(x\,z\,v\ldots, x'\,z'\,v')$ und ist von der sechsten Ordnung, weil sie von einer Ebene möglicherweise in sechs Punkten geschnitten werden kann (begreiflich auch nur in vier, in zwei, auch nur in einem, wenn dieser ein Berührungspunkt). Auch die Horizontalprojektion der Linie gehört zur selben Ordnung, denn sie kann von einer Geraden möglicherweise in sechs

Punkten ꝛc. durchkreuzt werden. Aber diese Horizontalprojektion ist symmetrisch gebildet gegen die Gerade $a\,q$, und je zwei entsprechende Punkte r und r, z und z haben eine gemeinsame Vertikalprojektion r', z', weshalb die ganze Vertikalprojektion der Berührungslinie nun als eine Kurve dritter Ordnung erscheint. Wählte man als Scheitel einer zweiten tangirenden Kegelfläche jenen Punkt (s, s') der Geraden $(p\,q, p'\,q')$, in welchem sie von der Horizontalebene $c'\,d'$ geschnitten wird (er ist in unserem Rahmen nicht mehr zugängig), so würde die Berührungslinie symmetrisch gebildet erscheinen, bezüglich der Ebene $c'\,d'$ ihre Horizontalprojektion also wiederum nur vom dritten Grad sein. Durch solchen vereinfachenden Umstand werden sich auch die wirklichen Kreuzungspunkte der Berührungskurven beider Kegelflächen, welches die Berührungspunkte der gesuchten tangirenden Ebenen sind, ohne Zweideutigkeit zu erkennen geben.

298. **Fortsetzung.** Insonders beachtungswerth zeigt sich die besprochene Wahl der Scheitel, wenn es sich darum handelt, durch eine gerade Linie berührende Ebenen an die Umdrehungsflächen der zweiten Ordnung zu legen. Denn bei diesen, wie überhaupt bei allen Flächen zweiten Grades, sind die Berührungskurven mit tangirenden Kegel- oder Cylinderflächen Linien zweiter Ordnung, Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln, welche sich als gerade Linien projiciren, sobald ihre Ebenen auf der Projektionsebene senkrecht stehen.

Fig. 213.



Beispiel, Fig. 213. Die dargestellte Fläche ist ein längliches Ellipsoid, erzeugt durch die Rotation der Ellipse $(H\,H,\ T'\,J'\,U'\,J')$ um die Achse $(\alpha, \alpha'\,\alpha')$. $(p\,q, p'\,q')$ ist eine Gerade, durch welche tangirende Ebenen an das Ellipsoid zu legen sind, deren zwei möglich sein werden. Den Scheitel einer ersten tangirenden Kegelfläche nehmen wir in

(q, q'), wo die Gerade durch die Hauptmeridianebene $H H$ dringt. Die Berührungslinie des Ellipsoides und dieser Kegelfläche muß nun erstlich symmetrisch gestaltet sein, bezüglich der Ebene $H H$; sie muß zweitens eine ebene Kurve sein, die Ebene dieser Kurve muß demnach auf der Ebene $H H$, bezüglich auf der vertikalen Projektionsebene, senkrecht stehen.

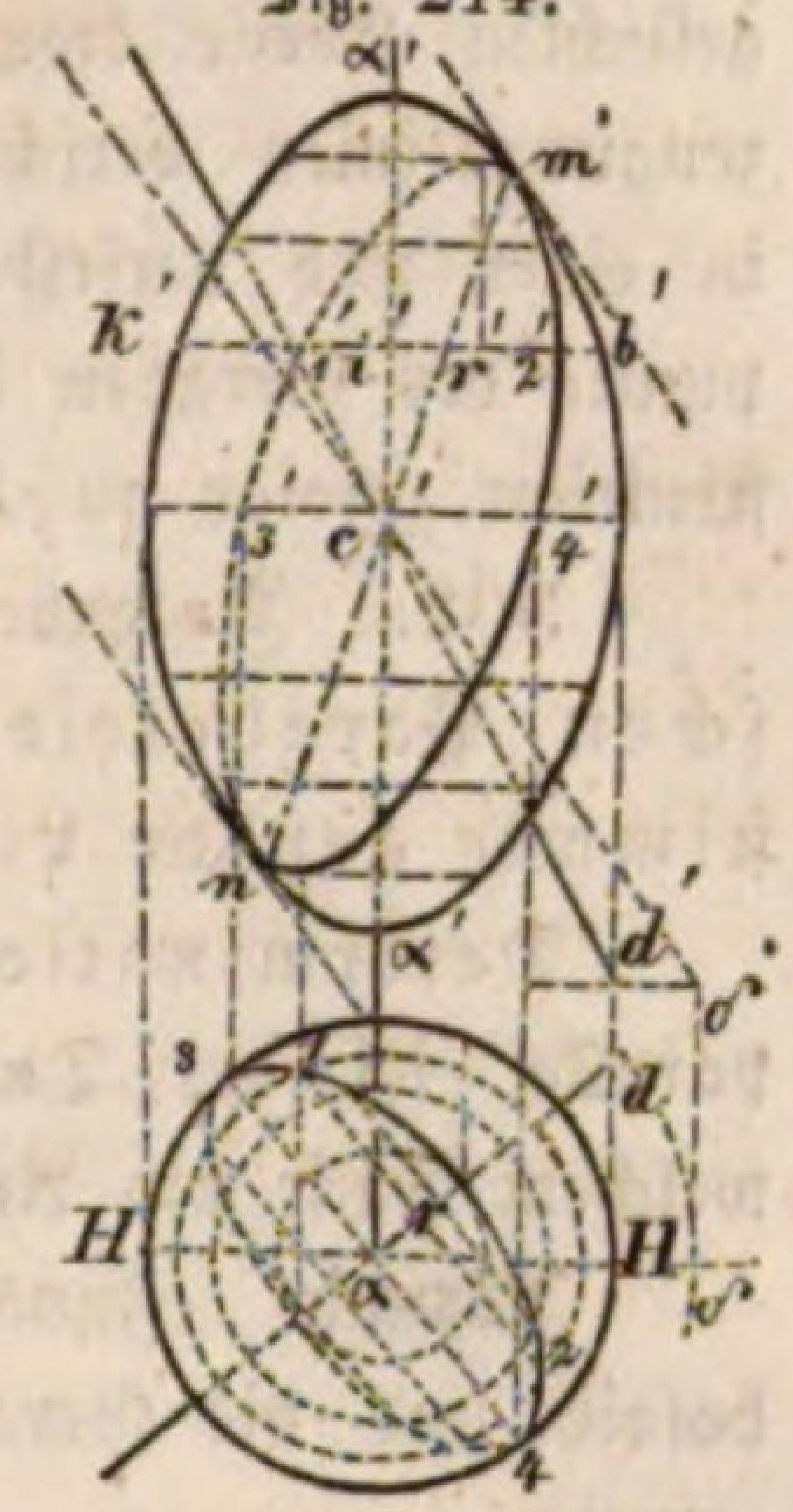
Da nun die Berührungspunkte $T' U'$ des Meridianes mit den zwei von q' ausgehenden Tangenten zur Vertikalprojektion der Berührungslinie gehören, §. 290, so kann diese Projektion keine andere sein, als die Gerade $T' U'$. Die Berührungslinie selber kann nur eine Ellipse sein, deren große Achse gleich $T' U'$. Man bestimmt die Punkte ihrer Horizontalprojektion, indem man diese betrachtet als die Durchschnitte der Ebene $T' U'$ mit verschiedenen Parallelkreisen $(t' u', t z u)$ . . . : rc. des Ellipsoides.

Den Scheitel (p, p') der zweiten tangirenden Kegelfläche nahm man im Durchschnitte der Geraden $(p q, p' q')$ mit der Ebene $J' J'$ des größten Parallelkreises. Die Berührungslinie des Ellipsoides und dieser zweiten Tangirenden muß symmetrisch gebildet sein gegen die Ebene $J' J'$, also aus gleichen Gründen wie vorhin, eine Ellipse, deren Ebene auf der Horizontalebene senkrecht steht. Ihre Horizontalprojektion $V W$ ist bestimmt durch die Berührungspunkte V, W der zwei aus p an den Umriß $V H W$ gezogenen Tangenten. Die Punkte der Vertikalprojektion $v' o' w' k'$ ergaben sich als Durchschnitte (o, o'), (p, p') . . . rc. der Ebene $V W$ mit verschiedenen Parallelkreisen $(t z u, t' u')$, $(H V W, J' J')$ . . . . rc. des Ellipsoides. Die beiden Berührungslinien kreuzen sich auf dem Ellipsoid in (i, i'), (k, k') und diese Punkte hat die Umdrehungsfläche mit den Ebenen gemein, welche durch $(p q, p' q')$ tangirend an sie gelegt werden können.

299. Hätte man den Scheitel der zweiten Kegelfläche in unendlicher Entfernung auf $(p q, p' q')$ angenommen, so wäre sie in eine tangirende Cylinderfläche umgewandelt worden, deren Erzeugungslinien zu $(p q, p' q')$ parallel sind. Wir behandeln diesen Fall abgesondert in Fig. 214, wobei unterstellt bleibt, daß das jetzige $(\alpha d, c' d')$ eine Parallele zu dem vorigen $(p q, p' q')$ vorstelle, welche durch irgend einen Punkt (α, c') der Rotationsachse geführt ward. — Die Berührungslinie des Ellipsoides und der tangirenden Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien mit $(\alpha d, c' d')$ parallel sind, ist jedenfalls symmetrisch gebildet in Bezug auf die Meridianebene αd und diese Berührungslinie muß darum eine Ellipse sein, deren Ebene auf dieser Meridianebene senkrecht steht. Wir denken uns beide der Art um die Ro-

tationsachse (α, α' α') gedreht, daß $\alpha\, d$ in die Hauptmeridianebene $H\, H$ fällt, und die Ellipsebene auf dieser senkrecht steht. Die Gerade ($\alpha\, d$, $c'\, d'$), welche diese Bewegung theilt, nimmt dadurch die Stellung ($\alpha\, \delta$, $c'\, d'$) an. Nachdem parallel zu $c'\, \delta'$ zwei Tangenten an den Umriß $k'\, n'\, l'\, m'$ gezogen worden, welche denselben in n' und m' berühren, muß $m'\, c'\, n'$ als die Projektion der elliptischen Berührungslinie in ihrer neuen Stellung erkannt werden. Es handelt sich darum, die Ellipse, deren große Achse gleich $m'\, n'$, die kleine Achse gleich $H\, H$ in ihrer ursprünglichen Stellung zu konstruiren. Ein Punkt der Ellipse, der sich z. B. nach r' projicirt, gehört vor wie nach der Umdrehung einem Parallelkreise an, dessen Vertikalprojektion die Wagrechte $k'\, r'\, l'$ und dessen Horizontalprojektion man hiernach verzeichnet. Die Ellipsebene $m'\, n'$ und die Kreisebene $k'\, l'$ schneiden sich nach einer Geraden r', man trägt nun den Abstand $i'\, r'$ auf der Geraden $\alpha\, d$ von α nach r, zieht $1\, r\, 2$ senkrecht auf $\alpha\, d$ und projicirt die Punkte 1, 2 auf $k'\, l'$ nach $1'$, $2'$ ... ꝛc.

Fig. 214.



300. **Aufgabe.** Es ist eine Umdrehungsfläche U gegeben und eine Ebene E; man soll parallel zu dieser eine tangirende Ebene an die Fläche legen.

Konstruktion. Eine Meridianebene M, welche senkrecht auf E steht, schneidet diese nach einer Geraden G, deren Projektionen man verzeichnet. Parallel zu G zieht man die möglichen Tangenten an den Meridian der Ebene M und legt schließlich durch jede Tangente eine Ebene, welche auf der Meridianebene senkrecht steht und welche offenbar den Bedingnissen der Aufgabe Genüge leistet.

Tangirende Ebenen, tangirende Kegel- und Cylinderflächen an windische Flächen.

301. **Aufgabe.** Es soll die berührende Ebene eines windischen Paraboloides konstruirt werden, welche einer bestimmten Ebene E parallel liegt.

Determination. Es wird unterstellt, daß E nicht etwa parallel sei zu einer oder der andern Leitebene des Paraboloides, welche Fälle bereits in **197** und **198** vorgesehen sind.

Lösung. Die vorgelegte Ebene wird jede Leitebene der windischen

Fläche durchschneiden — man konstruire diese Schnitte. Man bestimme nach §. 196 die beiden Erzeugungslinien, welche je einem der Schnitte parallel liegen. Diese Erzeugungslinien werden sich in dem Berührungspunkte der gesuchten Ebene kreuzen. — Sie werden sich kreuzen, wie es je zwei Erzeugungslinien verschiedener Generationssysteme thun; — sie liegen darum in einer und derselben Ebene, welche das Paraboloid in dem Kreuzungspunkte der Geraden berührt, und diese Ebene muß der angewendeten Konstruktion zufolge zu E parallel sein.

302. **Aufgabe.** Es soll die berührende Ebene eines windischen Paraboloides konstruirt werden, welche durch eine bestimmte gerade Linie g geht.

Determination. Vorausgesetzt wird, daß die Gerade G nicht etwa parallel sei der Durchschnittslinie beider Leitebenen des Paraboloides, in welchem Falle die Aufgabe unbestimmt bliebe (§. 197).

Lösung. Zunächst sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) das Paraboloid und die Gerade G schneiden sich, oder 2) sie haben keinen Punkt gemein.

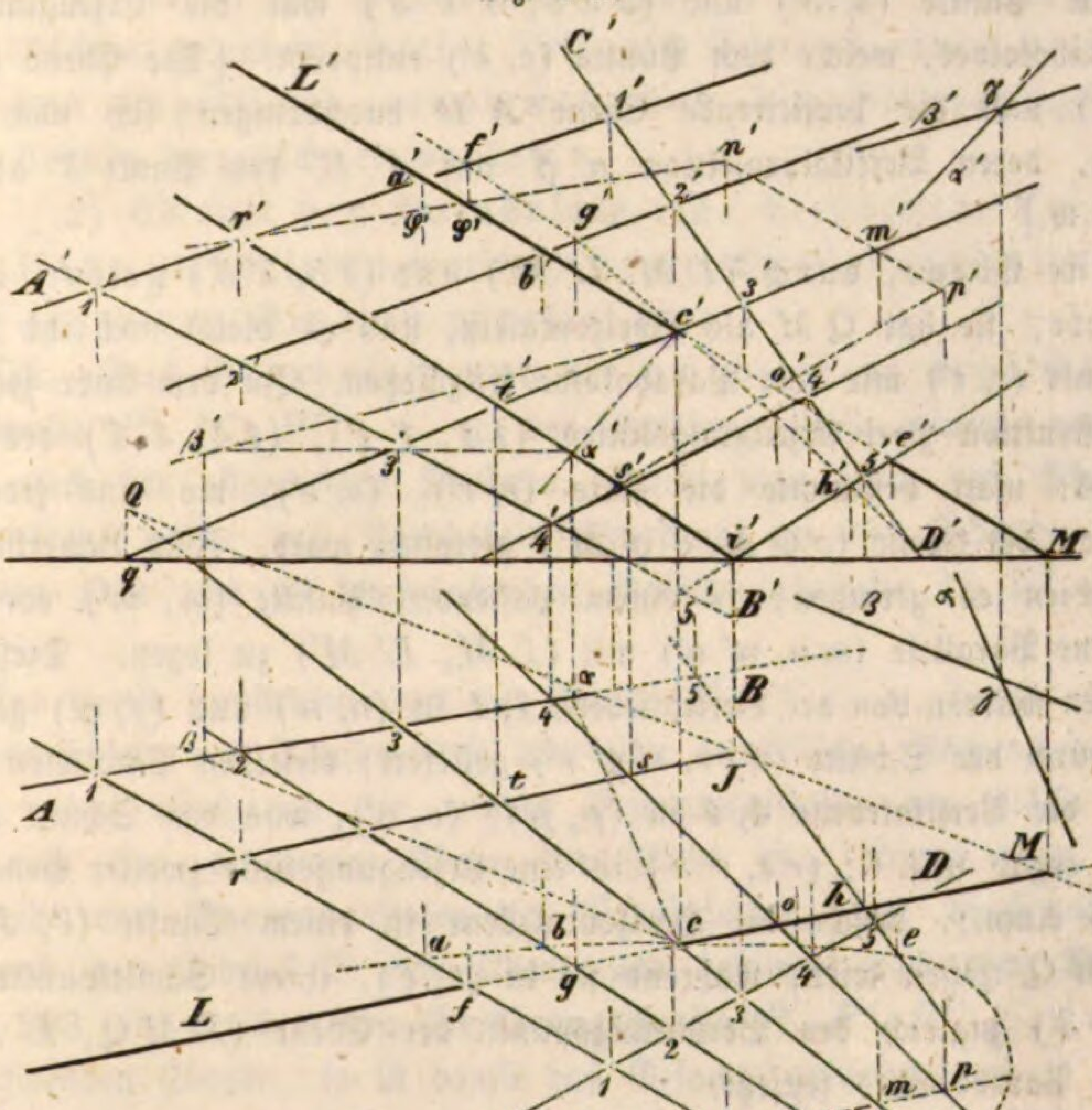
Erster Fall. G schneidet das Paraboloid, was im Allgemeinen in zwei Punkten P', P'' geschehen wird. Man bestimme die gerade Erzeugungslinie E, welche durch P' geht; man lege durch die zwei Geraden G und E eine Ebene, welche der Aufgabe Genüge leisten wird (§. 194). Ebenso arbeitet man bezüglich des Punktes P''. Da sich aber in jedem der zwei Punkte P', P'' zwei gerade Erzeugungslinien des Paraboloides kreuzen, so werden im Allgemeinen vier Ebenen möglich sein, welche den Bedingnissen der Aufgabe Genüge leisten, oder, wie man auch sich auszudrücken pflegt: die Aufgabe wird eine vierfache Lösung zulassen.

Zusatz. Den Berührungspunkt Q der Ebene zu bestimmen, welche durch G und E gelegt ward, ist es nöthig, noch die Durchschnittspunkte R', R'' der Ebene und zweier Erzeugungslinien desselben Generationssystemes wie E festzusetzen und beide Punkte durch eine Gerade zu verbinden. Alsdann gehört diese Gerade dem zweiten Erzeugungssystem an und kreuzt sich mit E in dem gesuchten Punkte Q.

303. **Beispiel, Fig.** *215.* (AB, $A'B'$) und (CD, $C'D'$) seien die zwei Leitlinien des Paraboloides, ($\alpha\gamma\beta$, $\alpha'\gamma'\beta'$) zwei Gerade, welche die Leitebene bestimmen. (LM, $L'M'$) die Gerade, durch welche eine berührende Ebene an die Fläche gelegt werden soll. — Nach der Anleitung, welche in §. 185 gegeben ward, bestimme man zuerst eine beliebige Reihe

von Erzeugungslinien $(1\,1, 1'\,1')$, $(2\,2, 2'\,2')$ ...., $(5\,5, 5'\,5')$ der windischen Fläche. Diese Geraden werden durch die projicirende Ebene $L\,M$ in (f, f'), (g, g') ..., (h, h') geschnitten. Aus solchen Punkten bildet sich

Fig. 215.



der Durchschnitt des Paraboloides mit der Ebene $L\,M$, welcher Schnitt im gegenwärtigen Falle parabolischer Natur ist. Die Vertikalprojektion $f'\,g'$ .. h' kreuzt sich mit $L\,M$ in c', welchen Punkt man auf $L\,M$ nach c herabprojicirt, um in (c, c') den Begegnungspunkt des Paraboloides mit der Geraden $(L\,M, L'\,M')$ zu gewinnen. Als Probe hat man auch den Schnitt $(a'\,b'\,e', a\,b\,e)$ konstruirt, welchen die projicirende Ebene $L'\,M'$ in dem Paraboloide hervorbringt, wobei sich ergeben mußte, daß die Projektion $a\,b$ ... e dieses Schnittes, die Gerade $L\,M$ und die Senkrechte $c'\,c$ in dem einen Punkte c zusammentreffen.

Die Erzeugungslinie des Punktes (c, c'). — Durch den Punkt

legt man eine erste Gerade ($c\,\alpha$, $c'\,\alpha'$), parallel zu ($\gamma\,\alpha$, $\gamma'\,\alpha'$) (in der Leitebene) und eine zweiten Gerade ($c\,\beta$, $c'\,\beta'$) parallel zu ($\gamma\,\beta$, $\gamma'\,\beta'$), wonach die Ebene ($\alpha\,c\,\beta$, $\alpha'\,c'\,\beta'$) parallel sein mußte der Leitebene ($\alpha\,\gamma\,\beta$, $\alpha'\,\gamma'\,\beta'$). Die erstgenannte Ebene nun schnitt die erste Leitlinie ($A\,B$, $A'\,B'$) in einem Punkte (3, $3'$) und ($3\,c\,3$, $3'\,c'\,3'$) war die Erzeugungslinie des Paraboloides, welche dem Punkte (c, c') entspricht. [Die Ebene ($\alpha\,c\,\beta$, $\alpha'\,c'\,\beta'$) und die projicirende Ebene $A\,B$ durchdringen sich nach einer Geraden, deren Vertikalprojektion $\alpha'\,\beta'$ auf $A'\,B'$ den Punkt $3'$ abschneidet u. s. w.]

Eine Ebene, durch ($L\,M$, $L'\,M'$) und ($3\,3$, $3'\,3'$) gelegt, ist die Begehrte; sie hat $Q\,M$ als Horizontalriß, und es bleibt noch ihr Tangirungspunkt (t, t') mit dem Paraboloide festzusetzen. Zu dem Ende zog man zur Konstruktion zwei Erzeugungslinien ($1\,1$, $1'\,1'$), ($4\,4$, $4'\,4'$) des ersten Systemes; man bestimmte die Orte (r, r'), (s, s'), wo eine jede derselben von der Ebene ($c\,Q\,M$, $c'\,q'\,M'$) getroffen ward. Zum Bewerkstelligen dessen schien es gerathen, in einem passenden Punkte (m, m') von ($3\,3$, $3'\,3'$) eine Parallele ($m\,n$, $m'\,n'$) mit ($L\,M$, $L'\,M'$) zu legen. Diese zwei Parallelen wurden von der Vertikalebene $1, 1$ in (n, n') und (f, φ') getroffen und dadurch der Schnitt ($n\,f\,r$, $n'\,\varphi'\,r'$) geliefert; dieselben Parallelen durchdrangen die Vertikalebene $4, 4$ in (p, p'), (o, o'), was den Schnitt ($n\,o\,s$, $n'\,o'\,s'$) ergab u. s. f.; ($r\,s$, $r'\,s'$) ist eine Erzeugungslinie zweiter Generation (§. 195 Anm.), welche die Horizontalebene in einem Punkte (i', J) des Risses $M\,Q$ treffen wird, während sie in (t, t'), ihrem Schnittpunkte, mit ($3\,3$, $3'\,3'$) zugleich den Berührungspunkt der Ebene ($L\,M\,Q$, $L'\,M'\,q'$) und des Paraboloides festsetzt.

Anmerkung. Die zweite im gegenwärtigen Falle mögliche Lösung mag dem Leser anheimgestellt bleiben.

304. Zweiter Fall. Die Gerade G, durch welche die tangirende Ebene gelegt werden soll, schneidet das Paraboloid nicht. — Hier bietet sich eine Konstruktion dar, derjenigen vollkommen entsprechend, welche bezüglich der Umdrehungsflächen §§. 289 u. fg. erläutert wie angewendet worden. Auf der Geraden G werden beliebig zwei Punkte S', S'' genommen, jeder als Scheitel einer dem Paraboloide umschriebenen Kegelfläche, und es werden die Berührungslinien dieser beiden verzeichnet. Da, wo sich auf dem Paraboloide die Berührungslinien kreuzen, was meist in zwei Punkten geschehen wird, sind auch die Berührungspunkte der durch G gehenden tangirenden Ebenen des Paraboloides. — Nimmt man den einen der beiden

Scheitel S' oder S'' in unendlicher Entfernung auf G an, so verwandelt sich die Kegelfläche in eine berührende Cylinderfläche, deren Berührungslinie mit dem Paraboloide wiederum durch die gesuchten Berührungspunkte gehen wird. Somit zerfällt die vorliegende Aufgabe in eine der zwei folgenden:

1) Es ist ein Paraboloid und ein Punkt außerhalb der Fläche gegeben, dieser soll als Scheitel einer berührenden Kegelfläche genommen und die Berührungslinien beider verzeichnet werden.

2) Es soll dem Paraboloid eine berührende Cylinderfläche umschrieben werden, deren Erzeugungslinien einer gegebenen Geraden parallel sind.

305. Das Paraboloid und die umschriebene Kegelfläche. Punkte P', P'', P''' .... rc. der Berührungslinie werden gewonnen, erstens nach der allgemeinen Methode, indem man durch den Scheitel S Ebenen legt, welche das Paraboloid schneiden, an die Schnitte aus S Tangenten zieht und die entsprechenden Berührungspunkte P', P'', P''' ... festsetzt.

Eine zweite Konstruktionsart der Punkte P', P'' ... rc. beruht auf der Eigenthümlichkeit des Paraboloides wie aller windischen Flächen, daß jede Ebene, welche durch eine der geraden Erzeugungslinien der Fläche gelegt wird, auch eine tangirende Ebene der Fläche ist. Nimmt man darum eine Reihe von Erzeugungslinien des Paraboloides, legt durch eine jede und durch den Scheitel S eine Ebene und bestimmt nach dem Vorgange von §. 303 die verschiedenen Berührungspunkte P', P'', P''' .... all' dieser tangirenden Ebenen, so ist damit das Gesuchte gefunden.

Das Paraboloid und die umschriebene Cylinderfläche. Zur Konstruktion von Punkten P', P'', P''' der Berührungskurve nach der allgemeinen Methode müssen die schneidenden Hilfsebenen durch die Gerade G gehen oder durch Parallelen zu derselben und die Tangenten der Schnitte wiederum derselben Geraden parallel gelegt werden.

Was die Anwendung der besondern Methode betrifft, so wird dabei lediglich festzuhalten bleiben, daß die Hilfsebenen, welche durch je eine der Erzeugungslinien gelegt werden, der Geraden G parallel seien; alles Weitere bleibt wie im Falle der zu umschreibenden Kegelfläche.

306. Beispiel, Fig. *216*. ($C\,D$, $C'\,D'$), ($E\,F$, $E'\,F'$) sind die Leitlinien des Paraboloides und ($1\,1$, $1'\,1'$), ($2\,2$, $2'\,2'$), ($3\,3$, $3'\,3'$) .... eine Reihe seiner Erzeugungslinien, welche auf den Leitlinien gleiche Zwischen-

Fig. 216.

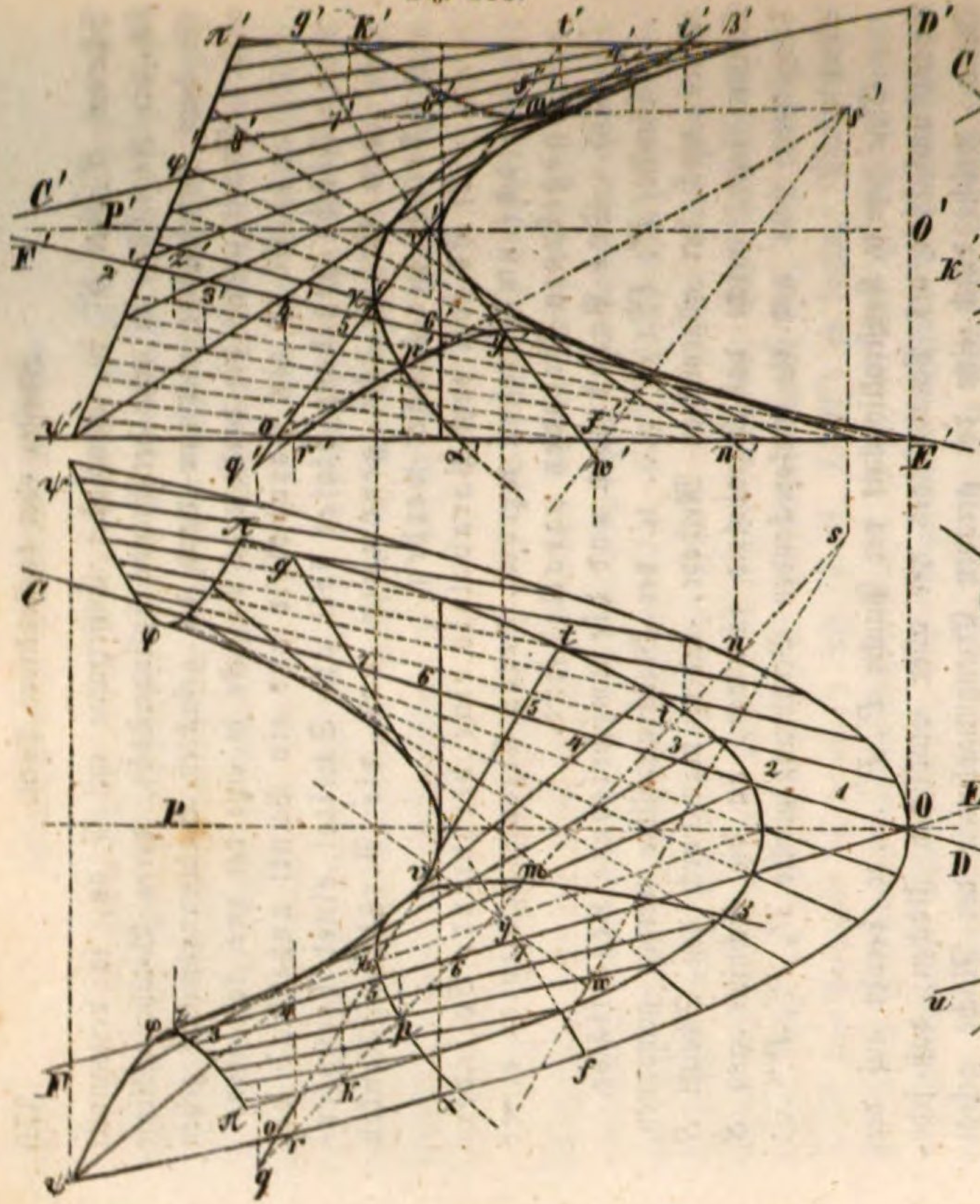
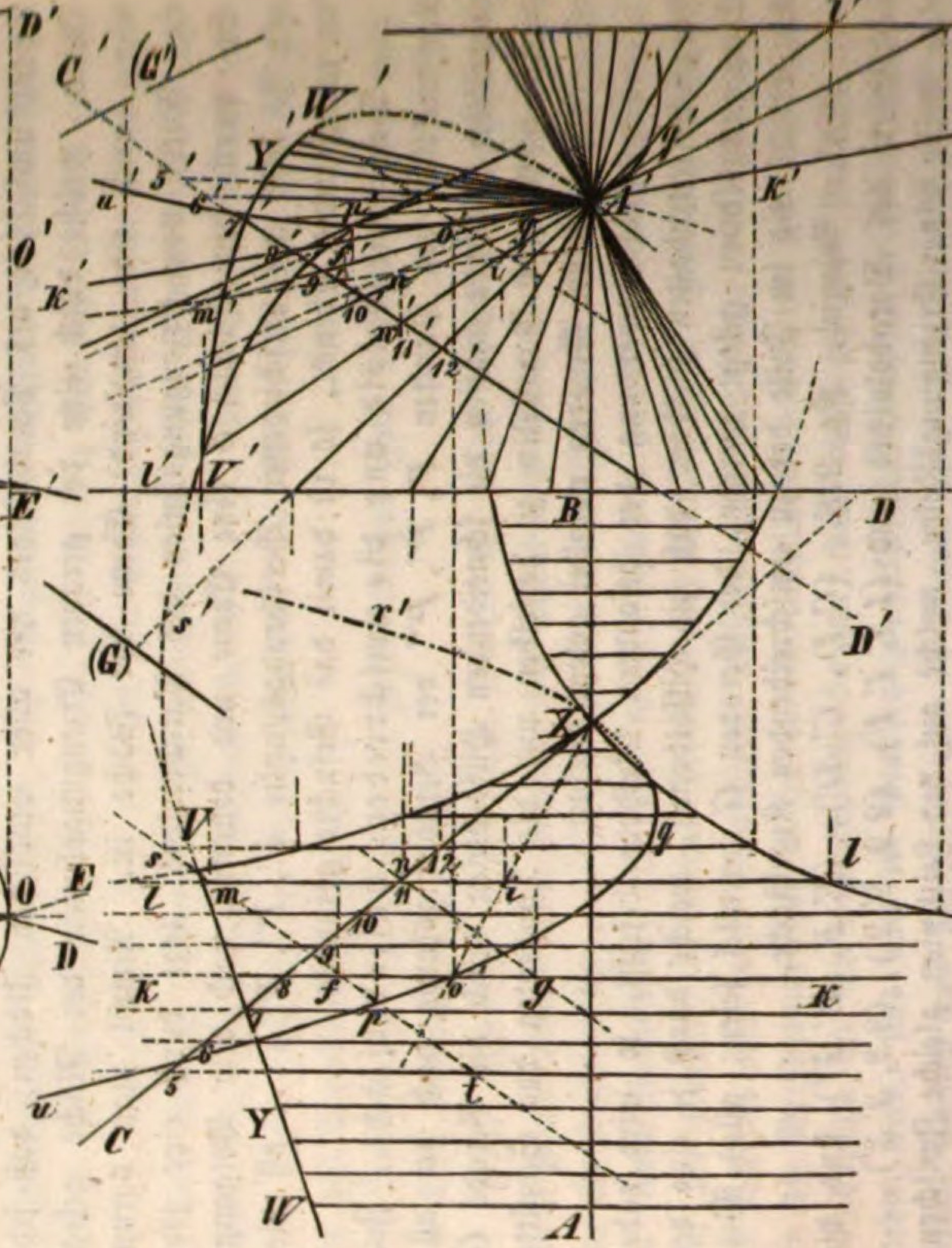


Fig. 217.



räume abschneiden, also zu einer und derselben Ebene parallel sind. Die ganze Anordnung entspricht im Uebrigen jener von Fig. *166*, §. 201, worauf hiermit hingewiesen sein soll. — (s, s') Scheitel der zu umschreibenden Kegelfläche.

Erste Konstruktionsart der Berührungslinie $(\alpha \varkappa \beta, \alpha' \varkappa' \beta')$.

Eine durch (s, s') gelegte Vertikalebene sq schneidet das Paraboloid nach der hyperbolischen Linie $(npr, n'p'r' \ldots., i'm'k' \ldots.)$, an deren Vertikalprojektion sich aus s' zwei Tangenten $s'm'$, $s'p'$ ziehen lassen. Nachdem deren Berührungspunkte m', p' festgesetzt und auf sq nach m und p herabprojicirt waren, ergaben sich dadurch zwei der zu erhaltenden Punkte (m, m'), (p, p'). [Was den hyperbolischen Schnitt betrifft, so gehören demselben jene Punkte an, in welchem die Erzeugungslinien von der Ebene sq geschnitten werden, wie z. B. $(5\,5, 5'\,5')$ in (q, q').]

Zweite Konstruktionsart. $(tq, t'q')$ sei eine beliebige gerade Erzeugungslinie. Man dachte sich durch diese Gerade und durch (s, s') eine Ebene gelegt. Vermittelst einer durch (s, s') gehenden Parallelen $(sw, s'w')$ zu $(tq, t'q')$ ward diese Ebene der Konstruktion zugängig gemacht. Man wählte eine zweite Gerade $(f\tau g, f'\tau' g')$ desselben Systemes, wie $(tq, t'q')$, und man bestimmte deren Durchschnitt (y, y') mit der soeben bezeichneten Ebene $(swot, s'w'o't')$. [Dieselbe ward von der projicirenden Ebene $f'g'$ nach der Geraden $(wyv, w'y'v')$ geschnitten, und dadurch (y, y') kenntlich gemacht.] Hat man in gleicher Weise noch den Durchschnitt (z, z') der Ebene $(swot, s'w'o't')$ und einer dritten Geraden des ersten Systemes festgesetzt, so geht durch (y, y') und (z, z') eine Erzeugungslinie $(yz, y'z')$ des zweiten Systemes, welche auf $(tso, t's'o')$ den gesuchten Berührungspunkt $(\varkappa, \varkappa')$ abschneidet. [Nach der §§. 201 u. fg. erklärten Eigenthümlichkeit unserer Fig. *166* gelten die Projektionen der Erzeugungslinie des einen Systemes zugleich auch für jene des andern Systemes. Im Uebrigen ward die Figur graphisch so behandelt, als ob außer dem Genannten nur die Geraden der ersten Generation wirklich vorhanden wären.]

307. Anderes Beispiel, Fig. *217*. (AB, A') die erste Leitlinie, welche hier senkrecht steht gegen die vertikale Projektionsebene, $(CD, C'D')$ die zweite Leitlinie. Als Leitebene dient die vertikale Projektionsebene. Man wird hierin dieselbe Anordnung erkennen, wie in Fig. *165*, welche in §. 200 erklärt worden. Außerdem sieht man die Fläche auf der linken Seite durch eine Vertikalebene WV begränzt, welche sie nach der Linie $(VYW, V'Y'W')$ durchschneidet.

(G, G') eine Gerade, parallel zu welcher dem Paraboloid

eine Cylinderfläche umschrieben und die Berührungslinie ($u\,p\,q\;X\,r,\,u'\,A'\,q'\ldots$) bestimmt werden soll.

Konstruktionsmethode vermittelst paralleler Schnitte.

$s\,t$ parallel zu (G) ist die Projektion einer beliebigen, der gegebenen Geraden parallelen Vertikalebene, welche das Paraboloid nach einer Linie ($s\,t,\,s'\,p'\,A'\ldots$) schneidet [der Schnitt besteht aus jenen Punkten, wie ($s,\,s'$), in welchen verschiedene Erzeugungslinien ($q\;12,\;12'\,A'$) von der Ebene $s\,t$ getroffen worden]. Eine Tangente der Linie $s'\,p'\,A'$ parallel zu (G') berührt dieselbe in p', welchen Punkt man auf $s\,t$ nach p herabprojicirt, und ($p,\,p'$) ist einer der gesuchten Kurvenpunkte.

308. Konstruktionsart, welche dem Paraboloid eigenthümlich.

($k\;8\;k,\;k'\,k'$) eine beliebige gerade Erzeugungslinie der Fläche. Durch sie ward eine Ebene parallel zu ($G,\,G'$) geführt, was dadurch konstruktiv geworden, daß man durch zwei Punkte ($f,\,f'$), ($g,\,g'$) auf ($k\,k,\;k'\,k'$) die Geraden ($f\,m,\;f'\,m'$) und ($g\,n,\;g'\,n'$) parallel zu ($G,\,G'$) legte. Die Ebene ($f\,m\,n\,g,\;f'\,m'\,n'\,g'$) ward von irgend einer andern Erzeugungslinie ($l\,l,\;l'\,l'$) in einem Punkte ($i,\,i'$) geschnitten [der Punkt ward vermittelst des Schnittes ($m\,n,\;m'\,n'\,i'$) erhalten]. ($X\,i\,o,\;A'\,i'\,o'$) ist die Erzeugungslinie qes zweiten Systemes, welche dem Punkte ($i,\,i'$) entspricht. Ihre Vertikalprojektion $i\,o'$ ist parallel zu $C'\,D'$; sie liegt in der Ebene ($f\,m\,n\,g,\;f'\,m'\,n'\,g'$) und schneidet deren Berührungspunkt ($o,\,o'$) auf ($k\,k,\;k'\,k'$) ab.

Die Berührungslinie ($p\,o\,q\,x\,r\ldots,\;p'\,o'\,A'\,q'\ldots$) besteht aus einem einzigen Aste und ist darum parabolischer Natur. Es ist eine Folge der Stellung unserer Leitlinien des Paraboloides, daß alle Linien der Fläche, welche sämmtliche Erzeugungslinien durchkreuzen, in der Horizontalprojektion durch X gehen müssen und in der Vertikalprojektion durch A'.

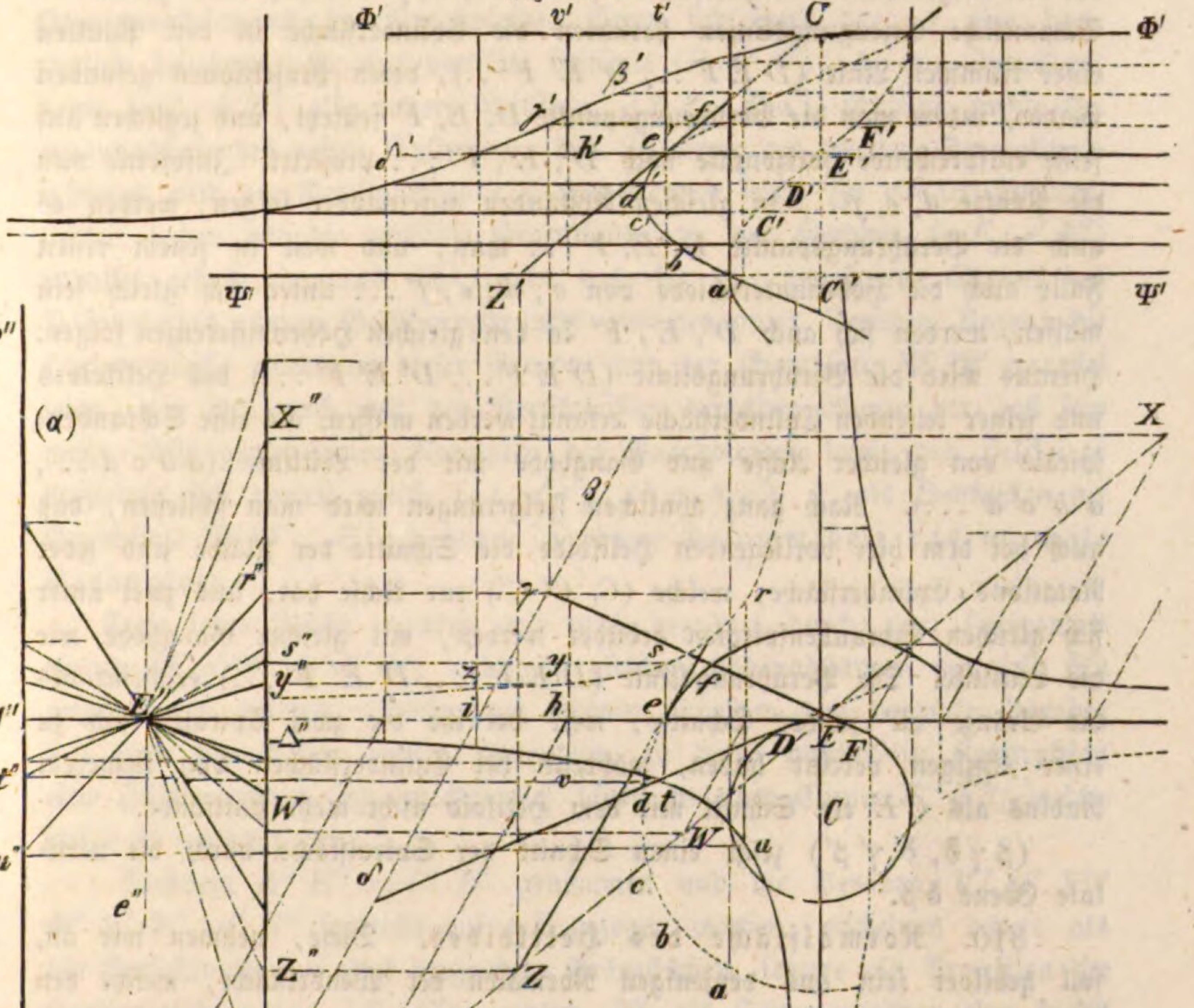
309. Aufgabe. Es soll das windische Paraboloid konstruirt werden, welches irgend eine andere windische Fläche längs einer ihrer geraden Erzeugungslinien normal durchschneidet.

[Man berathe zuvörderst den Lehrsatz §. 264.]

Beispiel, Fig. 218. Als primitive Fläche haben wir hier ein Helikoid gewählt, nämlich eine Abart der in §. 223 erklärten Wendelfläche. Diese Spezies hat ein nicht seltenes Vorkommen als untere Fläche einer Wendeltreppe. In ihrer Bewegung wird die gerade Erzeugungslinie dieses Helikoides geleitet, erstens durch eine Schraubenspirale als Leitlinie und zweitens

durch zwei Leitflächen, nämlich eine Leitebene, zu welcher die Erzeugungslinie immer parallel bleiben soll, und welche senkrecht steht auf der Spiral-

Fig. 218.



achse; sodann einer Cylinderfläche mit gleicher Achse, und welche von sämmtlichen Erzeugungslinien tangirt wird. In unserer Fig. 218 ist (*a b c d e f*, *a' b' c' d'*...) die leitende Schraubenspirale, die Senkrechte (*C*, *C' C'*) deren Achse, wonach die Horizontalebene als Leitebene auftritt. Die leitende Cylinderfläche hat wiederum die Senkrechte (*C*, *C' C'*) zur Achse und ihre Horizontalprojektion ist der Kreis *D E F*. Diesem zufolge erscheinen die Hori-

zontalprojektionen der geraden Erzeugungslinien als Tangenten dD, eE, fF ... genannten Kreises, welche von Punkten d, e, f ... der Projektion $abcd$ ... ausgehen, während ihre Vertikalprojektionen als die Horizontalen der den erstgenannten entsprechenden Punkte d', e', f' ... sich kund geben. — Sämmtliche Erzeugungslinien berühren die Cylinderfläche in den Punkten einer krummen Linie (DEF.., $D'E'F'$..), deren Projektionen gefunden werden, indem man die Berührungspunkte D, E, F festsetzt, und jeglichen auf seine entsprechende Horizontale nach D', E', F' ... projicirt. Insoferne nun die Punkte d, e, f ... in gleichen Abständen aufeinander folgen, werden es auch die Berührungspunkte D, E, F ... thun, und weil in jenem ersten Falle auch die Höhenunterschiede von c', d', e', f' ... unter sich gleich sein müssen, werden sich auch D', E', F' in den gleichen Höhendifferenzen folgen. Hieraus wird die Berührungslinie (DEF.., $D'E'F'$...) des Helikoides und seiner leitenden Cylinderfläche erkannt werden müssen, als eine Schraubenspirale von gleicher Achse und Ganghöhe mit der Leitlinie ($abcd$..., $a'b'c'd'$...). Nach ganz ähnlichen Folgerungen wird man schließen, daß auch bei dem hier vorliegenden Helikoide die Schnitte der Fläche und jeder Rotations-Cylinderfläche, welche (C, $C'C'$) zur Achse hat, aus zwei unter sich gleichen Schraubenspiralen gebildet werden, mit gleicher Ganghöhe wie die Leitlinie. Die Berührungslinie (DEF..., $D'E'F'$...) erscheint als die Gränze all' solcher Schnitte, weil bei ihr die zwei Spiralen sich zu einer einzigen vereint haben, während bei Cylinderflächen von kleinerem Radius als CE ein Schnitt mit dem Helikoid nicht mehr stattfände.

($\beta\gamma\delta$, $\delta'\gamma'\beta'$) zeigt einen Schnitt der Spiralfläche durch die vertikale Ebene $\delta\beta$.

310. Normalfläche des Helikoides. Diese, nehmen wir an, soll gebildet sein aus denjenigen Normalen der Wendelfläche, welche den Punkten der Erzeugungslinie (eE, $e'E'$) angehören, und es bleibt vorerst das längs dieser Linie **berührende** Hilfsparaboloid festzusetzen. — Nun ist die Vertikalebene eE, welche die Cylinderfläche nach der Vertikalen E berührt, auch die tangirende Ebene des Helikoides in dessen Punkte (E, e'), weil in dieser Ebene erstlich die Erzeugungslinie (eE, $e'E'$) liegt, und zweitens auch die Tangente der Berührungslinie (DEF.., $D'E'F'$...), eine Tangente, deren Horizontalprojektion wiederum eE sein muß. Als zweite tangirende Ebene des Helikoides bietet sich diejenige des Punktes (e, e') dar. Sie ist bestimmt durch die Erzeugungslinie (eE, $e'E'$) und durch die Tangente (eZ, $e'Z'$) der Leitspiralen, deren Horizontalprojektion

die Kreistangente $e\,Z$. Auf diese hat man den verstreckten Bogen $e\,d\,c\,b\,a$ von e nach Z getragen; weil ferner diesem Bogen die Höhendifferenz von a' und e' entspricht, blieb Z auf die Horizontale $a'\,Y'$ nach Z' zu projiciren, um $e'\,Z'$ als Vertikalprojektion der Spiraltangente zu finden. Als Erzeugungselemente des Paraboloides bieten sich somit dar: 1. eine horizontale Leitebene, 2. eine vertikale Leitlinie $(C, C'\,C')$, 3. die Spiraltangente $(e\,Z, e'\,Z')$ als andere Leitlinie; $(Z\,E, Z'\,a')$ ist eine zweite Erzeugungslinie des ersten Systemes. Als Leitebene des zweiten Generationssystemes wird die Vertikalebene $e\,Z$ anzuerkennen sein. Zu einiger Bequemlichkeit haben wir die vertikale Projektionsebene der Geraden $(e\,E, e'\,E')$ parallel gestellt, woraus sich ergab, daß für alle tangirende Ebenen des Paraboloides, deren Berührungspunkte auf genannter Geraden liegen, die Horizontalrisse wiederum dieser Geraden und der Grundlinie $\Psi'\,\Psi'$ parallel seien, wie dies auch mit den Vertikalrissen derselben Ebenen der Fall sein muß. Alle gemeinsamen Normalen des Paraboloides sowie des Helikoides projiciren sich darum gleich $(e\,t, e'\,t')$, $(h\,v, h'\,v')$ ... als Senkrechte zur Grundlinie $\Psi'\,\Psi'$. Sie bilden in ihrer Gesammtheit das normale Paraboloid.

Diese letzte Fläche dachten wir uns begränzt durch zwei Horizontalebenen $\Psi'\,a'\,\Psi'$, $\Phi'\,C'\,\Phi'$, welche in gleichen Höhenabständen von (E, E') angenommen wurden. Diese zwei Ebenen schneiden das normale Paraboloid nach den Aesten zweier Hyperbeln, zu deren punktweiser Konstruktion eine Hilfsprojektion (α) zweckdienlich schien in einer Ebene $X''\,V''$, welche auf $e\,E$ senkrecht steht.

Nachdem $\Delta''\,E'' = C'\,E'$ genommen und die Geraden $V''\,\Delta''\,X'''$ $\Phi''\,\Delta''\,\Phi''$, $e''\,E''$ senkrecht auf $e\,E$ gezogen worden, erscheinen erstere als die Projektionen der zwei wagrechten Gränzflächen, letztere als Projektion der Horizontalebene von (E, E'), endlich E'' als Seitenprojektion eben dieses Punktes, sowie der ihm entsprechenden geraden Erzeugungslinie.

Nun ist vorerst die durch Z gehende Parallele zu $e\,E$, nämlich $Z\,Z''$, Horizontalriß der tangirenden Ebene am Punkte (e, e') und $Z''\,E''$ wird in der Seitenprojektion Vertikalriß derselben Ebene sein. Eine Senkrechte aus E'' auf diesen Riß, nämlich die Gerade $t''\,E''$, ist die Projektion der Normalen des Punktes (E'', e), und diese Normale durchdringt die obere Gränzfläche in (t'', t'), die untere in (s'', s), welche Punkte den gesuchten hyperbolischen Schnitten zu eigen sind. Für den Punkt (E'', h) hat man zuerst durch h die $h\,V$ parallel zu $e\,Z$ zu ziehen, damit die Projektion der Er-

zeugungslinie des zweiten Systemes für diesen Punkt zu gewinnen. Diese Linie schneidet die Horizontalebene in V auf der Geraden EZ, V projicirt sich nach V'', und $V''E''$ wird als Vertikalriß der tangirenden Ebene des Punktes (h, E'') zu erkennen sein. Eine Senkrechte $v''E''y''$ auf diesen Riß $V''E''$ ist die Projektion der Normalen in (h, E''); sie schneidet die obere Gränzfläche $\Phi''\Phi''$ in (v'', v), die untere Gränzfläche $V''X''$ in dem Kurvenpunkte (y'', y) u. s. f. — Je weiter von e entfernt die Punkte $h, i \ldots$ 2c. auf Ee genommen werden, je spitzere Winkel müssen die entsprechenden Vertikalrisse mit der Grundlinie $V''X''$ bilden, aber niemals vermag jener Winkel Null und damit die Normale senkrecht zu werden. Als Folge hiervon werden die Kurvenpunkte $t, v \ldots, s, y, z \ldots$ sich fortwährend der Geraden Ee nähern, ohne sie jemals erreichen zu können, und aus diesem Verhalten erkennt man in Ee eine Asymptote der Schnitte $tu \ldots, syz \ldots$ Auf der andern Seite wiederum ist die tangirende Ebene in (E, E') vertikal, die Normale hier also horizontal, und vermag keine der Gränzflächen mehr zu durchschneiden. Die Projektion EC' dieser Normalen erhält dadurch eine unendliche Größe und giebt sich somit als zweite Asymptote der Gränzschnitte zu erkennen. Weil aber Ee und EC' der Konstruktion zufolge rechte Winkel unter sich bilden, werden die genannten Schnitte als gleichseitige Hyperbeln zu erkennen sein. Die beiden in der oberen Gränzfläche liegenden Kurvenäste hat man voll ausgezogen, jene aber punktirt, welche der unteren Gränzfläche angehören.

311. **Aufgabe.** Einem windischen (elliptischen) Hyperboloide soll eine tangirende Kegelfläche umschrieben werden, deren Scheitel ein gegebener Punkt außerhalb der Fläche ist.

Die Fläche sei durch ihre drei geraden Leitlinien gegeben, und man weiß, wie in diesem Falle beliebige von ihren Erzeugungslinien zu konstruiren sind, §. 226.

Konstruktion. Durch eine erste Erzeugungslinie des Hyperboloides und durch den Scheitel der Kegelfläche wird eine Ebene gelegt; diese schneidet zwei andere Erzeugungslinien desselben Systemes in zwei Punkten, welche eine Gerade des zweiten Erzeugungssystemes bestimmen; da, wo beide Erzeugungslinien sich kreuzen, ist der Berührungspunkt der Ebene und der erstgenommenen Linie. Das Verfahren bei einer zweiten, dritten u. s. w. Erzeugungslinie wiederholt, liefert jedesmal einen oder zwei weitere Punkte der Berührungslinie des Hyperboloides mit der ihm umschriebenen Kegelfläche.

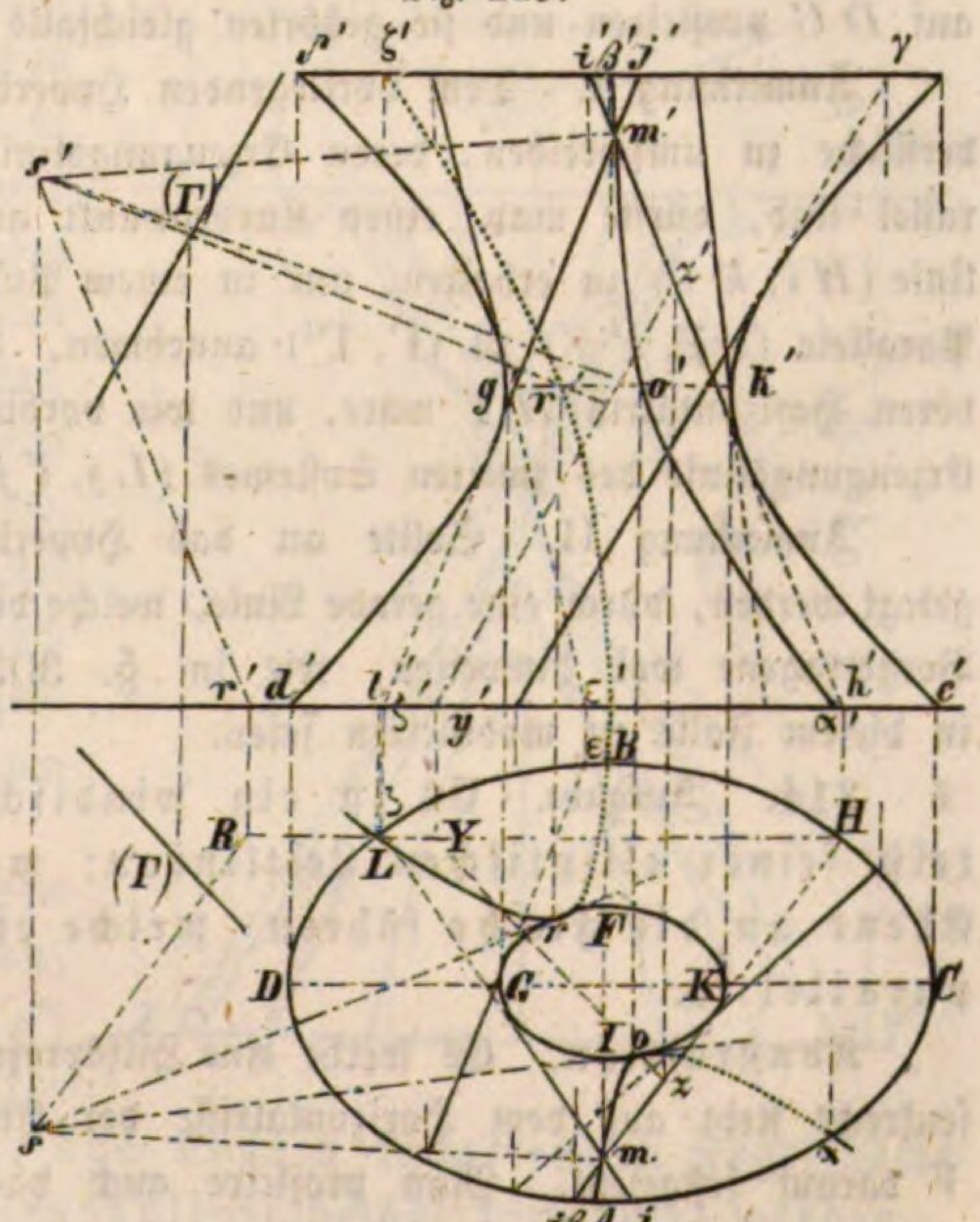
Anmerkung. Die allgemeine Methode, Punkte der Berührungslinie zu bestimmen, mittelst schneidender Ebenen, welche durch den Scheitel der Kegelfläche gehen, und von da aus an die Schnitte gezogener Tangenten, bedarf einer weiteren Anführung nicht mehr.

312. Aufgabe. Einem elliptischen Hyperboloide soll eine tangirende Cylinderfläche umschrieben werden, deren gerade Erzeugungslinien einer gegebenen Geraden parallel sind.

Die Konstruktion unterscheidet sich nur darin von der vorher beschriebenen, daß die berührenden Ebenen, welche durch je eine der geraden Erzeugungslinien gelegt werden, sämmtlich der gegebenen Geraden parallel sein müssen. Diese Lage jeder Ebene wird festgesetzt vermittelst einer Parallelen zu der gegebenen Geraden, welche die gewählte Erzeugungslinie schneidet.

313. In graphischer Beziehung wesentlich vereinfacht werden die vorstehenden Konstruktionen, im Falle das Hyperboloid vermittelst seiner elliptischen Leitlinien gegeben ist, wie solches in §. 240, bezüglich der Fig. *182*, erklärt worden, und wie bei Fig. *219* abermals unterstellt ist.

Fig. *219.*



A C B D ist hier die Leitellipse, welche in der horizontalen Projektionsebene liegt, zugleich aber auch die Projektion der zweiten Leitellipse, deren Vertikalprojektion die Wagrechte $\delta' \gamma'$. Die zur ersten ähnliche und ähnlich liegende Ellipse *F K I G*, deren Vertikalprojektion $g'\ k'$ gleichweit absteht von $d'\ c'$ und $\delta' \gamma'$, ist die Projektion der Kehle, welche zugleich als dritte Leitlinie dient. — (s, s') sei der Scheitel einer das Hyperboloid tangirenden Kegelfläche, deren Berührungslinie $(\alpha\, o\, \beta\, .. \,\zeta\, r\, \varepsilon,\ \alpha' r')$ verlangt wird. Die Tangente *H i* der Kehlellipse sei die Horizontalprojektion einer geraden

Erzeugungslinie des Hyperboloides, und $h' i'$ die entsprechende Vertikalprojektion. Auf dieser Geraden werde ein Kurvenpunkt (m, m') gesucht. Durch sie und den Scheitel (s', s) ist eine Ebene gelegt, dieser Ebene gehört die Parallele $(s R, s' r')$ an und ihr Horizontalriß ist $H R$. Sie schneidet das Hyperboloid noch in einer zweiten Erzeugungslinie, welche durch L gehen und deren Horizontalprojektion $L j$ die Kehlellipse $F K I G$ berühren muß. Dies bestimmt ihre Lage vollständig und damit auch die Vertikalprojektion $l' j'$. Beide Erzeugungslinien müssen sich schneiden, was in (m, m') geschieht. — Die gefundene Berührungslinie besteht aus zwei getrennten Aesten und ist somit hyperbolischer Art.

Besondere Punkte der Berührungskurve liefern zwei Tangenten, aus s an die Projektion der Kehlellipse gezogen; sie berühren dieselbe in o und r, welche Punkte nach o', r' projicirt werden und zur Reihe der Berührungspunkte gehören. Wäre es möglich, aus s' Tangenten an den Umriß $c' k' \gamma' \ldots, d' g' \delta' \ldots$ zu ziehen, so würde man die Berührungspunkte herab auf $D C$ projiciren und sie gehörten gleichfalls den Gesuchten an.

Anmerkung I. Dem vorliegenden Hyperboloide eine tangirende Cylinderfläche zu umschreiben, deren Erzeugungslinien der Geraden (Γ, Γ') parallel sind, dürfte man, einen Kurvenpunkt auf der beliebigen Erzeugungslinie $(H i, h' i')$ zu erhalten, nur in einem Punkte (z, z') dieser Geraden eine Parallele $(z Y, z' y')$ zu (Γ, Γ') annehmen, durch beide eine Ebene legen, deren Horizontalriß $H Y$ wäre, und wie vorhin die dieser Ebene angehörige Erzeugungslinie des zweiten Systemes $(L j, l' j')$ bestimmen.

Anmerkung II. Sollte an das Hyperboloid eine tangirende Ebene gelegt werden, durch eine gerade Linie, welche die Fläche schneidet, so wird das Vorgetragene wol hinweisen, wie in §. 303 vorgetragene Konstruktionen in diesem Falle zu modificiren seien.

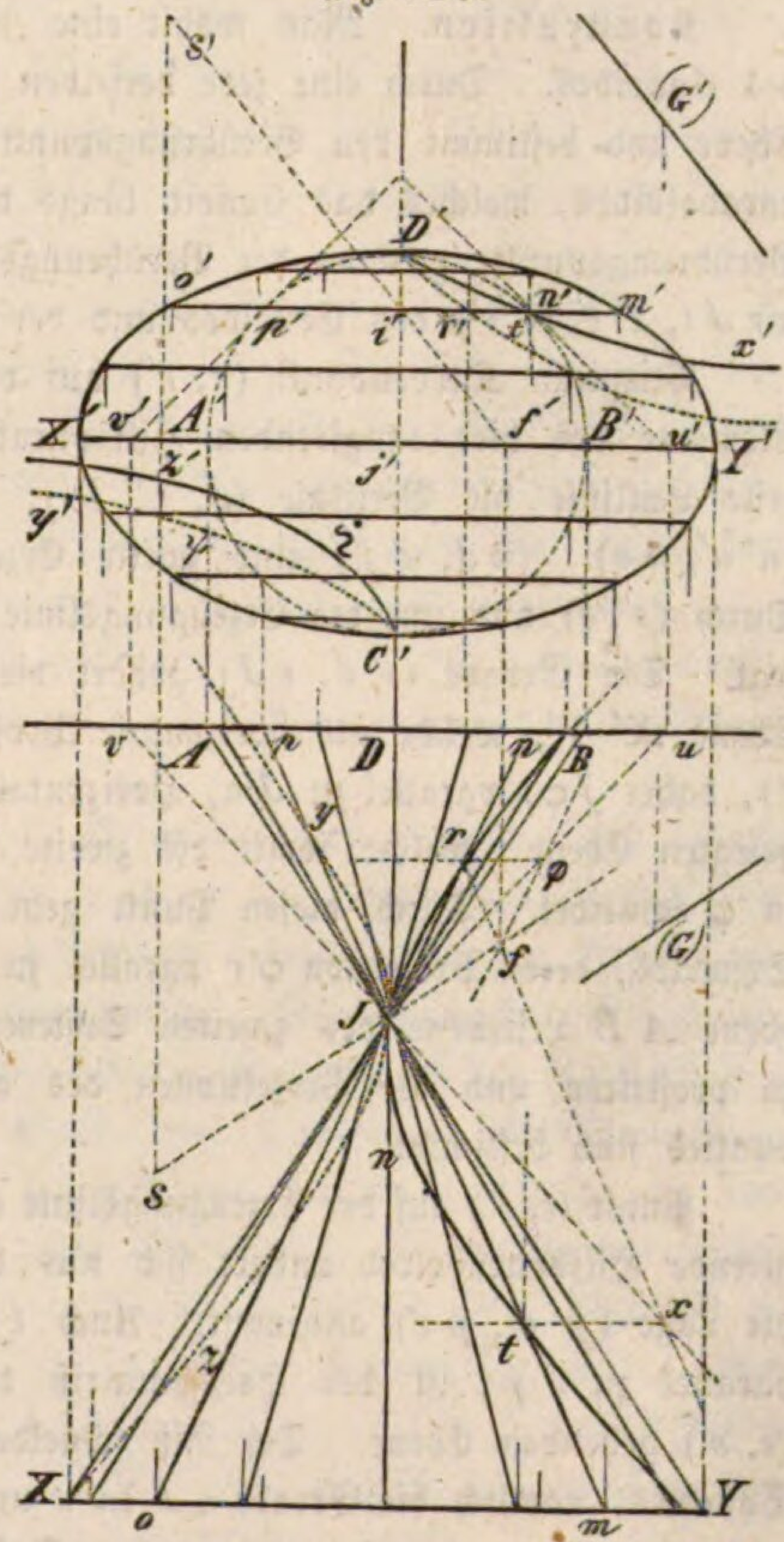
§. 314. Aufgabe. Es ist ein windisches Hyperboloid vermittelst seiner elliptischen Leitlinien; man soll eine tangirende Ebene an die Fläche führen, welche einer bestimmten Ebene E parallel ist.

Konstruktion. Es werde eine Hilfsprojektionsebene angeordnet, welche senkrecht steht auf dem Horizontalrisse der Ebene E und deren Vertikalriß V darauf festgesetzt. Man projicire auch das Hyperboloid auf die Hilfsebene und bestimme die Umrisse seiner Vertikalprojektion, §. 243. An diese Umrisse ziehe man Tangenten parallel zu V, so hat man die Vertikalprojektionen von berührenden Ebenen des Hyperboloides, welche auf der

Hilfsprojektionsebene senkrecht stehen und der Ebene E parallel sind. Wie deren Berührungspunkte zu bestimmen bleiben, ward in dem angezogenen §. gelehrt.

Anmerkung. Daß die vorstehend erläuterten Konstruktionen bezüglich des elliptischen Hyperboloides sich fast buchstäblich auf das Rotations-Hyperboloid anwenden lassen, leuchtet ein; doch könnte man diese Fläche rein als Umdrehungsfläche behandeln und von ihrem Charakter als windischer Fläche absehen. Aber den Umstand wird man vorkommenden Falles sich zu Nutze machen, daß bei den windischen Hyperboloiden wie Paraboloiden, als Flächen zweiter Ordnung, die Berührungslinien mit tangirenden Kegel- und Cylinderflächen ebene Kurven sind, also Kegelschnitte, welche sich als gerade Linien projiciren, wenn als Projektionsebene jene Meridianebene genommen wird, welche durch den Scheitel der Kegelfläche geht, oder beziehungsweise, welche den geraden Erzeugungslinien der Cylinderflächen parallel ist.

Fig. 220.



315. Aufgabe. Es ist ein windisches Conoid gegeben, Fig. 220, und ein Punkt (s, s') außerhalb der Fläche. Dieser soll als Scheitel einer das Conoid tangirenden Kegelfläche genommen, und die Berührungslinie beider konstruirt werden.

Das Conoid hat eine horizontale Leitebene, eine vertikale Leitlinie (J, $C'\,D'$) und eine cirkuläre Leitlinie ($A\,B$, $A'\,C'\,B'\,D'$) in vertikaler

Ebene, welche so gestellt ist, daß die Ebene, welche durch $(J, C' D')$ und das Kreiscentrum (D, j') geht, senkrecht steht zur Kreisebene, mit welch' letzterer die vertikale Projektionsebene parallel genommen ward. Das Uebrige der Figur entspricht völlig der Fig. 172, deren Einzelheiten in §. 119 erklärt werden.

Konstruktion. Man wählt eine Zahl von geraden Erzeugungslinien des Conoides. Durch eine jede derselben und durch (s', s) legt man eine Ebene und bestimmt den Berührungspunkt derselben vermittelst eines Hilfsparaboloides, welches das Conoid längs der Erzeugungslinie berührt. Diese Berührungspunkte gehören der Berührungslinie $(p\ y\ J\ z,\ y'\ C'\ \zeta'\ z' \cdot \ldots\ldots$ $n\ r\ J\ t,\ x'\ t'\ D'\ r')$ des Conoides und der Kegelfläche.

Beispiel. Kurvenpunkt (r, r') auf der Erzeugungslinie $(o'\ m', o\ J\ n)$. Elemente des hier tangirenden Hilfsparaboloides. — Leitebene horizontal; erste Leitlinie die Vertikale $(J, C'\ D')$; zweite Leitlinie die Kreistangente $(n'\ u', n\ u)$. $(u\ J, u'\ j')$ eine zweite Erzeugungslinie des ersten Systemes. Durch (s', s) und um die Erzeugungslinie $(i'\ n', J\ n)$ ward eine Ebene gelegt. Die Gerade $(s'\ i', s\ J)$ gehört dieser Ebene an. Sie schneidet die Ebene $X'\ Y'$, welche als horizontale Projektionsebene gelten kann, in (f', f), daher $f\,\varphi$, parallel zu $J\,n$, Horizontalriß der durch $(J\,n, i'\,n'$ und (s, s') gelegten Ebene, welche somit die zweite Erzeugungslinie des Paraboloides in φ schneidet. Durch diesen Punkt geht eine Erzeugungslinie des zweiten Systemes, deren Projektion $\varphi\,r$ parallel zu $A\,B$ sein muß, weil die Vertikalebene $A\,B$ Leitebene des zweiten Systemes ist. r bleibt auf $n'\,i'$ nach r' zu projiciren und die Projektionen des auf $(J\,n, i'\,n')$ liegenden Kurvenpunktes sind bestimmt.

Punkt (t, t') auf der Erzeugungslinie $(p\,J\,m, o'\,p'\,m')$: für das hier tangirende Hilfsparaboloid ändert sich nur die Kreistangente ab, welche jetzt die Lage $(p'\,v', p\,v)$ annimmt. Auch (f, f') bleibt ungeändert und $f\,x$, parallel zu $J\,p$, ist der Horizontalriß der jetzigen durch $(J\,p, i'\,p')$ und (s, s') gehenden Ebene. Der Riß schneidet die Erzeugungslinie des zweiten Systemes, nämlich die Gerade $v\,J$ in x und $x\,t$ parallel zu $A\,B$ ist die Projektion der Erzeugungslinie des zweiten Systemes, welche auf $(p\,J, p'\,i')$ den Berührungspunkt (t, t') abschneidet.

Je näher bei der Diametralebene $X'\ Y'$ die Erzeugungslinien liegen, auf welchen Punkte der Berührungslinie gesucht werden, je weiter vom Centrum (j, J) entfernt werden diese Punkte fallen, und sie werden in unend-

liche Entfernung übergegangen sein, wenn man versucht, die Konstruktion auf die Erzeugungslinie $(j' A', J A)$ oder $(j' B', J B)$ anzuwenden. Demzufolge tritt die Gerade $A' B'$ als gemeinsame Asymptote der Kurvenäste $D' t' x' \ldots$, $D' r' \ldots$, $C' \zeta' z' \ldots$, $C' \psi' y'$ auf. Daß diese Aeste durch D', beziehungsweise C' gehen und hier einen Schnabel bilden, wird gefunden werden, sobald man die Konstruktion auf jene Punkte der Berührungslinie richtet, welche der Erzeugungslinie $(D', D J)$ oder $(C', D J)$ angehören.

316. Aufgabe. Dem Conoide Fig. *216* soll eine tangirende Cylinderfläche umschrieben werden, deren gerade Erzeugungslinien parallel sind der Geraden (G, G').

Bestimmung eines Punktes der Berührungslinie beider Flächen, z. B. desjenigen, welcher der Erzeugungslinie $(i' n', J n)$ angehört. Das hier tangirende Hilfsparaboloid ist gelegenheitlich der vorigen Aufgabe erklärt worden. Man lege durch einen Punkt der Erzeugungslinie eine Parallele zu (G, G'). $(J f, i' f')$ sei diese Parallele, durch sie und die Erzeugungslinie werde eine Ebene gelegt und deren Berührungspunkt (r', r) wie vorhin bestimmt.

317. Aufgabe. An ein windisches Conoid soll eine berührende Ebene gelegt werden, welche parallel ist einer bestimmten Ebene H.

Konstruktion. In der Ebene H nehme man beliebig zwei gerade Linien G und J an; man konstruire nach §. 316 eine das Conoid tangirende Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien parallel sind der Geraden G, und bestimme die beiderseitige Berührungslinie. Man konstruire eine zweite, das Conoid tangirende Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien parallel sind der Geraden J, und bestimme gleichfalls ihre gegenseitige Berührungslinie. Die zwei Berührungslinien werden sich auf dem Conoid begegnen; an dem Kreuzungspunkte ziehe man erstlich eine Parallele zu G, welche die Fläche tangiren wird; zweitens ziehe man in demselben Punkte eine Parallele zu J, welche abermals eine Tangente der windischen Fläche sein wird. Eine Ebene durch beide Gerade gelegt, entspricht den Bedingnissen der Aufgabe, denn sie geht durch zwei Tangenten des Conoides, berührt also dasselbe, und sie ist zu H parallel, weil die Tangenten es sind.

Zusatz I. Fänden mehrere Durchkreuzungen der zwei Berührungslinien statt, so würde sich durch jeden Punkt, wo dies geschieht, eine zu H parallele tangirende Ebene des Conoides legen lassen. — Die Auflösung wäre unmöglich, wenn die zwei Berührungslinien keinen gemeinsamen Punkt ergäben, oder wenn eine dieser Linien selbst unmöglich zu konstruiren bliebe.

Zusatz II. Auf irgend eine besondere Eigenthümlichkeit des windischen Conoides hat die soeben erläuterte Konstruktion keinen Bezug, sie ist vielmehr ganz allgemeiner Natur, und auf jedwede windische Fläche, sowie auf krumme Flächen im Allgemeinen anwendbar. Ob sie überhaupt ein Ergebniß liefert, wird von der besondern Lage der Ebene H gegen die krumme Fläche abhängen.

318. Tangirende Kegel- und Cylinderflächen der windischen Helikoide.

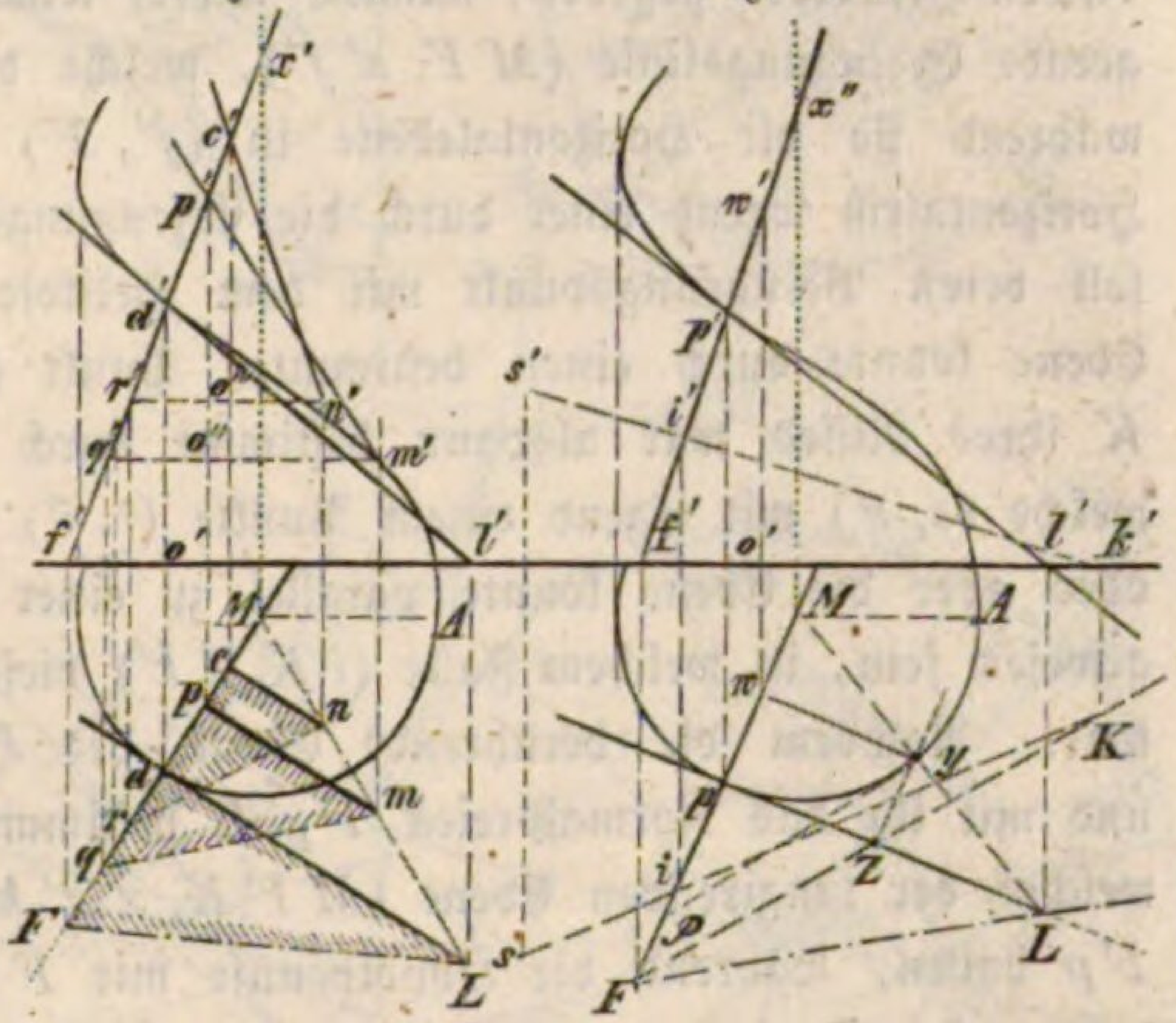
Ueberblicken wir noch einmal im Ganzen die Behandlungsweise der hier vorliegenden Fragen, insoweit sie sich auf windische Flächen überhaupt beziehen:

Jede Ebene, welche durch eine gerade Erzeugungslinie solcher Flächen gelegt worden, oder werden soll, ist auch eine tangirende Ebene dieser Fläche, §. 211. Ordnet man daher eine Reihe von Ebenen an, sämmtlich durch den Scheitel der Kegelfläche gehend und jede einzelne noch durch eine Gerade der windischen Fläche, so sind dies eben so viele gemeinsame tangirende Ebenen dieser Fläche, wie der umschriebenen Kegelfläche. Wurden die Berührungspunkte und mit diesen die Berührungslinie beider Flächen festgesetzt, so ist die Aufgabe gelöst, weil vermittelst des Scheitels und der Berührungslinie die Kegelfläche ihre vollständige Definition gefunden hat. Bezüglich tangirender Cylinderflächen erleidet die vorstehende Konstruktion nur darin eine Abänderung, daß sämmtliche Hilfsebenen, anstatt sich im Scheitel zu durchschneiden, jetzt einer gegebenen Geraden parallel zu ordnen sind. Schließlich beschränkt sich somit unsere Aufgabe auf die Forderung, den Berührungspunkt einer Ebene zu bestimmen, welche durch eine gerade Erzeugungslinie irgend einer windischen Fläche geht. — §. 211 giebt hierzu eine Anleitung, der man folgen wird, wenn in den Eigenthümlichkeiten der Fläche kein kürzerer Weg zu finden ist. Einen solchen aber gestatten meistens die berührenden Hyperboloide oder Paraboloide, welche letztere bezüglich der Helikoide bereits in §§. 224, 253 u. f. erörtert wurden. Aber die Eigenthümlichkeiten dieser Flächenart liefern Mittel zu noch anderer Vereinfachung.

319. In Fig. *221* (§. 253) ist M die Achse eines allgemeinen windischen Helikoides, $FM, f'x'$ eine gerade Erzeugungslinie dieser Fläche und $(dL, d'l')$, $(pm, p'm')$, $(cn, c'n')$ sind die Tangenten der Spiralen des Helikoides, welche den Berührungspunkten (d, d'), (p, p'), (c, c') entsprechen. Es ist nachgewiesen worden, daß die Längen der Tangenten, beziehungsweise ihrer Projektionen dL, pm, cn, durch die Gerade LM

bestimmt werden, wenn man dabei unterstellt, daß die Fußpunkte der Tangenten nebst den Anfangspunkten der zugehörigen Spiralbögen in solchen Horizontalebenen $o' l'$, $o'' m'$, $o''' n'$ liegen, wofür die Höhenunterschiede $d' o'$, $p' o''$, $c' o'''$ einander gleich genommen worden. Dies Alles soll auch in Fig. 222 gleichmäßig der Fall, und den gleichen Buchstaben die gleiche Geltung beizumessen sein, wie in Fig. 221, wobei nur etwa zu bemerken, daß A der Ursprung der Spiralen, und darum die Länge von $d\,L$ gleich der Länge des abgewickelten Bogens $A\,d$ zu nehmen war.

Fig. 221. Fig. 222.



Nun sieht man $(F M, f' x')$ durch die horizontale Projektionsebene in $(f' F)$ geschnitten, durch die Horizontalebene $m' o''$ in (q', q) und durch die Horizontalebene $n' o'''$ in (r', r'). Es ist darum $L M$ Horizontalriß der tangirenden Ebene des Helikoides am Punkte (d, d'), $m\,q$ Riß der tangirenden Ebene des Punktes (p', p) und $n\,r$ Riß der tangirenden Ebene des Punktes (c', c'), diese letzten Risse nämlich in den Horizontalebenen $m' o'' q'$ und $n' o''' r'$ genommen. Wie groß nun die Zahl solcher Risse sei, die Stücke derselben zwischen den Geraden $L M$ und $F M$, nämlich die Geraden $L F$, $m\,q$, $n\,r$ .... ꝛc. nebst den zugehörigen Tangenten $L\,d$, $m\,p$, $n\,c$ .... ꝛc. werden rechtwinklige Dreiecke $L\,d\,F$, $m\,p\,q$, $n\,c\,r$ .... ꝛc. bilden, von der Beschaffenheit, daß die auf $M\,F$ liegenden Katheten $d\,F$, $p\,q$, $c\,r$ .... ꝛc. gleiche Größe haben. Denn wegen den gleichen Höhen $d' o'$, $p' o''$, $c' o'''$ sind die rechtwinkligen Dreiecke $d' o' f'$, $p' o'' q'$, $c' o''' r'$ ... ꝛc. einander gleich, also auch $d' f' = p' q' = c' r'$ .... ꝛc. Sind aber auf einer Projektion einer Geraden gleiche Theile abgeschnitten, so müssen auch die gleichnamigen Theile der andern Projektion unter sich gleich sein, d. h. man wird haben $d\,F = p\,q = c\,r$ .... ꝛc. — Diese projektive Eigenthümlichkeit der tangirenden Ebenen eines allgemeinen windischen Helikoides, deren Berührungspunkte einer und derselben geraden Erzeugungslinie angehören,

diese Eigenthümlichkeit, sage ich, ist es, welche für das Nächstfolgende im Auge behalten werden wolle.

Es seien sofort in Fig. *222* wieder die Erzeugungselemente eines windischen Helikoides gegeben, nämlich Achse, leitende Schraubenspirale und eine gerade Erzeugungslinie ($MF, x'f'$), welche die Spirale in (p', p') kreuzt, während sie die Horizontalebene in (f', F) durchschneidet. FK sei der Horizontalriß irgend einer durch die Erzeugungslinie gehenden Ebene und es soll deren Berührungspunkt mit dem Helikoid verzeichnet werden. — Die Ebene konnte durch einen bestimmten Punkt (s, s') gehen, und der Punkt K ihres Risses war alsdann bestimmt durch die Gerade ($s\,i\,K, s'\,i'\,k'$), welche (s, s') mit irgend einem Punkte ($i. i'$) der Erzeugungslinie verbindet; oder aber die Ebene konnte parallel zu einer bestimmten Geraden zu legen gewesen sein, in welchem Falle ($i\,K, i'\,k'$) dieser Geraden parallel zu nehmen war. Nachdem die berührende Ebene des Helikoides am Punkte (p, p') und mit ihr das Normaldreieck $F\,p\,L$ bestimmt worden, mußte das Dreieck, welches der tangirenden Ebene ($MFK, x'f'k'$) entspricht, eine Seite gleich Fp haben, während die Hypothenuse mit FK parallel liegt. $F\,p\,Z$ ist daher dies Dreieck der Gestalt nach, allein es muß noch parallel zu sich selber so verschoben werden, daß Z auf ML fällt. Solches geschieht mittelst einer durch Z gehenden Parallelen zu FM, welche ML in y schneidet. Wenn hier $y\,w$ parallel mit $p\,Z$ gezogen wird, so ist w die Horizontalprojektion des gesuchten Berührungspunktes, deren entsprechende Vertikalprojektion w' sich sofort findet. — Man sieht, daß, sobald der Fußpunkt F der Erzeugungslinie, sowie der Riß FK der berührenden Ebene gegeben war, alles Uebrige auf eine rein lineare Konstruktion hinausläuft, wozu die Vertikalprojektion in keiner Weise mehr mitwirkt.

320. Die Fig. *223* und *224* zeigen das allgemeine Helikoid in ähnlicher Anordnung wie Fig. *191*; es ist begränzt durch jene Spirale, auf welcher die Erzeugungslinien nach anderthalb Umdrehungen sich kreuzen. Diese Spirale ward zugleich als Leitlinie angenommen. Bei einer Theilung des Grundkreises in 12 gleiche Bögen war in der Vertikalprojektion die Verbindungslinie von *0'* mit *6'* des zweiten Umganges als erste Erzeugungslinie zu betrachten, auf welche sodann die Verbindungslinien von *1'* mit *7'*, von *2'* mit *8'* u. s. w. folgten. Den Halbmesser $C\,a$ der Kernspiralen fand man mittelst des Kreuzungspunktes a' der ersten Erzeugungslinie und derjenigen *6' 1'* des ersten halben Umganges, welcher Punkt nach a herabzuprojiciren war.

Fig. 223.

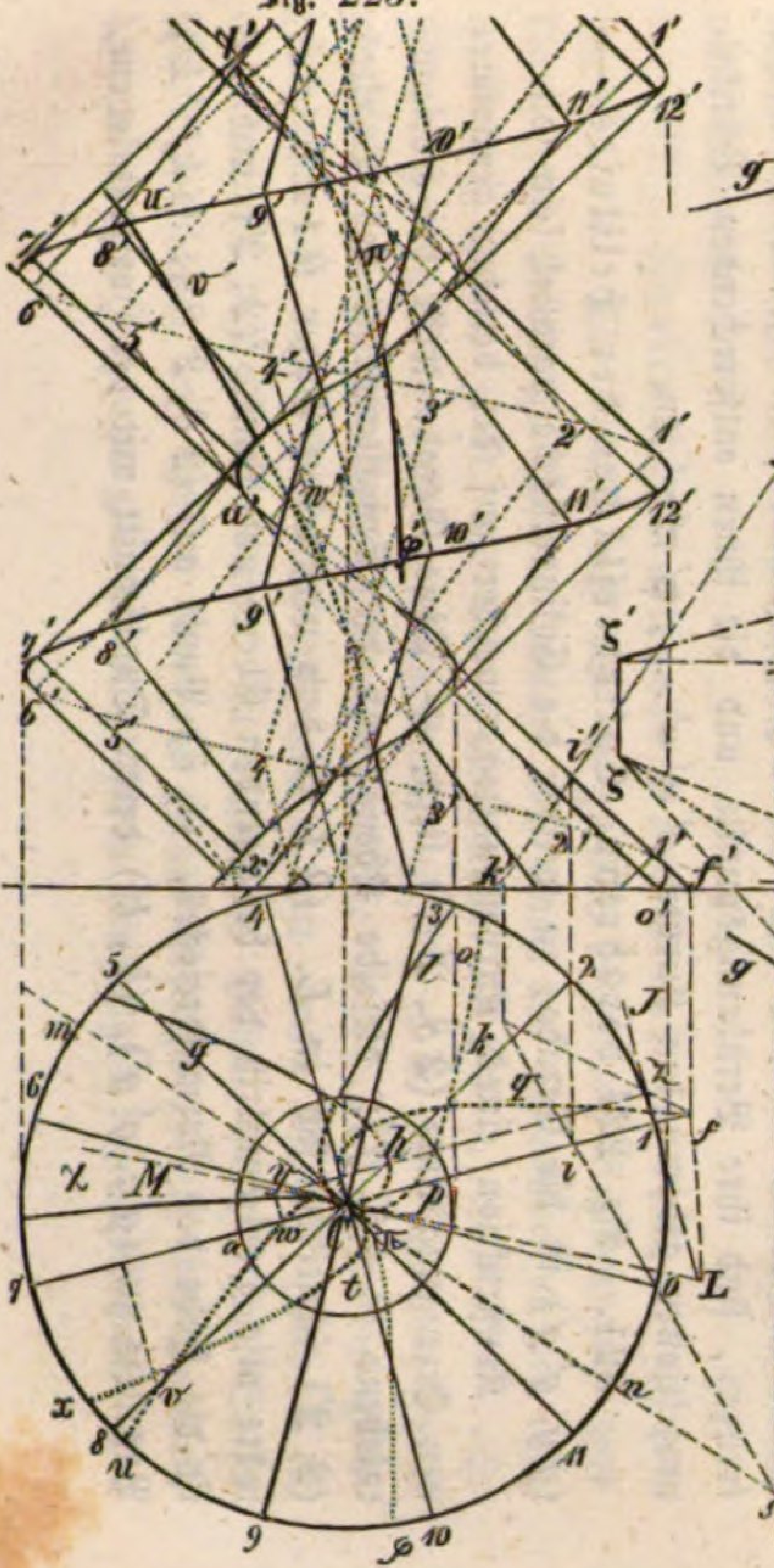


Fig. 224.

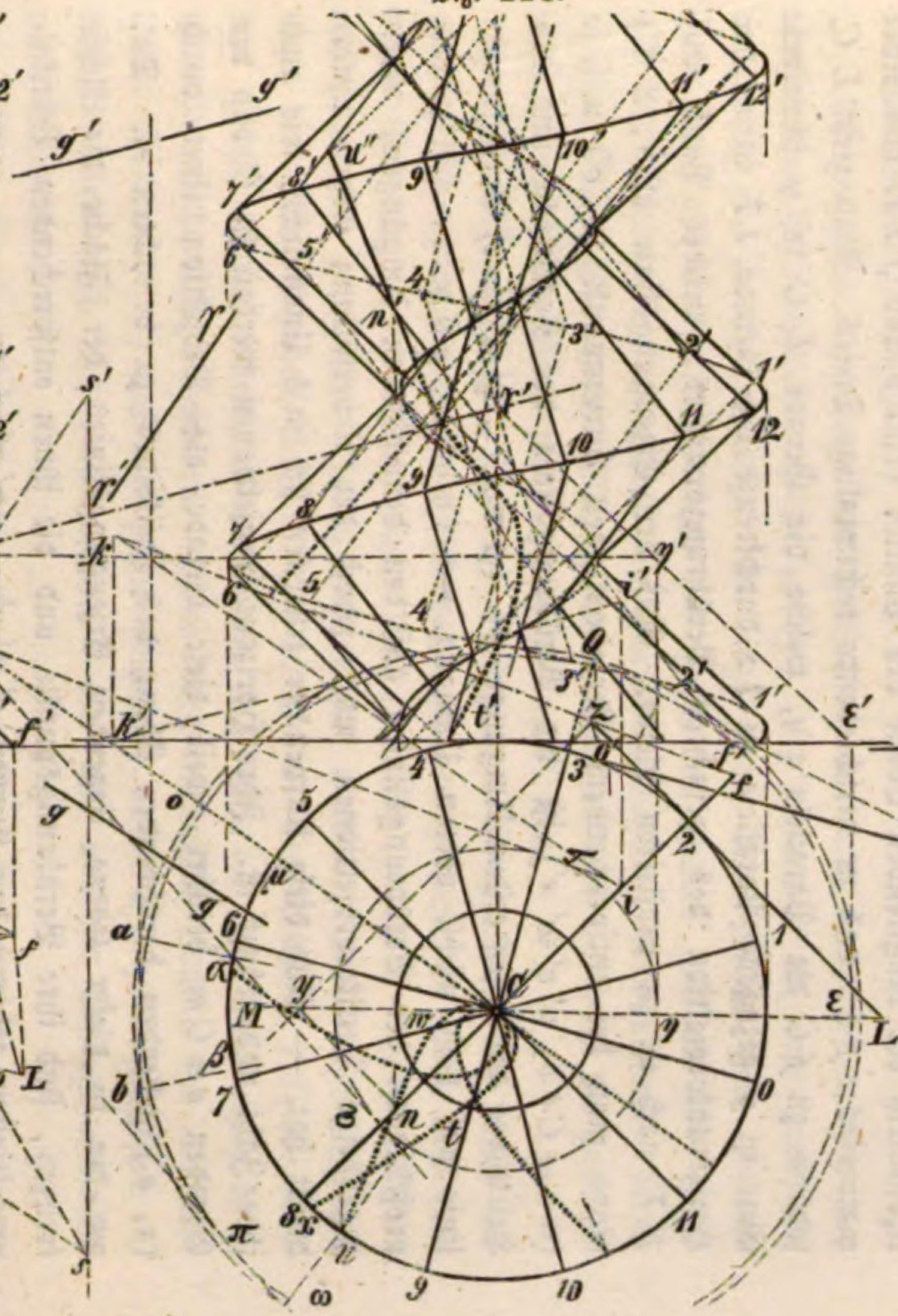


Fig. 225.

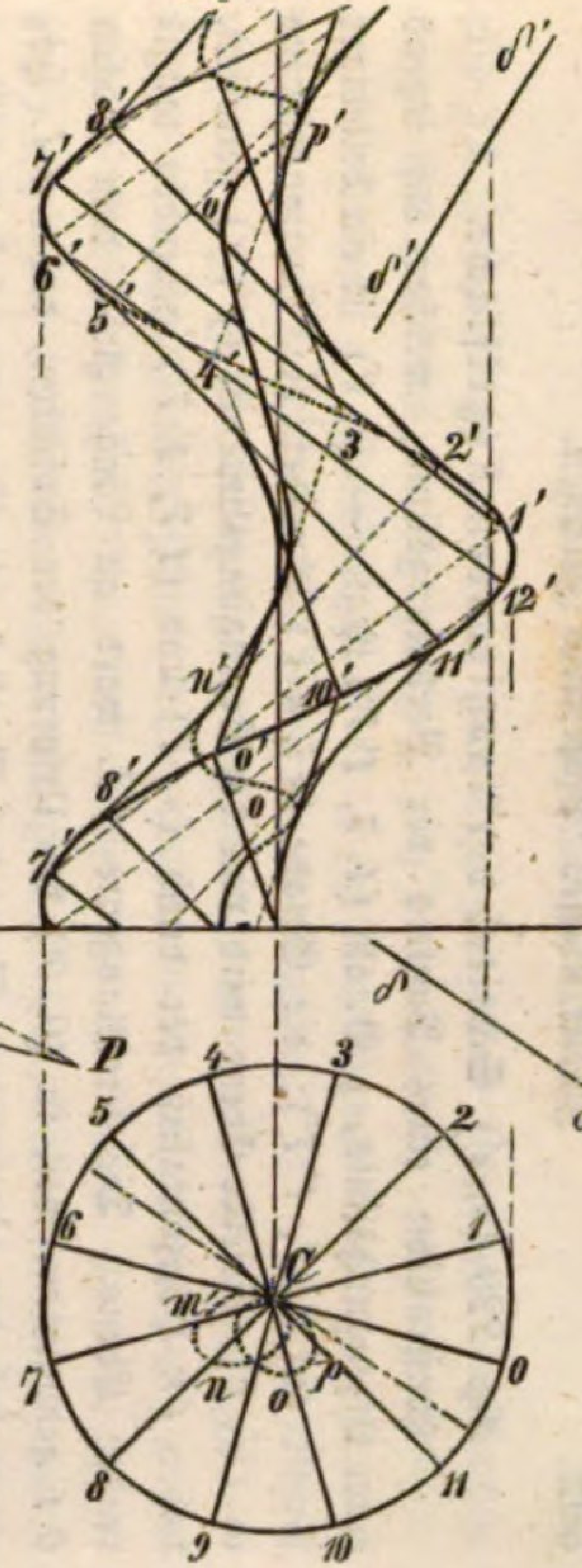


Fig. 223 (s, s') Scheitel der tangirenden Kegelfläche.

Konstruktion eines Punktes der Berührungslinie, welcher auf irgend einer Erzeugungslinie, z. B. auf $(1.7, 1'7')$ liegt. — (i, i') ist ein beliebiger Punkt auf $(1\,7, 1'\,7')$; die Gerade $(s\,i, s'\,i')$ schneidet die Horizontalebene in (k', k), dieselbe Ebene wird von der Erzeugungslinie in (f', f) getroffen, daher $f\,k$ Horizontalriß der durch (s, s') und $(1\,7, 1'\,7')$ gehenden tangirenden Ebene. Die Kreistangente $1\,L$ ward an Länge gleich dem Bogen $0\,1$ genommen, weil in $(0, 0')$ der Ursprung der Spiralen, daher $f\,L$ Horizontalriß der tangirenden Ebene des Punktes $(1, 1')$ und $f\,1\,L$ das Normaldreieck; $f\,1\,z$ das zu verschiebende rechtwinklige Dreieck. Man zieht $L\,C$, sodann zu $f\,C$ die Parallele $z\,y$, welche die Gerade $L\,C$ in y schneidet. Eine in y gezogene Parallele zu $1\,z$ durchkreuzt die Gerade $1\,7$ in w der Horizontalprojektion des gesuchten Berührungspunktes, welcher Punkt auf $1'\,7'$ nach w' zu projiciren bleibt. Auf der Erzeugungslinie $(2\,8, 2'\,8')$ fände man bei entsprechendem Verfahren den Kurvenpunkt (v, v') u. s. f. $(u\,v\,w\,C\,t\,x, u'\,v'\,w'\,x')$ ist die Berührungslinie der Kegelfläche und des Helikoides auf dessen erstem Umgange. — $(\varphi\,\pi\,\chi\,.., \varphi'\,\pi'\,\chi'\,..)$ Berührungslinie auf dem nächst oberen Umgang. — $l\,n\,o\,...,\ g\,h\,q\,...$ Horizontalprojektionen der Berührungslinien auf den benachbarten Umgängen, deren zugehörige Vertikalprojektionen man jedoch der Ueberfüllung wegen unterdrückt hat. — Alle diese Kurvenäste erstrecken sich in's Unendliche, wie auch ihre Zahl unbegränzt ist. Ihre Horizontalprojektionen werden in C von der Geraden $s\,n\,C\,m$ berührt, weil diese Gerade als Projektion einer durch (s, s') gehenden berührenden Ebene des Helikoides zu betrachten ist. Da, wo die in dieser Ebene liegenden Erzeugungslinien der Fläche die Achse kreuzen, sind ihre Berührungspunkte und die ihnen entsprechenden Vertikalprojektionen gehören den Kurven $x'\,w'\,u'\,...,\ \varphi'\,\pi'\,\chi'$ an.

321. Fig. 224 berührende Cylinderflächen der Helikoide. — $(g\,g, g'\,g')$ ist die Gerade, zu welcher die Cylinderfläche parallel sein soll.

Konstruktion eines Kurvenpunktes, welcher auf der beliebig genommenen Erzeugungslinie $(2\,8, 2'\,8')$ liegt. — Diese Gerade trifft die Horizontalebene in (f', f); dieselbe Ebene und die Spiraltangente des Punktes $(2, 2')$ schneiden sich in L. ($2\,L$ = dem verstreckten Bogen $0\,1\,2$.) $f\,L$ wäre also Horizontalriß der berührenden Ebene am Punkte $(2, 2')$ und $f\,2$ ist die Höhe des Normaldreieckes, (i, i') Punkt auf $(2\,8, 2'\,8')$, $(i\,k, i'\,k')$ Parallele zu $(g\,g, g'\,g')$, (k', k') deren Durchschnitt mit der Horizontalebene,

also $f\,k$ Horizontalriß der durch die Erzeugungslinie gehenden tangirenden Ebene des Helikoides, welche zu $(g\,g,\ g'\,g')$ parallel ist; $z\,2\,f$ zu verschiebendes Dreieck; $z\,y$ Parallele zu $2\,8$, y ihr Schnitt mit $L\,C$, $y\,n$ parallel mit $z\,2$, $n,\ n'$ Projektionen des Berührungspunktes u. s. w. $(u\,n\,w\,C\,t\,x\,..,\ u'\,n'\,t'\,...)$ ist die Berührungslinie des Helikoides und der tangirenden Cylinderfläche. Die Horizontalprojektion dieser Kurve berührt in C den zu $g\,g$ parallelen Kreisdurchmesser $C\,\mu$, weil dieser die Projektion einer zu $(g\,g,\ g'\,g')$ parallelen berührenden Ebene des Helikoides ist, deren Berührungspunkt der Senkrechten C angehört.

Einem jeden Umgange des Helikoides entspricht ein neues Netz der tangirenden Cylinderfläche, welche zu $(g\,g,\ g'\,g')$ parallel ist, und somit ein neuer Ast der Berührungslinie. Es liegt jedoch kein Grund vor, warum diese Linie auf einem Flächennetze des Helikoides anders gebildet sein sollte als auf dem andern, weshalb die Berührungslinien, oder vielmehr deren einzelne Aeste, sich darum völlig gleichen, und $u\,v\,w\,C\,t\,x$ wird die gemeinsame Horizontalprojektion ihrer endlosen Anzahl sein.

322. Anmerkung. Daß bei vorstehender Konstruktion alle durch die geraden Erzeugungslinien des Helikoides gehenden Hilfsebenen einer und derselben Geraden parallel sind, dieser Umstand kann zu einer namhaften Vereinfachung der graphischen Arbeit ausgebeutet werden, dadurch nämlich, daß man bei allen Geraden $2\,8,\ 3\,9,\ 6\,10\,...$ rc. die Abstände $f\,2,\ 2\,i$ stets von gleicher Größe nimmt, wodurch auch $2\,L$ und $i\,k$ eine beständige, d. h. unveränderliche Länge erhalten. Hätte man anfänglich anstatt des willkürlichen Punktes $(i,\ i')$ auf $2\,8$ jenen gewählt, dessen Horizontalprojektion C ist, so blieb auch das entsprechende k für alle anderen Erzeugungslinien unveränderlich.

323. Zweite Konstruktionsart der Berührungspunkte $(u,\ u')$, $(u,\ n')$ .. rc. Sie beruht auf den in §. 255 erörterten Beziehungen, und dient, jene Punkte zu finden, welche auf einer der Schraubenspiralen des Helikoides liegen, z. B. auf der Gränzspiralen $(1\,2\,3\,....,\ 1'\,2'\,3'\,...)$. Man nehme auf ihr beliebig einen Punkt, $(3,\ 3')$ z. B. Die gerade Erzeugungslinie dieses Punktes schneidet die Achse in $(\gamma',\ C)$ und die Horizontalebene in $(o',\ O)$. Nachdem aus C mit einem Radius gleich $C\,O$ ein Umkreis beschrieben worden, ist dieser die Basis, $(C,\ \gamma')$ die Spitze jener Kegelfläche, von welcher eine jede gerade Erzeugungslinie ihre Parallele hat, unter den Erzeugungslinien eines jeden Umganges des Helikoides. Die

Spiraltangente am Punkte (3, $3'$) durchdringt die Horizontalebene in P. ($3\,P$ gleich der Länge des Bogens $0\,1\,3$.) Daher $O\,P$ Horizontalriß der tangirenden Ebene an oben genanntem Punkte. Wird auf diesen Riß aus C ein Perpendikel gefällt, und mit dessen Länge als Radius aus C abermals ein Umkreis beschrieben, so ist dieser der Basis der zweiten Kegelfläche von gleicher Spitze wie die erste, und von der Eigenthümlichkeit, daß einer jeden tangirenden Ebene der Fläche eine derartige Ebene des Helikoides entspricht, welche ihr parallel liegt und ihren Berührungspunkt auf der Spiralen ($1\,2\,3\,\ldots$, $1'\,2'\,3'\,\ldots$) hat. $P\,O\,C$ ist der unveränderliche Winkel, welchen der Horizontalriß einer solchen Ebene mit der Projektion $C\,3\,O$ der Erzeugungslinie des Berührungspunktes bildet. Es handelt sich darum, die tangirende Ebene der zweiten Kegelfläche zu bestimmen, welche parallel liegt der Geraden ($g\,g$, $g'\,g'$). Zu dem Ende wird durch den Scheitel eine Gerade ($C'\,\zeta$, $\gamma'\,\zeta'$) parallel zu ($g\,g$, $g'\,g'$) gelegt, und deren Durchschnitt mit der Horizontalebene festgesetzt, von hier aus zwei Tangenten an die Basis der Kegelfläche zu ziehen. Dieser Durchschnitt fällt aber außerhalb des Rahmens unserer Figur, weshalb wir eine näher beim Scheitel liegende horizontale Hilfsebene $\eta'\,\zeta'$ in Thätigkeit setzen. Diese schneidet die Gerade ($C\,\varepsilon$, $\gamma'\,\varepsilon'$) der Kegelfläche in (η, η'), diese selbst also nach einem Kreise vom Radius $C\,\eta$, welcher sich nach $\eta\,\tau\,\sigma$ projicirt. Dieselbe Hilfsebene und die Gerade ($C\,\zeta$, $\gamma'\,\zeta'$) treffen sich in (ζ, ζ'). Nachdem aus ζ an letztgenannten Kreis die Tangenten $\zeta\,\tau$, $\zeta\,\sigma$ gezogen worden, bleiben die Tangenten der Kegelbasis zu ziehen, welche jenen parallel sind. $\pi\,\omega$ parallel zu $\zeta\,\sigma$ ist eine davon, sie schneidet die Basis der ersten Kegelfläche in ω, diese Fläche selbst also nach der Geraden, welche $C\,\omega$ als Projektion hat. Durch letztere Gerade wird auf $1\,2\,3\,\ldots$ der Punkt u abgeschnitten, welche nach u' zu projiciren bleibt. Vermittelst einer zu $\zeta\,\tau$ parallelen Tangente findet sich, bei gleichmäßigem Verfahren, der zweite Berührungspunkt x.

324. Den Umriß der Vertikalprojektion des Helikoides bestimmten wir bis daher dadurch, daß die Linie, welche diesen Umriß bildet, tangirend an die Projektion aller geraden Erzeugungslinien gezogen ward, was in praktischer Hinsicht auch völlig genügt. Durch die Anwendung der beiden Kegelflächen vom Scheitel (C, γ') aber lassen sich die Punkte der fraglichen Umrisse vermittelst direkter Konstruktion finden, denn sie sind die Projektionen der Berührungspunkte des Helikoides und solcher tangirender Ebenen, welche auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehen und deren Horizontalrisse

folglich rechtwinklig gegen die Grundlinie gerichtet sind. Nachdem daher die beiden Kreise vom Radius CO und $C\varepsilon$ verzeichnet sind, darf nur an letzteren eine Tangente ab senkrecht gegen die Grundlinie gezogen werden; ihre Schnitte a, b mit dem ersten Kreise bestimmen die Projektionen Ca, Cb zweier Erzeugungslinien, welche auf dem Kreise 123 die Punkte α, β abschneiden. Sind diese auf $1'2'3'\ldots$ projicirt worden, so bestimmen sie hier Punkte der fraglichen Umrisse. Andere Punkte dieser Linie ergeben sich bei Inbetrachtnahme anderer Schraubenspiralen der Fläche.

325. Bei der Konstruktion von Cylinderflächen, welche windische Helikoide tangiren, ist die Neigung der Geraden $(gg, g'g')$ gegen die Horizontalebene ins Auge zu fassen. In unserer Fig. 224 ist diese Neigung augenscheinlich geringer als die Neigung der geraden Erzeugungslinien des Helikoides, und die Horizontalprojektion aller Berührungslinien ist eine einzige Kurve $unwCtx$. Es könnte aber die Neigung von $(gg, g'g')$ gerade gleich sein der Erzeugungslinie. Dies ist der Fall mit der Geraden $(gg, \gamma'\gamma')$. Eine dem Helikoide umschriebene Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien dieser Geraden parallel sind, berührt das Helikoid nach einer Kurve, deren Horizontalprojektion unsere Figur zeigt; zweitens aber findet man, wie die ausgeführte Konstruktion lehren wird, noch eine zu gg parallele Gerade $C\mu$. Ich sage, die Konstruktion führt auf diese Gerade, aber sie ist nicht anders zu betrachten, denn schlechtweg als eine Folgerung der Konstruktion und keineswegs als die Projektion eines Astes der Berührungslinie. Denn eine gerade Linie, welche durch C geht, als Projektion einer Linie des Helikoides betrachtet, muß nothwendig eine von dessen geraden Erzeugungslinien sein; wäre sie nun zugleich eine Berührungslinie der Art, daß jede sie schneidende und zu $(gg, \gamma'\gamma')$ parallele Gerade eine Tangente des Helikoides wäre, so bildeten diese Tangenten eine ebene Fläche, welche das Helikoid in allen Punkten der Geraden berührte, was aber der Natur windischer Flächen nach unmöglich ist. — Schließlich sei über die Lage von $(gg, \gamma'\gamma')$ noch angeführt, daß die Horizontalprojektion gg beliebig genommen werden konnte; dachte man sich aber durch den Scheitel der Kegelfläche (C, γ') eine Parallele zu der Geraden, so mußte sie die Horizontalebene in O schneiden. Es blieb also O auf die Grundlinie $\zeta'p'$ nach o' zu projiciren (der Punkt ist nicht verzeichnet) und mit $\gamma'o'$ mußte $\gamma'\gamma'$ parallel genommen werden.

326. Es bleibt uns noch des möglichen dritten Falles Erwähnung zu thun; des Falles nämlich, wobei die Gerade, zu welcher die Erzeugungslinien der tangirenden Cylinderfläche parallel sein sollen, eine stärkere

Neigung gegen die Horizontalebene habe, als die Geraden des Helikoides, daß also eine durch (C, γ') geführte Parallele in's Innere der Kegelfläche dringe. In diesem Falle würde die Berührungslinie ganz dem Kerne des Helikoides angehören (§. 249). Wir haben diesen Fall in Fig. 225 und in etwas größerem Maßstabe behandelt. $(\delta\,\delta,\ \delta'\,\delta')$ ist hier die Gerade, zu welcher die geraden Erzeugungslinien der tangirenden Cylinderfläche parallel sein sollen. Zur Ausführung der Konstruktion empfiehlt sich die Methode von §. 323. Sie lieferte eine Kurve, deren Horizontalprojektion die Gestalt einer geschlossenen Schleife $m\,n\,C\,o\,p$ angenommen. Die Vertikalprojektion $n'\,m'\,o'\,p'$ wiederholt sich in's Endlose. Je steiler die Steigung von $(\delta\,\delta,\ \delta'\,\delta')$, je mehr zusammengezogen wird die Berührungslinie erscheinen, und sie wird sich auf die Achse der Fläche reduciren, sobald $(\delta\,\delta,\ \delta'\,\delta')$ dieser Achse selbst parallel genommen wird. Eine nähere Erörterung dieses letzten Falles führt übrigens wieder zu Häkeleien, ähnlich denen, welchen wir im vorigen §. begegneten, und wie sie bei geometrischen Diskussionen bisweilen störrig im Wege liegen.

327. Tangirende Kegel- und Cylinderflächen an das windische Helikoid mit einer Leitebene (vergl. §. 223).

Fig. 226 tangirende Kegelfläche. Wiederum befindet sich die Achse der Fläche in ihrer normalen Stellung, nämlich in vertikaler, und hat den Punkt C zur Horizontalprojektion; die Leitebene ist demzufolge horizontal. Die leitende Schraubenspirale hat als Horizontalprojektion den Kreis $0\,1\,2\,3 \ldots x$ und als Vertikalprojektion die entsprechende Kurve $0'\,1'\,2'\,3 \ldots$ ꝛc. Die Punkte $(0, 0')$, $(1, 1')$, $(2, 2') \ldots$ ꝛc. gehören einer Cylinderfläche an, welcher der Kreis $0\,1\,2 \ldots$ als Basis dient, und durch diese Fläche werden die geraden Erzeugungslinien noch in einer zweiten Reihe von Punkten $(6, 0')$, $(7, 1')$, $(8, 2') \ldots$ ꝛc. geschnitten, welche auf einer zweiten, der ersten gleichen Schraubenspirale ihren Ort finden; beide Spiralen zusammen sind in der Figur als Gränzen des Helikoides behandelt worden. — (s, s') gegebener Scheitel der tangirenden Kegelfläche. — Durch diesen Scheitel und durch je eine gerade Erzeugungslinie des Helikoides gehen Ebenen, welche die Fläche in Punkten (m, m'), $(n, n') \ldots$ ꝛc. der zu konstruirenden Berührungslinie tangiren. Zur Bestimmung solcher Punkte dient im vorliegenden Falle wieder in bequemer Weise das Hilfsparaboloid, welches das Helikoid längs einer bezeichneten Erzeugungslinie berührt. Als Erzeugungselemente all' dieser unter sich gleichen Paraboloide hat man erstens die horizontale Leitebene, zweitens die Achse des Helikoides als erste Leitlinie, und drittens die Tan-

Fig. 226.

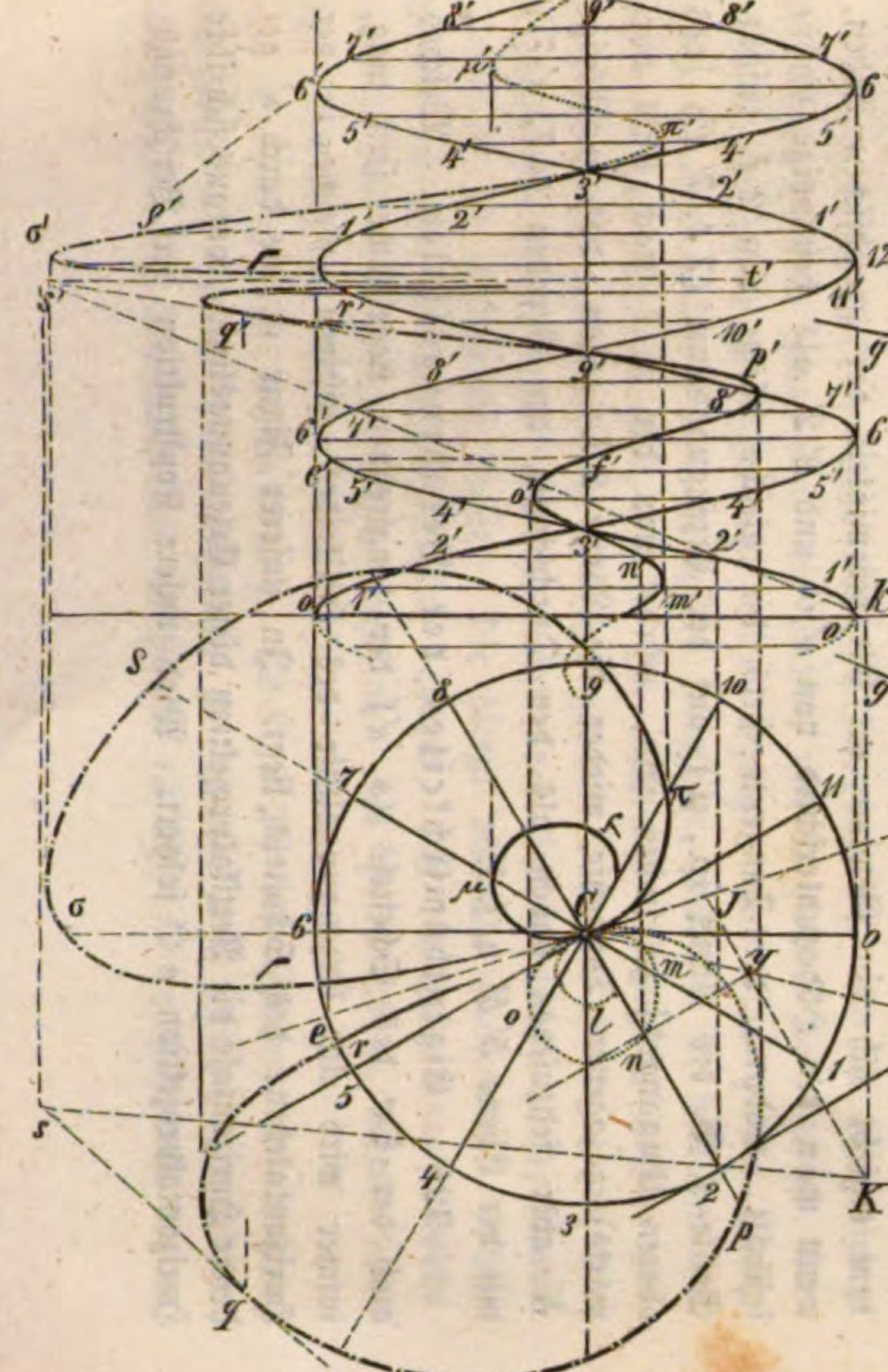


Fig. 227.

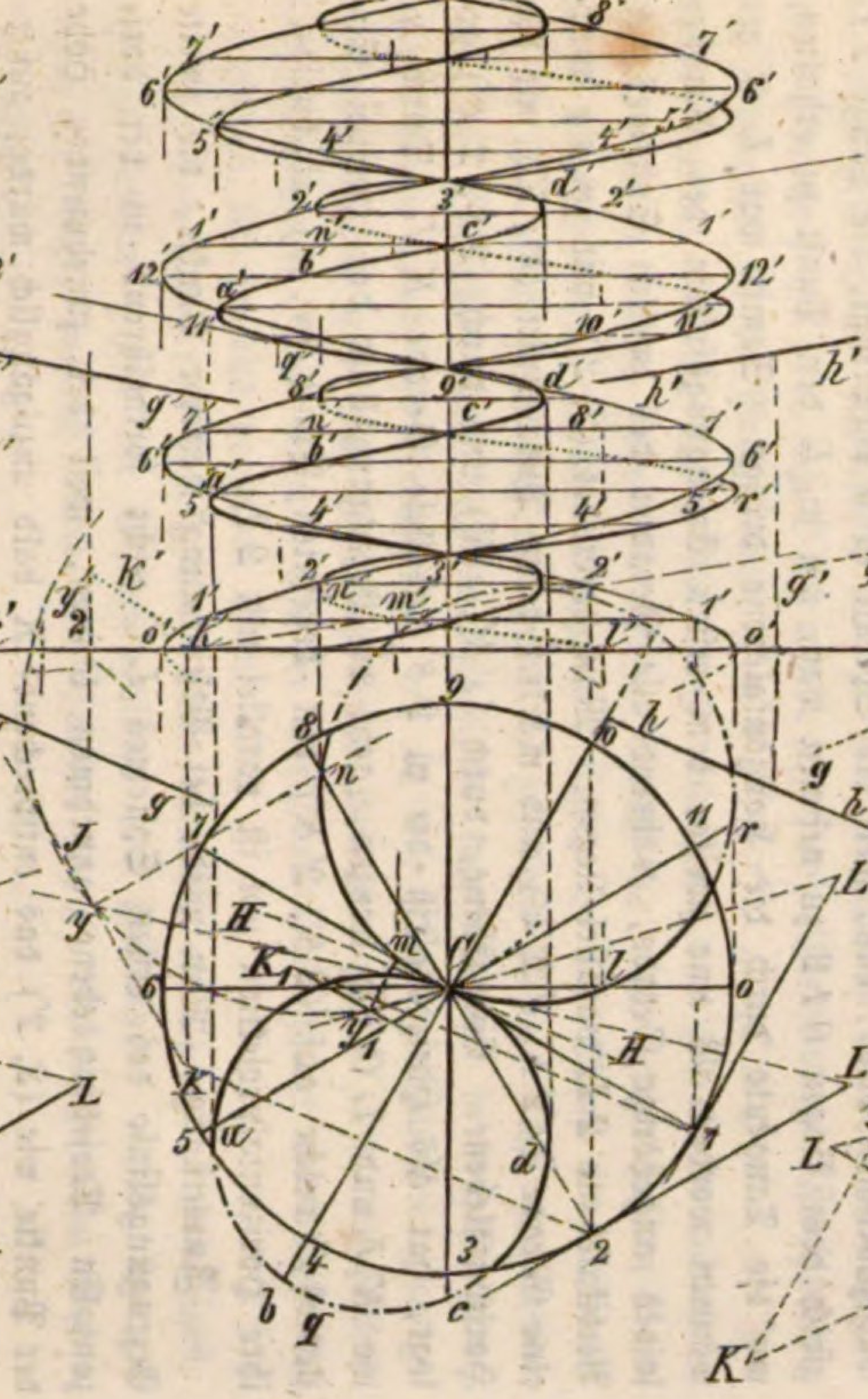
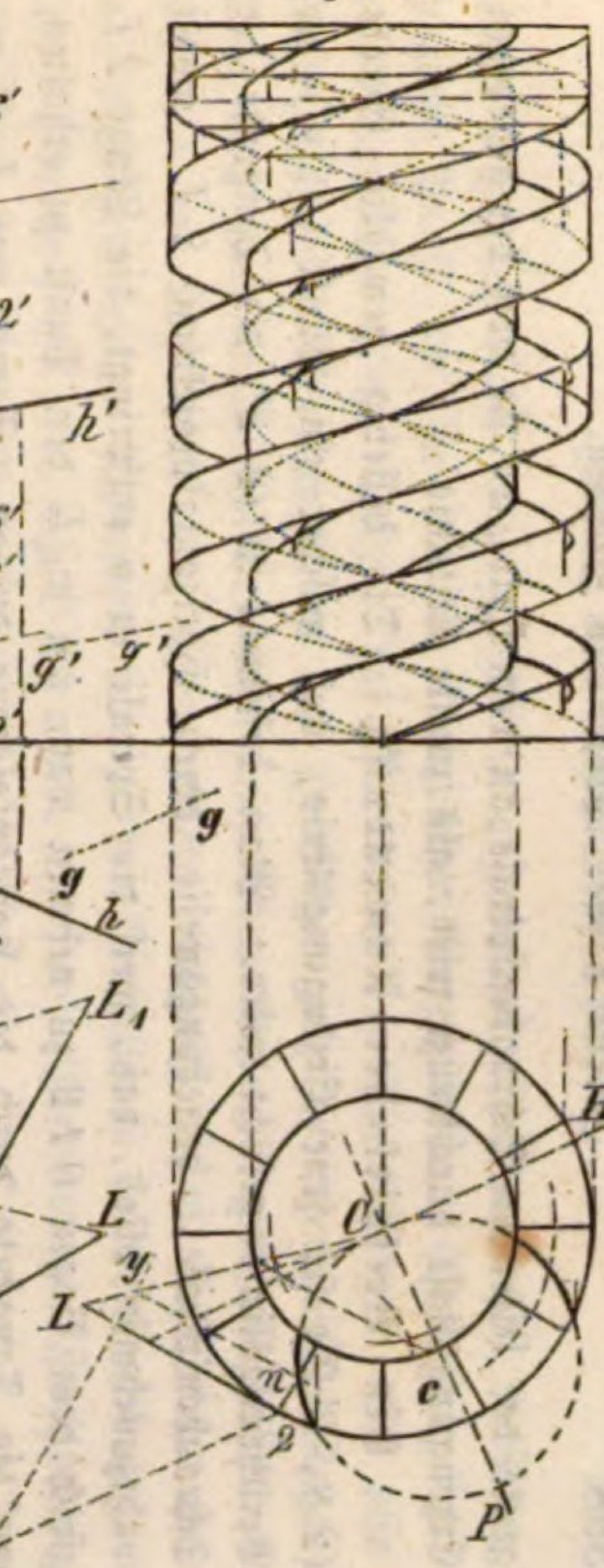


Fig. 228.



gente der leitenden Schraubenspirale an dem Orte, wo sie von der gegebenen Erzeugungslinie durchkreuzt wird, als zweite Leitlinie.

Ein Beispiel der Anwendung. Die beliebig gewählte Gerade $(2\,8,\ 2'\,2')$ sei jene Erzeugungslinie, auf welcher ein Punkt $(n,\ n')$ der Berührungslinie gesucht wird. Man bestimmt in $(2,\ 2')$ die Tangente der Schraubenspirale, beziehungsweise deren Horizontalprojektion $2\,L$, wobei wahrzunehmen blieb, daß, weil die Spirale in o entspringt, die Länge $2\,L$ gleich dem Bogen $0\,1\,2$ zu nehmen war, um in L den Punkt zu erhalten, wo die Tangente durch die Horizontalebene dringt. Somit war $L\,C$ gewonnen worden als eine zweite, dem ersten Erzeugungssystem des Paraboloides angehörige Gerade, während alle Geraden des zweiten Systemes der Vertikalebene $2\,L$ parallel liegen. Man verbindet $(2,\ 2')$ mit $(s,\ s')$ durch eine Gerade $(s\,2\,K,\ s'\,2'\,k')$ und markirt deren Durchschnitt $(k',\ K)$ mit der Horizontalebene. Eine Ebene, durch $(s'\,k',\ s\,K)$ und durch $(2\,8,\ 2'\,8')$ gelegt, hat als Horizontalriß die zu $2\,8$ parallele Gerade $K\,J$. Durch y, wo $K\,J$ und $L\,C$ sich kreuzen, geht die Erzeugungslinie des zweiten Systemes, welche auf $(2\,8,\ 2'\,8')$ den begehrten Punkt $(n,\ n')$ abschneidet: ihre Horizontalprojektion $y\,n$ ist parallel mit $2\,L$.

Anmerkung. Man wird, bei Bestimmung weiterer Punkte, die zweite Erzeugungslinie des ersten Systemes $L\,C$ nicht fortwährend in der horizontalen Projektionsebene annehmen können, weil bei zunehmender Höhe der Punkte wie $(2,\ 2')$ das entsprechende K bald unzugänglich würde; außerdem ergiebt sich ein Gewinn an Gleichförmigkeit der graphischen Arbeit, wenn man den Höhenunterschied von $0'\,0'$ und $2'\,2'$ als beständige Größe festhält, wodurch der Tangente stets die gleiche Länge von $2\,L$ zufällt. Sollte z. B. der Punkt $(\mu,\ \mu')$ auf der Erzeugungslinie $(7\,1,\ 7'\,1')$ [des oberen Umganges] zu suchen sein, würde man der in 7 (nach links vorwärts) gezogenen Tangente wieder die Länge $2\,L$ geben, das zugehörige K aber festzusetzen haben als den Durchschnitt der Geraden $(s\,7,\ s'\,7')$ mit der Ebene $5'\,5'$ u. s. f.

328. Eigenthümlichkeiten der Berührungslinien. Welches auch der Ort des Scheitels $(s,\ s')$ der tangirenden Kegelfläche sein mag, immer wird eine Erzeugungslinie des Helikoides existiren, welche in der Horizontalebene des Scheitels liegt. In unserer Figur ist die durch s' gehende Horizontale die Vertikalprojektion dieser Erzeugungslinie, woraus sich ihre Horizontalprojektion $e\,C$ folgert. Wird unsere Konstruktion der Berührungs-

punkte bezüglich dieser Erzeugungslinie angewendet, so findet sich, daß der fragliche Punkt auf ihr nur im Unendlichen liegen könne. (Jede der Leitebene parallele Ebene berührt das Paraboloid im Unendlichen.) So also spaltet sich die Berührungslinie des Helikoides und der tangirenden Kegelfläche nach zwei im Unendlichen sich berührenden Aesten, einen unterhalb des Scheitels der Kegelfläche und einen andern oberhalb dieses Scheitels, und $e\,C$ muß gemeinsame Asymptote sein zu den Projektionen beider Berührungsäste $l\,C\,m\,n\,o\,p\,q\,r\ldots$, $\lambda\,\mu\,C\,\pi\,\rho\,\sigma\,\tau\ldots$, sowie ihrerseits die Horizontale $s'\,t'$ Asymptote ist der Projektionen $m'\,n'\,o'\,p'\,q'\,r'\ldots$, $\mu'\,\pi'\,\rho'\,\sigma'\ldots$ Im Raume windet sich die Linie ober- und unterhalb von (s, s') in endlosen, immer engeren Knoten gegen die Achse, welche sie nach jedem halben Umgange durchschneidet. Solche Kreuzungen liegen in der Ebene $C\,s$. Diese nämlich ist, gleich jeder anderen durch C gehenden Ebene, eine tangirende Ebene des Helikoides und berührt die Fläche intermittirend in der Punktenreihe, welche durch die Kreuzungen der in der Ebene enthaltenen geraden Erzeugungslinien und der Achse bezeichnet werden. (C, F') ist ein solcher Berührungspunkt. Den unteren Ast der Berührungslinie findet man diesseits, den oberen Ast jenseits derselben Ebene $C\,s$.

Zu bemerkender Umstand. Man betrachte es als etwas Zufälliges, daß in unserer Figur die Erzeugungslinie des Helikoides, welche in der Ebene $s'\,t'$ liegt, zugleich durch den Scheitel (s, s') der tangirenden Kegelfläche geht.

329. Fig. 227, tangirende Cylinderfläche. Es ist hier wieder das gleiche Helikoid genommen, wie vorhin, und in gleicher Anordnung. Die dasselbe tangirende Cylinderfläche wird erzeugt durch eine gerade Linie, welche berührend längs des Helikoides fortgleitet, während sie stets parallel bleibt zu der Geraden $(h\,h, h'\,h')$. In währender Bewegung dieser tangirenden Geraden beschreibt ihr Berührungspunkt auf dem Helikoide die Berührungslinie dieser Fläche und der tangirenden Cylinderfläche, welche Kurve punktweise zu konstruiren bleibt. Die hierzu dienende Konstruktion unterscheidet sich von der vorigen lediglich dadurch, daß die Hilfsebenen, welche durch je eine der geraden Erzeugungslinien des Helikoides zu führen sind, jetzt sämmtlich der Geraden $(h\,h, h'\,h')$ parallel liegen.

Beispiel der Anwendung. $(2\,8, 2'\,2')$ die Gerade, auf welcher ein Punkt (n, n') der Berührungslinie zu suchen. $2\,L$ Horizontalprojektion der Tangente der Schraubenlinie im Punkte $(2, 2')$, L ihr Fußpunkt in der

Horizontalebene und dem Spiralbogen (*0 1 2*, *0′ 1′ 2′*) entsprechend. *L C* zweite Erzeugungslinie des Hilfsparaboloides. Eine durch (*2*, *2′*) gehende Parallele zu (*h h*, *h′ h′*), nämlich die Gerade (*2 K*, *2′ k′*), schneidet die Horizontalebene in (*k′*, *K*), daher *K J* parallel zu *2 C* Horizontalriß der Ebene (*C 2 K*, *2′ k′ 0′*). Diese Ebene schneidet die zweite Erzeugungslinie *L C* in *y*, durch welchen Punkt eine Erzeugungslinie des zweiten Systemes geht. Ihre Horizontalprojektion *y n* ist parallel zu *2 L* und schneidet die *2 C* in *n*, welcher Punkt auf *2′ 2′* nach *n′* zu projiciren bleibt. *l C m n r* ... ist die Horizontalprojektion, *l′ m′ n′ 3′ r′* die Vertikalprojektion der auf solche Weise erhaltenen Berührungslinie des Helikoides mit der ihm umschriebenen Cylinderfläche.

Anmerkung. In höherem Grade noch als vorhin wird man es ersprießlich finden, bei fortzusetzender Arbeit den Höhenunterschied von *2′ 2′* und *0′ 0′* für die zwei Erzeugungslinien des Paraboloides unverändert beizubehalten, denn alsdann hat man für die Gerade (*1 C 7*, *1′ 1′*), z. B. die Tangente $1\,L_1$ gleich der Tangente *2 L* und die Parallele $1\,K_1$ gleich *2 K* zu nehmen, $K_1\,y_1$ aber parallel mit *1 C* und $y_1\,m$ senkrecht darauf zu nehmen u. s. w.

330. Eigenthümlichkeiten der Berührungslinie. Diese ist in der That besonderer Natur. Vorerst, sage ich, wird die Projektion *l m n* ... durch den Punkt *C* gehen und hier die zu *h h* parallel gezogene Gerade *H C H* berühren müssen, denn betrachtet man dies *H H* als die Projektion einer zu (*h h*, *h′ h′*) parallelen und durch die Achse gehenden Vertikalebene, so ist dies, wie am Schlusse von §. 328 ausgeführt worden, auch eine tangirende Ebene des Helikoides, und ihre Berührungspunkte, welche der Berührungslinie (*l m n* ..., *l′ m′ n′* ....) angehören, projiciren sich nach *C*. Zweitens wird die Projektion *l C m n* ... als eine geschlossene, in sich selbst zurücklaufende Kurve erkannt werden müssen. Denn nachdem man unter Anderem auf der Geraden (*2 8*, *2′ 2′*) den Punkt (*n*, *n′*) gefunden hat, wende man die Konstruktion auf die Gerade (*8 2*, *8′ 8′*) an, welche in der Höhe eines halben Umganges über der ersten liegt, und man wird die Horizontalprojektion *n* wiederum erhalten müssen, weil das Verfahren wiederum nur auf die Gerade *L C y* und den Punkt *K* führen kann. Eine sorgfältig ausgeführte graphische Arbeit wird aber auch den Beweis durch Erfahrung liefern, daß die Projektion *l C m n* ... immer ein Kreis sei, welcher der vorhergehenden Bemerkung zufolge die Gerade *H H* in *C* berühren

muß (s. unten am Schlusse des §.). Ist aber diese Projektion $l\,C\,m\,n\ldots$ ein Kreis, so erscheinen in ihm die Winkel $0\,C\,11$, $11\,C\,10\ldots$ rc. als Peripheriewinkel, aber diese Winkel wurden ursprünglich unter sich gleich angenommen, weshalb auch die Bögen $r\,l$, $l\,m$, $m\,n\ldots.$ gleiche Größe erhalten mußten, und somit ergiebt sich als letzte Schlußfolgerung, daß die Berührungslinie ($l\,C\,m\,n\,r\ldots$, $l'\,m'\,n'\,3'\,r'\ldots.$) des Helikoides und der tangirenden Cylinderfläche eine Schraubenspirale sei von der halben Ganghöhe der spirischen Leitlinie ($0\,1\,2\,3\ldots$, $0'\,1'\,2'\,3'\ldots.$). — Wir haben der Fig. 227 noch die Berührungslinie des Helikoides und einer tangirenden Cylinderfläche beigefügt, deren Erzeugungslinien der Geraden ($g\,g$, $g'\,g'$) parallel sind. Diese Berührungslinie, wieder eine Schraubenspirale von gleicher Ganghöhe wie die vorige, projicirt sich auf die Horizontalebene als der Kreis $a\,b\,c\,d\ldots$, welcher abermals die Gerade $H\,H$ in C berührt, weil dies $H\,H$ auch mit $g\,g$ parallel liegt. Indem jedoch die beiden Geraden ($h\,h$, $h'\,h'$) und ($g\,g$, $g'\,g'$) nach entgegengesetzter Seite geneigt sind, kamen die beiden Berührungslinien ($l\,m\,n\ldots$, $l'\,m'\,n'\ldots.$) und ($a\,b\,c\ldots$, $a'\,b'\,c'\ldots.$) bezüglich der Ebene $H\,H$ auf entgegengesetzte Seiten des Helikoides zu liegen. Man wird ferner wahrgenommen haben, daß der Durchmesser des Kreises $a\,b\,c\ldots$ kleiner geworden sei, als jener des Kreises $l\,m\,n\ldots.$ Dies findet darin seinen Grund, daß der Geraden ($g\,g$, $g'\,g'$) eine etwas stärkere Neigung gegen den Horizont gegeben ward, als der Geraden ($h\,h$, $h'\,h'$). Bei wachsender Neigung dieser Geraden würden die entsprechenden Berührungslinien Schraubenspiralen von fortwährend geringerem Durchmesser sein, und dieser Durchmesser würde Null werden in dem Augenblick, als jene Neigung ihr Maximum erreichte, d. h. wenn die Gerade ($g\,g$, $g'\,g'$) senkrecht gegen den Horizont stände, also parallel mit der Achse des Helikoides wäre. Man könnte auch sagen, daß jetzt diese Achse an die Stelle der spirischen Berührungslinie getreten wäre. Allein man muß behutsam sein beim Verdolmetschen solcher Schlußfolgerungen, welche sich auf Vorgänge an den Gränzen der möglichen Fälle beziehen, wie auch im anverwandten Fall (§. 226) bereits hervorgehoben worden. Hier soll folgender Zusammenhang nicht aus dem Auge verloren werden. So lange nämlich die Gerade ($g\,g$, $g'\,g'$) auch nur den kleinsten Winkel mit der Achse bildet, ist die fragliche Berührungslinie eine Schraubenspirale von allerdings sehr kleinem Durchmesser, welche aber gleich allen ihrer Art in Abständen von je einer halben Ganghöhe die Achse des Helikoides durchschneidet. Eine solche

Punktenreihe muß als das Ergebniß der Konstruktion betrachtet werden, sobald $(g\,g, g'\,g')$ zur Achse parallel geworden, allein die ganze Aufgabe hat jetzt den Charakter des Unbestimmten angenommen, und jeder beliebige Punkt der Achse darf angesehen werden, als gehöre er zur genannten Reihe.

Eine andere Gränze erreicht unsere Aufgabe, wenn die Neigung der Geraden $(g\,g, g'\,g')$ gegen den Horizont abnimmt, und diese Gerade zuletzt selbst horizontal wird. Indem man dabei unterstellt, daß die Projektion $g\,g$ unverändert bleibe, wird der Kreis $a\,b\,c\,d\,\ldots$ an Umfang stets wachsen, fortwährend jedoch die Gerade $H\,H$ in C berühren. In dem Augenblicke nun, wo auch $g'\,g'$ horizontal geworden, wird der Durchmesser des Kreises eine unendliche Größe erreicht und sein Umfang sich in die Gerade $H\,H$ verwandelt haben. Dies heißt nun mit anderen Worten, daß die Vertikalebene $H\,H$ und die in ihr liegenden Berührungspunkte das Ergebniß der Konstruktion seien. Wenn man indessen von der Vorstellung ausgeht, daß eine jede Horizontalebene das Helikoid nach einer seiner Erzeugungslinien schneidet und daß sie die Fläche an den im Unendlichen liegenden Punkten dieser Geraden berühre, dann kann auch behauptet werden, daß eine jede andere Horizontalebene dem Bedingnisse der Aufgabe Genüge leiste.

Noch eine Anmerkung über die Projektionen $l\,C\,m\,n\,\ldots.,$ $a\,b\,c\,C\,d\,\ldots.$ Daß diese Projektionen immer Kreise sein müssen, beruht auf einigen hier in Anwendung kommenden Sätzen der ebenen Geometrie, deren Begründung nicht Aufgabe dieser Schrift sein kann. Allein mehrere in Bezug auf die Genauigkeit der Konstruktion sich ergebende Momente mögen hier immerhin hervorgehoben werden. — In der Unterstellung, daß die Arbeit geführt worden sei, wie in der Anmerkung zu §. 229 angerathen worden, mußten die rechtwinkligen Dreiecke $L\,2\,C$, $L_1\,1\,C\,\ldots$ unter sich gleich genommen werden, dadurch kamen L, L_1, $L_2\,\ldots.$ auf einen zu $0\;1\;2\,\ldots$ konzentrischen Kreis zu liegen und zwar in gleichen Abständen. Die Punkte K, K_1, $K_2\,\ldots,$ als die Enden gleichlanger Parallelen, $2\,K$, $1\,K_1$, mußten einem anderen, dem Grundkreise gleichen Kreis angehören. Durch K ging $K\,y$ parallel zu $2\,C$, durch K_1 ging $K_1\,y_1$ parallel zu $1\,C$ u. s. w., und es mußten sich halb so viel Punkte y, y_1, $y_2\,\ldots.$ ergeben, als Theilpunkte $0, 1, 2\,\ldots.$ angenommen waren. All' diese y mußten wieder auf einem Kreise liegen, welcher durch C geht, und weil die Winkel der Geraden $L\,C$, L_1, $C\,\ldots$ in diesem neuen Kreise als gleich große Peripheriewinkel erscheinen, welche auf dem Umfange gleiche Bögen $y_1\,y$, $y\,y_2\,\ldots.$ abschnitten, so mußten $y_1\,y\,y_2\,\ldots$ ein reguläres Sechseck

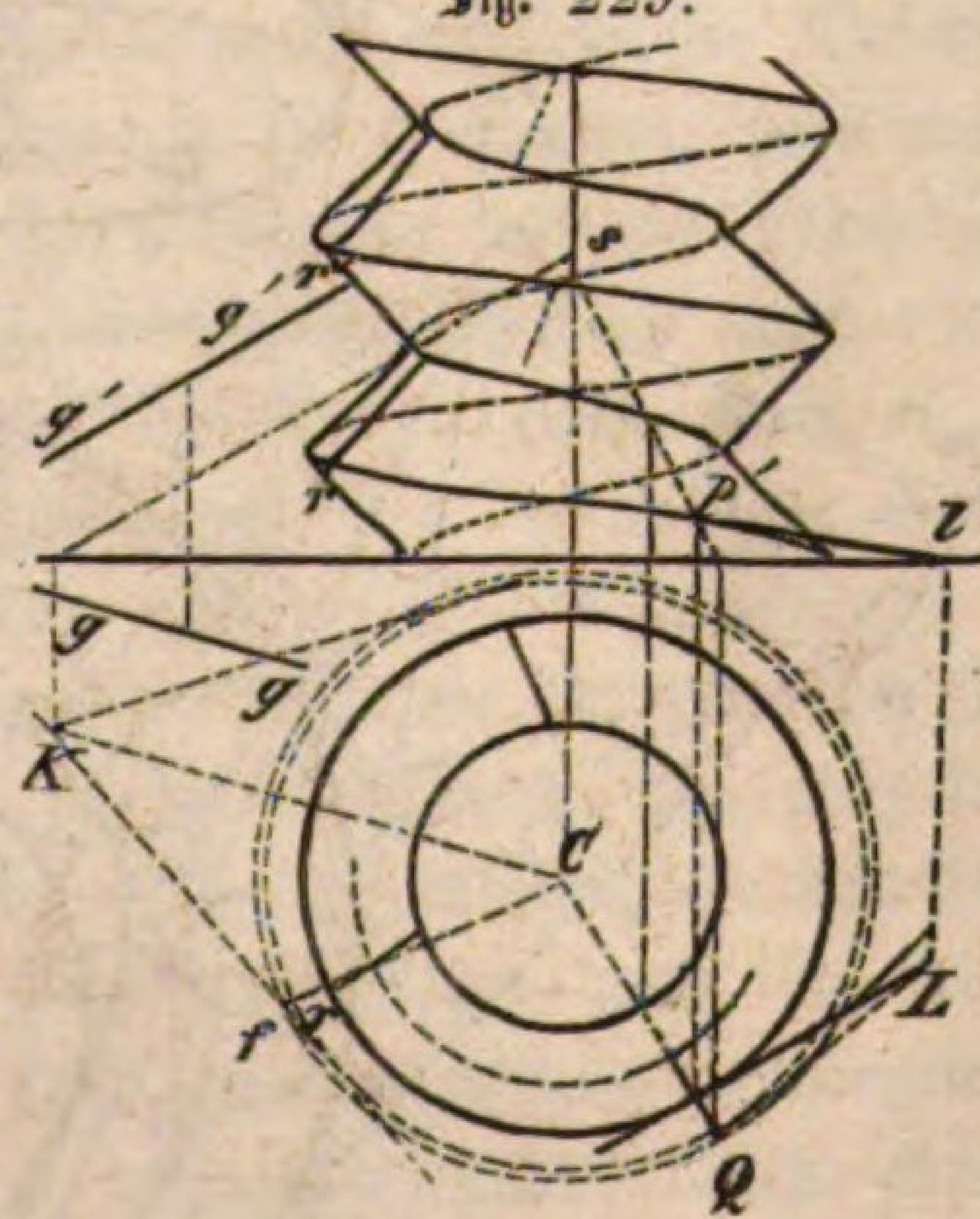
bilden und die Fußpunkte der Perpendikel $y\,n$, $y_2\,m\,\ldots$, welche auf die Radien $C\,2$, $C\,1\,\ldots$ zu fällen blieben, konnten nur wiederum regelmäßig auf einem letzten Kreise $l\,C\,m\,n\,\ldots$ vertheilt sein.

331. Anwendung der vorhergehenden Konstruktionen bei Schraubengewindflächen.

Fig. *228* stellt eine flache Schraube mit zweifachem Gewinde vor (§. 109), ihre gewundenen Flächentheile sind spirische Zonen von Wendelflächen oder Helikoiden mit einer Leitebene. — $(g\,g,\ g'\,g')$ eine Gerade. — Wir nehmen an, es sollen parallel mit ihr tangirende Cylinderflächen der Gewinde bestimmt und die Berührungslinien so weit konstruirt werden, als sie der Breite des Gewindes entsprechen.

Nachdem in der Horizontalprojektion die Gerade $C\,H$ parallel mit $g\,g$ und $C\,P$ senkrecht darauf gezogen worden, bestimme man einen Punkt n der Berührungslinie, wie in §. 329. Alsdann wird eine Senkrechte in der Mitte von $C\,n$ auf $C\,P$ das Centrum c des Kreises abschneiden, welcher die Horizontalprojektion der Berührungslinie ist. Die beiden Bögen dieses Kreises zwischen den beiden anderen vom Mittelpunkte C sind es, welche in Betracht kommen. Die äußeren Enden derselben entsprechen den äußeren Spiralen des Gewindes, die inneren Endpunkte der inneren Spiralen und ein mittlerer Punkt einer mittleren Spirale. Drei Punkte aber genügen zum Zeichnen so kurzer Bögen, wie die fraglichen.

Fig. *229.*



332. Soll auf der Oberfläche eines scharfen Gewindes, Fig. *229*, die Berührungslinie mit einer tangirenden Cylinderfläche bestimmt werden, so bietet sich hier die Methode von 255 und 323 gleichsam sich selbst empfehlend dar: man bestimmt mit Hilfe der am angeführten Orte besprochenen Kegelfläche einen Punkt $(r,\ r')$ der Berührungslinie auf der äußersten Schraubenspirale, einen zweiten Punkt auf der inneren Spirale und einen dritten Punkt auf einer mittleren, zwischen beiden liegenden Spirale, durch welche drei Punkte die verlangten kleinen Kurvenstücke hinreichend bezeichnet sein werden. Nur der Hinweis mag noch gegeben werden, daß bei der Arbeit auf der unteren Gewindfläche die

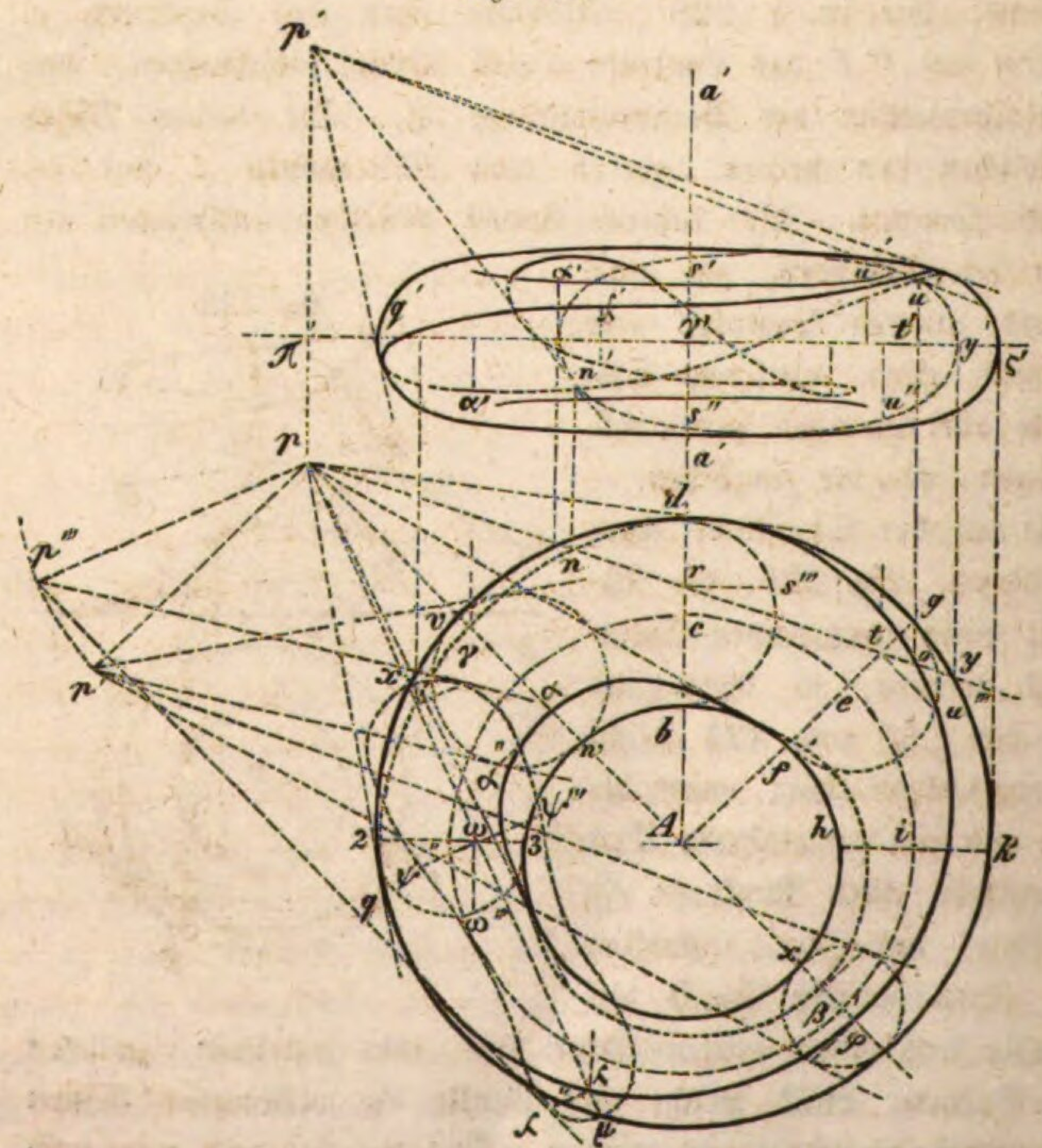
Spitzen der Hilfskegelflächen unter die Horizontalebene zu liegen kommen, sowie daß wohl zu erwägen sei, welcher von den beiden Durchschnittspunkten der Geraden Kf und des Kreises vom Radius CQ jeweils zu nehmen bleibe.

Allgemeine Konstruktionsart tangirender Kegel- oder Cylinderflächen.

333. Ein Beispiel für viele wird dasjenige noch klären, was in dem seither Vorgetragenen über die allgemeine Methode der Schnitte erläuterungsbedürftig geblieben sein mag. Als Stoff wählen wir eine Fläche, welche durch die modificirte Drehung einer Kurve entstanden ist. — Folgendes sind die betreffenden Einzelheiten.

Ein Kreis vom Durchmesser $b\,d$ Fig. 230 liegt mit der Senkrechten (A, $a'\,a'$) in gleicher Vertikalebene. Sein Centrum c projicirt sich nach r'. Der Kreis dreht sich um die Achse, so daß 1) die Kreisebene stets durch die Achse geht; 2) sein Centrum eine reine Rotationsbewegung hat, also in der Horizontalebene $\pi'\,r'\,\zeta'$ einen Kreisumfang vom Radius $A\,c$ beschreibt; 3) der Umfang des mobilen Kreises veränderlich ist und dadurch regulirt wird, daß dieser Umfang immer den Leitkreis $b\,f\,h\,\ldots$

Fig. 230.



schneiden muß, welch' letzterer gleichfalls in der Ebene $\pi'\,r'\,\rho'$ enthalten ist,

aber excentrisch gegen *c e i* ... liegt. Das Ergebniß der modificirten Drehung des Kreises *b d* ist ein Annuloid, eine ringartige Fläche, von welcher *b f h* ... den inneren Umriß der Horizontalprojektion bildet. Punkte *g*, *k* .... des äußeren Umrisses zu erhalten, zog man Radien des Kreises *c e i* ... und trug auf diesen *e f* von *e* nach *g*, *i h* von *i* nach *k* u. s. f. Die Linien des Annuloides, deren Projektion diese Umrisse bilden, gehören der Ebene $\pi' \rho'$ an. Was die Umrisse der Vertikalprojektion anbetrifft, so hat man vorerst die Vertikalprojektionen der verschiedenen Kreise *d b*, *f g*, *h k* ... 2c. zu entwerfen, an welche sich zwei umhüllende und berührende Linien zeichnen lassen, eine erste geschlossene und eine zweite aus zwei getrennten Aesten bestehende, welche den Umriß des vorderen schmäleren Theiles der Ringfläche bildet. — (p, p') sei der Scheitel einer die Ringfläche tangirenden Kegelfläche. — Die Punkte der Berührungslinie beider Flächen zu erhalten, bleibt nur übrig, durch (p, p') eine Reihe von Ebenen zu legen, welche das Annuloid schneiden (vertikale Ebenen sind hier angezeigt), an die entstandenen Schnitte aus (p, p') Tangenten zu ziehen, deren Berührungspunkte der gesuchten Linie angehören. *p r y* sei eine solche Ebene. Ihr Schnitt in dem Annuloid wird durch jene Punkte gebildet, in welchen die Ebene und die Erzeugungskreise der krummen Fläche sich durchdringen. *r*, *t* ... sind die Horizontalprojektionen solcher Punkte; ihre Höhen über oder unter der Horizontalebene $\pi' \rho'$ zu erhalten, legte man den Kreis *b d* auf die Horizontalebene um (die Umlegung des Halbkreises genügt), dieser fällt nach $b\,s'''\,d$ und die Senkrechte legt sich nach $r\,s'''$ rechtwinklig gegen *b d*. Dies $r\,s'''$ ist von r' auf- und abwärts nach s', s'' zu tragen. Der Kreis *f g* kam durch Umlegung nach $f\,u'''\,g$ und die Senkrechte des Punktes *t* fiel nach $t\,u'''$ rechtwinklig gegen *f g*; $t\,u'''$ war von t' aus auf- und abwärts nach u', u'' zu tragen 2c. An die Vertikalprojektion des also erhaltenen Schnittes zog man aus p' die Tangenten und projicirte die Berührungspunkte n', o' herab auf *p y* nach *n*, *o*. Anstatt die Vertikalprojektionen der Schnitte zu verzeichnen, konnten dieselben auch in ihren Ebenen nebst dem Scheitel (p, p') auf die Horizontalebene niedergelegt werden, wie man dies bei der Ebene $p\,\mu$ angegeben sieht. Diese Ebene schneidet unter anderen den Erzeugungskreis *2 3* in zwei Punkten, welche ω als gemeinsame Horizontalprojektion haben. Durch Umlegung findet sich $\omega\,\omega'''$ als Höhe oder Tiefe dieser Punkte über oder unter dem horizontalen Kreisdurchmesser *2 3*. Nachdem $\psi''\,\omega\,\psi'''$ senkrecht auf $p\,\mu$ gezogen worden, blieb $\omega\,\omega'''$ nach $\omega\,\psi''$ und nach $\omega\,\psi'''$ zu tragen. War die Umlegung des

ganzen Schnittes verzeichnet, und der Scheitel (p, p') nach p''' umgelegt worden ($p\,p''' = \pi' p'$ steht senkrecht auf $p\,\mu$), so blieben aus p''' Tangenten an den umgelegten Schnitt zu ziehen, $p'''\lambda''$ ist eine derselben; ihr Berührungspunkt λ'' projicirt sich nach Wiederaufrichten der Ebene nach λ und von da nach λ', indem man letzterem Punkte eine Höhe über $\pi'\rho'$ giebt, gleich der Senkrechten $\lambda''\lambda$.

334. Fortsetzung. Der Schnitt des Annuloides und der Ebene $p\,A$ besteht aus zwei Kreisen, deren Umlegung und daraus abgeleitete Berührungspunkte wir verzeichnet haben; letztere projiciren sich nach $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$. So lange die schneidenden Hilfsebenen zwischen dem äußeren Umriß und dem Kreise $c\,e\,i\ldots$ liegen, haben die Schnitte eine konvexe Gestalt, nehmen aber in der Mitte eine Einziehung an, wenn die Ebenen zwischen genanntem Kreise und dem inneren Umrisse liegen. Würden sie diesen gerade berühren, so erhielte der Schnitt die Form ∞ einer Schleife. Im Uebrigen wird man als Berührungslinien des Annuloides und der tangirenden Kegelfläche eine Linie von zwei geschlossenen Aesten finden, einem äußeren und einem inneren (vergl. §. 297).

Wäre die Berührungslinie des Annuloides und einer tangirenden Cylinderfläche zu konstruiren, so blieben die Hilfsebenen und Tangenten der gegebenen Richtung parallel zu nehmen.

Welche Bedeutung tangirende Kegel- und Cylinderflächen für die Theorie des Zeichnens haben.

335. Einen wesentlichen Bestandtheil dieser Theorie bildet die Lehre vom Helldunkel oder vom Schattiren, und eine der ersten hier auftretenden Fragen betrifft den Entwurf jener Umrisse, welche auf der Oberfläche eines vom Lichte beschienenen Körpers die erhellten und die dunkeln Theile von einander scheiden. Folgende Auffassung wird hier als maßgebend genommen: Der Quell des Lichtes ist ein einziger Punkt, von welchem aus der Stoff strahlig nach allen Richtungen hin wirkt. Im Bereiche dieses Lichtpunktes befindet sich ein undurchsichtiger Körper, von welchem angenommen sein soll, daß seine Oberfläche aus einer einzigen geschlossenen krummen Fläche bestehe. Strahlen des Lichtpunktes werden auf diese Oberfläche treffen, aber einen Theil derselben erhellen andere Strahlen, werden unbehindert von dem Körper ihren Weg im Raume verfolgen. Eine dritte Reihe von Strahlen wird diejenigen begreifen, welche die Oberfläche des Körpers streifen oder tangiren. In der Gesammtheit bilden sie eine Kegelfläche, deren Scheitel

der Lichtpunkt und deren Berührungslinie mit der krummen Oberfläche auf dieser den erhellten Theil von demjenigen trennt, wohin kein direkter Lichtstrahl gelangen kann, welcher also im Schatten liegt. Giebt man der Entfernung des Lichtpunktes vom beleuchteten Körper eine unendliche Größe, dann werden alle von dorther gelangenden Strahlen unter sich parallel sein, und die Trennungslinien von Schatten und Licht auf dem fraglichen Körper ist jetzt die Berührungslinie seiner Oberfläche mit einer dieselbe tangirenden Cylinderfläche.

Wir erläutern dies Verhalten durch die Fig. *231* u. f., welche übrigens keine beleuchteten Körper, vielmehr beleuchtete physische Flächen vorstellen sollen, woran sich eine äußere und innere Seite unterscheiden läßt.

Die vier ersten Figuren, in schräger Projektion gezeichnet, repräsentiren die Trennungslinien von Schatten und Licht auf Cylinder- und Kegelflächen. Bei diesen, wie bei allen aufwickelbaren Flächenarten, beschränkt sich die tangirende Kegel- oder Cylinderfläche einfach auf eine oder einige tangirende Ebenen, welche die erstere Fläche nach einer ihrer geraden Erzeugungslinien berühren.

In Fig. *231* wird die Cylinderfläche durch Strahlen beleuchtet, welche der Geraden QR parallel sind. Eine Ebene, durch diese Gerade und parallel zu den Erzeugungslinien der Cylinderfläche gelegt, hat SR als Horizontalriß. Mit dieser Ebene sind die zwei tangirenden Ebenen HVT, FWU parallel; ihre zu SR parallelen Horizontalrisse VT, WU berühren die Basis VXW in V und W, und ihre Berührungslinien VH, WF trennen auf der äußeren Seite der Cylinderfläche deren erhellten und dunkeln Theil. VT und WU begränzen auf der Horizontalebene jenen Raum, wohin wegen der undurchsichtigen Cylinderfläche kein Lichtstrahl dringen kann und welchen man den Schlagschatten der Fläche nennt. Diese letztere ward aber durch eine gleichfalls in horizontaler Ebene enthaltene Linie HFK begränzt, welche der Basis VXW gleich ist. Alle Strahlen HT, Kk, FU, welche durch die Punkte genannter Gränzlinien gehen, bilden eine schiefe Cylinderfläche, welche ihrerseits wieder durch die Horizontalebene nach der zu HFK gleichen Linie TkU geschnitten wird, und diese letztere begränzt mit ihrem äußeren Bogen den Schlagschatten der Cylinderfläche auf der Horizontalebene. All' jene Strahlen der schiefen Cylinderfläche, welche dem punktirten Bogen TU entsprechen, werden durch die innere Wandung der beleuchteten Cylinderfläche aufgefangen und begränzen hier den Schlagschatten, welcher in jenem Inneren entstehen muß.

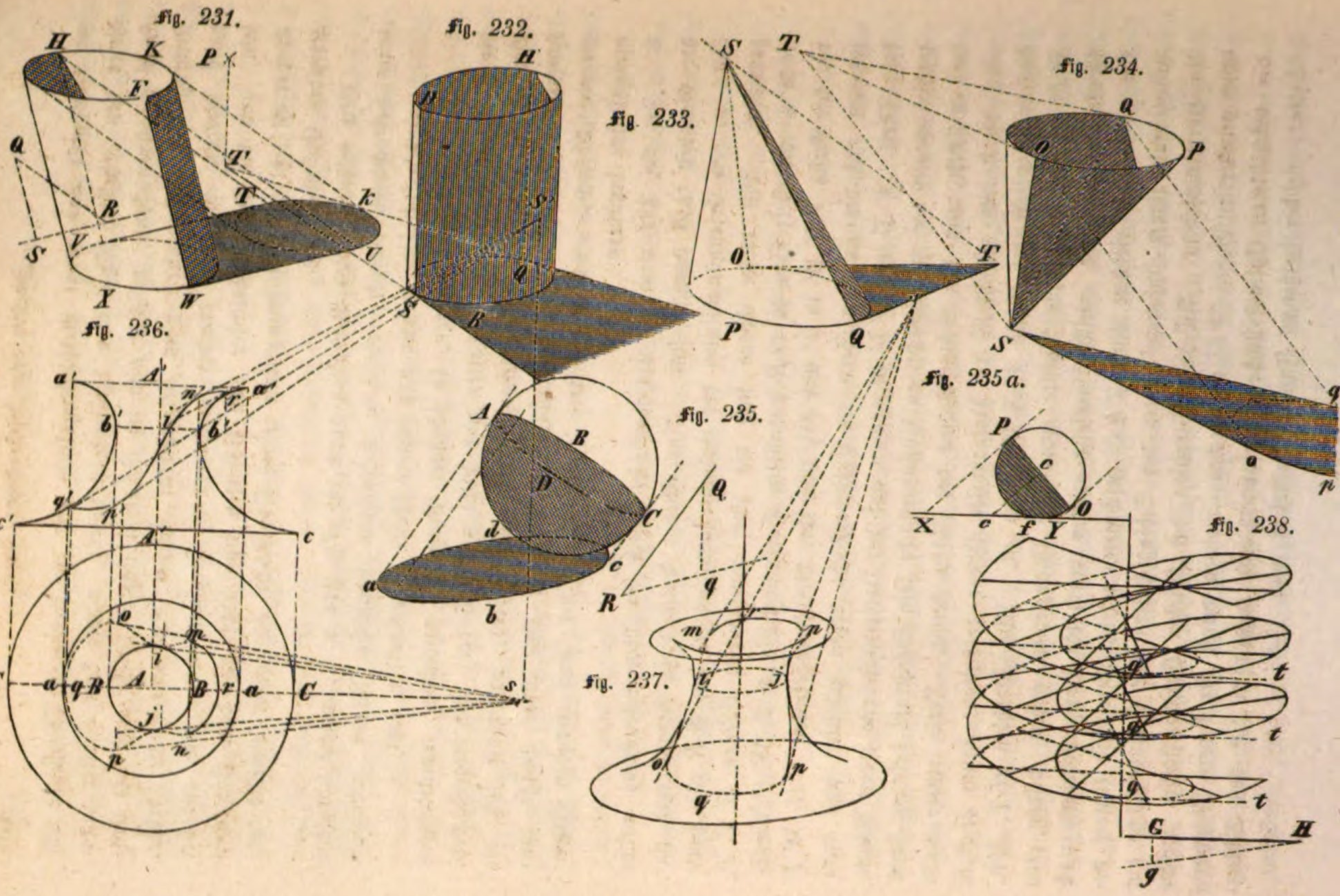


Fig. 231.
Fig. 232.
Fig. 233.
Fig. 234.
Fig. 235.
Fig. 235 a.
Fig. 236.
Fig. 237.
Fig. 238.

Die Cylinderfläche Fig. 232 wird durch Strahlen beleuchtet, welche dem Punkte p entströmen. PT ist parallel zu den Erzeugungslinien der Cylinderfläche und schneidet in T die Ebene der Basis QRS. Zwei durch PT gehende tangirende Ebenen der Cylinderfläche haben als Risse die Tangenten TQ, TS und berühren dieselben nach den Geraden QH, ST, welche auf der Außenseite der Fläche deren erhellten und dunkeln Theil scheiden. Alles Weitere in der Figur entspricht dem vorhin Gesagten, welchem nur noch beigefügt werden mag, daß der Schlagschatten der Cylinderfläche auf der Horizontalebene eine unbegränzte Länge erhalten müsse, weil PT kleiner genommen ward als QH.

Bei der Kegelfläche Fig. 232 soll die Gerade ST als der Lichtstrahl genommen werden, welcher durch den Scheitel und durch den Lichtpunkt geht, oder welcher bei parallelen Strahlen deren Richtung theilt. Dieser Strahl trifft in T die Ebene der Basis OPQ. Zwei von T aus an die Basis gezogene Tangenten TO, TQ sind die Risse der tangirenden Ebenen, welche die Kegelfläche längs den Trennungslinien von Schatten und Licht SO, SQ berühren. Den Raum OTQ erfüllt der Schlagschatten, welchen die Kegelfläche auf der Ebene ihrer Basis verursacht. — In Fig. 234 deuten die gleichen Buchstaben auf gleiche Verhältnisse, wie die soeben besprochenen. Man wird dabei erkennen, daß die Strahlen der Geraden ST parallel genommen sind. Die beiden, welche durch die Berührungspunkte OQ geführt wurden, treffen die Horizontalebene in o und q, daher sind So, Sq die Schlagschatten der Trennungslinien SO, SP; sie sind aber auch die Horizontalrisse der tangirenden Ebenen $STOo$, $STQq$ und in Folge einer wie der anderen Rolle begränzen sie den Schlagschatten der Kegelfläche auf der Horizontalebene. Diese Gränze wird vervollständigt durch die Kurve opq.., dem Schlagschatten der Gränzlinie OPQ.

In Betreff all' jener krummen Flächen, welche nicht zur besonderen Gattung der aufwickelbaren gehören, können die Berührungslinien solcher Flächen mit tangirenden Kegel- und Cylinderflächen, welche wir im Vorhergehenden einer Erörterung unterzogen haben, auch als Beispiele gelten ihrer Trennungslinien vom Schatten und Licht, wenn der Scheitel der Kegelfläche als Lichtpunkt genommen wird oder wenn man unterstellt, daß die Lichtstrahlen der geraden Erzeugungslinien den tangirenden Cylinderflächen parallel seien.

Nur über die Kugel sei noch Einiges hier angeführt. — Die tangirende

Kegelfläche einer Kugel ist gerade und kreisrund, und die gemeinsame Berührungslinie ein kleiner Kreis der Kugel, dessen Ebene senkrecht steht auf der Achse des Kegels, d. i. auf der Verbindungslinie des Scheitels mit dem Kugelcentrum. Die Kugel und eine sie tangirende Cylinderfläche berühren sich nach jenem größten Kugelkreise, dessen Ebene auf den geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche senkrecht steht. Stellt der Kreis Fig. *235a* die Vertikalprojektion einer Kugel vor, welche durch eine Cylinderfläche tangirt wird, deren Erzeugungslinien zur Projektionsebene parallel liegen, und ist $c\,C$ die Projektion einer Parallelen zu diesen Erzeugungslinien, so erscheint der auf $c\,C$ senkrechte Durchmesser $P\,c\,O$ als die Vertikalprojektion der gemeinsamen Berührungslinie von Kugel und Cylinder, oder als Projektion der Trennungslinie von Schatten und Licht, wenn die beleuchtenden Strahlen zu $c\,C$ parallel sind. Der tangirende Strahlencylinder wird durch die horizontale Projektionsebene nach einer Ellipse geschnitten, deren große Achse das Maß $X\,Y$ hat, wenn die Tangenten $P\,X$, $O\,Y$ zu $c\,C$ parallel gezogen werden, und deren kleine Achse dem Kugeldurchmesser gleicht; diese Ellipse begränzt den von der Kugel auf die Horizontalebene geworfenen Schlagschatten. — Fig. *235* zeigt den Vorgang in schräger Projektion. Die Lichtstrahlen sind parallel der Geraden $Q\,R$, von welcher $R\,q$ die Horizontalprojektion. Der tangirende Strahlencylinder berührt die Kugel nach dem größten Kreise $A\,B\,C\,D$ und durchdringt die Horizontalebene, auf welcher die Kugel ruht, nach der Ellipse $a\,b\,c\,d$.

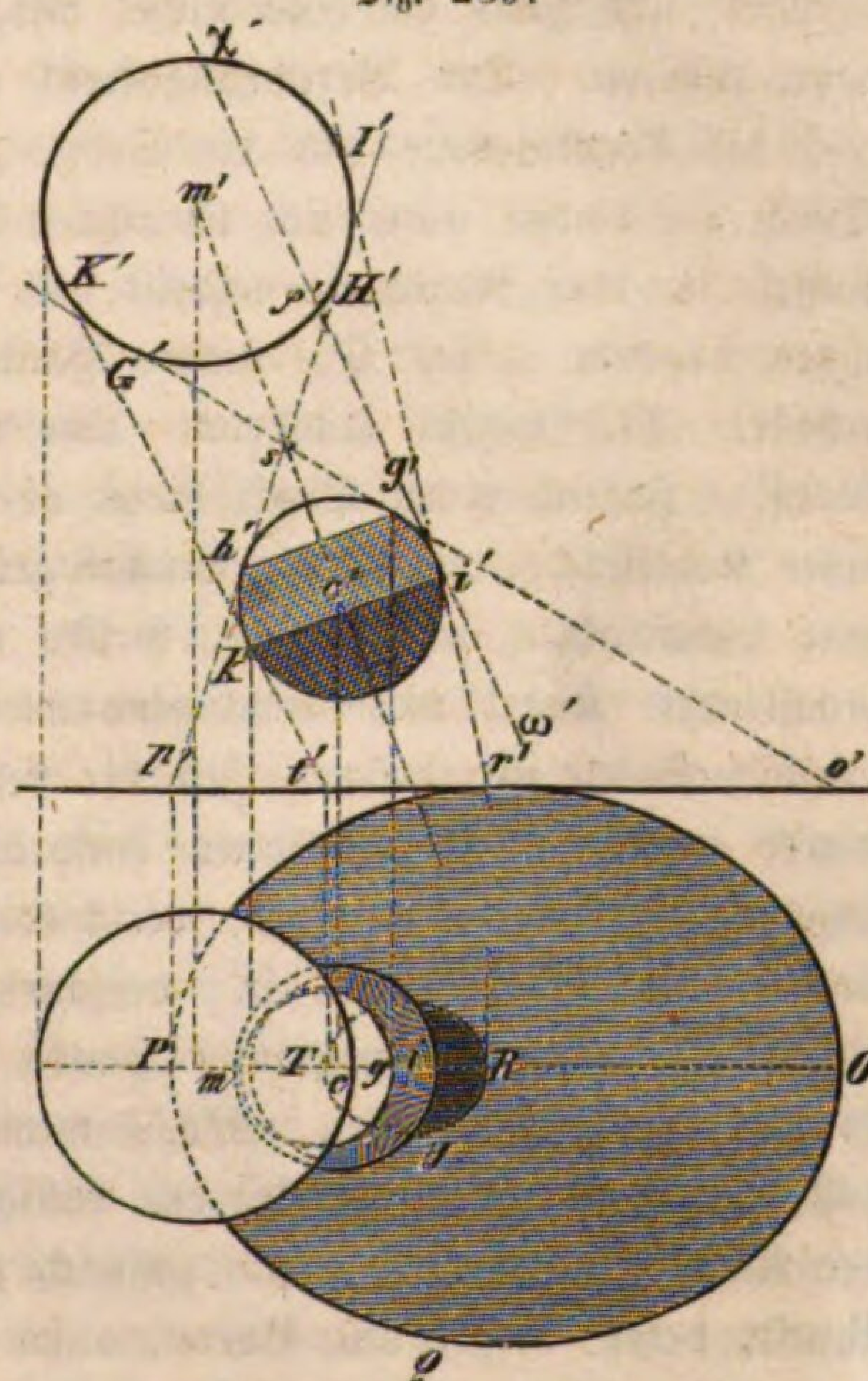
336. Es erübrigt noch des Falles zu gedenken, wie sich die Trennungslinie von Schatten und Licht auf einer undurchsichtigen, krummen Fläche gestaltet, wenn diese aus endlicher Entfernung von einer anderen krummen Fläche als leuchtendem Gegenstand beschienen wird. — Ein jeder Punkt solch' einer leuchtenden Fläche wird strahlig wirken nach allen Richtungen, welche außerhalb der tangirenden Ebene des Punktes möglich sind. Denkt man sich daher an einem Punkte der leuchtenden Fläche die tangirende Ebene gelegt, so wird das von dem Punkte ausströmende Licht die dunkle Fläche erreichen und einen Theil von ihr erhellen, wenn diese letzte Fläche sich in derjenigen Region des Raumes befindet, welche in Bezug auf die genannte tangirende Ebene der Leuchtfläche gegenüber liegt. Nun stelle man sich eine Ebene vor, welche gleichzeitig die leuchtende wie die beleuchtete Fläche der Art tangirt, daß beide Flächen sich auf einer Seite der Ebene befinden. Diese Ebene werde in Bewegung gesetzt, daß sie auf beiden Flächen hingleitet, indem sie

gleichzeitig und fortwährend eine jede in einem Punkte berührt. Durch die aufeinander folgenden Schnitte der beweglichen Ebene entsteht eine Reihe gerader Linien, deren jede gemeinsame Tangente ist an die leuchtende wie an die beleuchtete Fläche, und welche in ihrer Gesammtheit die geraden Erzeugungslinien einer aufwickelbaren Fläche darstellen, von der eine jede der zwei ersten Flächen nach einer krummen Linie berührt wird. Die Berührungslinie mit der beleuchteten Fläche wird auf ihr der erhellte Theil von demjenigen trennen, welcher von keinen direkten Strahlen mehr getroffen werden kann und folglich im Schatten liegt.

337. Vor weiterem Verfolg dieser allgemeinen Diskussion wollen wir einen bestimmten und einfachen Fall behandeln, den Fall nämlich, wenn beide, die leuchtende wie die beleuchtete Fläche, Kugeln sind.

In Fig. *239* sei (m, m') der Mittelpunkt einer leuchtenden Kugelfläche, (c, c') der Mittelpunkt einer zweiten undurchsichtigen, von jener ersten beleuchteten sphärischen Fläche. Wir haben die vertikale Projektionsebene parallel gestellt mit der geraden Verbindungslinie beider Mittelpunkte. An die beiden Kreise, welche die Umrisse der Vertikalprojektion bilden, ziehe man eine gemeinsame Tangente $i' I'$ oder $k' K'$, welche beide von gleicher Seite berührt; eine davon betrachte man als die Projektion einer solchen berührenden Ebene beider Kugeln, welche auf der Vertikalebene senkrecht steht. Indem diese Ebene fortwährend tangirend auf beiden sphärischen Flächen hingleitet, entsteht durch ihre aufeinander folgenden Schnitte eine beide Kugeln tangirende Kegelfläche, deren Scheitel auf der Geraden $(m\,c, m'\,c')$ jenseits der kleineren Sphäre liegt. Diese Kegelfläche und die beleuchtete Kugel

Fig. *239.*



berühren sich nach einem kleinen Kreise, dessen Vertikalprojektion $i'\,k'$ auf $c'\,m'$ senkrecht steht. (Den Berührungskreis der Kegelfläche und der leuchtenden

Kugel verfolgen wir nicht weiter.) Der Kreis nun vom Durchmesser $i' k'$ theilt die beleuchtete Kugel in zwei Hauben, deren untere offenbar kein direktes Licht mehr empfangen kann, sowie überhaupt der Raum innerhalb dieser Kegelfläche und jenseits der dunkeln Kugelhaube keinem der leuchtenden Kugel entströmenden Lichte zugängig ist. Ein Gleiches gilt von dem elliptischen Raume $R\,T\,U$, dem Durchschnitte der Kegelfläche und der Horizontalebene.

Nachdem sofort Tangenten wie $h'\,H'$ oder $g'\,G'$ gezogen worden, welche jeden der zwei kreisrunden Umrisse von verschiedener Seite berühren, nehme man eine oder die andere wieder als die Projektion einer gemeinsamen tangirenden Ebene beider Kugelflächen, welche Ebene auf der Vertikalebene senkrecht steht, und man lasse sie abermals tangirend um beide Flächen herumgleiten, so wird dadurch eine zweite, beide Kugeln tangirende Kegelfläche hervorgerufen, welche jede Kugel nach einem ihrer kleinen Kreise berührt, und zwar die eine Kugel mit dem einen Kegelnetze, die andere mit dem anderen. Der Berührungskreis mit der erhellten Kugel projicirt sich auf die Vertikalebene als die Sehne $g'\,h'$, welche auf $c'\,m'$ senkrecht steht. Durch die beiden unter sich parallelen Berührungskreise wird nun die erhellte Kugel in drei Regionen getheilt, in zwei Kugelhauben und eine zwischen ihnen liegende Zone. Die untere Haube ist dunkel, die obere dagegen völlig erhellt. Mit diesem Ausdrucke aber werde hier folgende Vorstellung verknüpft. Irgend einen Punkt dieser oberen Haube betrachte man als Scheitel einer Kegelfläche, welche die Leuchtkugel tangirt, so wird diese Kegelfläche all' jene Lichtstrahlen umschließen, welche möglicherweise von der Oberfläche der leuchtenden Kugel nach dem genommenen Punkt gelangen können, ihn in gewisser Stärke zu erhellen. Für die verschiedenen Punkte der erhellten Kugelhaube werden zwar die ihnen entsprechenden Licht- oder Strahlenkegel verschiedene Volumina erhalten, verschiedene Mengen von Strahlen einschließen und somit die Punkte in verschiedenem Grade erhellen, allein von einem jeden Punkte genannter Haube wird zugegeben werden müssen, daß er völlig beleuchtet sei. Wolle man auch das Verhältniß noch erwägen, daß, wenn an einem Punkte der völlig erhellten Haube die tangirende Ebene der Kugel gedacht wird, und zugleich der Strahlenkegel, dessen Spitze jener Punkt, beide, Kegel und Ebene, außer der Spitze keinen Punkt weiter gemeinsam haben können. — Stellt $O\,P\,Q$ den Durchschnitt der Horizontalebene und der zweiten Kegelfläche vor, so wird man ferner erkennen, daß die Punkte der Ebene außerhalb des Schnittes wol in ungleicher Stärke, ein

jeder aber völlig erhellt sei, d. h. daß ein jeder die Gesammtwirkung aller Strahlen empfängt, welche der Leuchtkörper ihm zusenden kann. Diese Strahlen nehmen das Volumen eines Kegels ein, von welchem der Punkt die Spitze, und welcher die Oberfläche des Leuchtkörpers tangirt.

Was die Vertheilung des Lichtes innerhalb der beiden tangirenden Kegelflächen $r' i' I' \ldots$, $t' k' K'$ und $o' s' G' \ldots$, $p' s' H'$ betrifft, so sage ich vorerst, daß jede tangirende Ebene, deren Berührungspunkt in der Zone $g' h' k' i'$ liegt, die leuchtende Sphäre durchschneide: für einen Punkt z. B. dieser Zone, welcher zugleich der Ebene $P c m O$ angehört, kann die Tangente $\omega' \varphi' \chi'$ als Vertikalprojektion einer solchen tangirenden Ebene gelten. Wird hier der Berührungspunkt als Scheitel einer die leuchtende Sphäre tangirenden Kegelfläche genommen, so würde diese all' jene Strahlen fassen, welche nach dem Scheitel gelangen könnten, wäre dieser isolirt im Raume vorhanden. Allein die Krümmung der Kugelfläche selber hindert einen Theil dieser Strahlen im Verfolg ihres Weges. Es giebt sich dies durch den Umstand zu erkennen, daß die tangirende Ebene $\omega' \chi'$ in's Innere des Strahlenkegels dringt und seinen Strahlenraum in zwei Theile schneidet, dergestalt, daß nur jene Strahlen, welche bezüglich der Geraden $m' c'$ im Raume rechts von $\omega' \chi'$ sich bewegen, den Scheitel des Kegels erreichen und ihn erhellen können. Je näher bei i' man den Scheitel nimmt, je kleiner wird das noch wirksame Segment der leuchtenden Sphäre, und von dem Punkte i' selbst wird zu behaupten sein, daß nur ein einziger Strahl ihn noch berühre. Es ergiebt sich aus dem Zusammenhange, daß die Kugelhaube $g' h' i' k'$ nur theilweises Licht empfange, daß sie im Halbschatten liege, wie man auch sagt. Von der Gränze $g' h'$ an nimmt auf der Zone die Lichtstärke ab, bis sie an der Gränze $i' k'$ Null wird. — Ein gleiches Verhalten wird sich in dem Raume $P O Q$ darstellen. Nimmt man einen Punkt dieses Raumes der Horizontalebene wieder als Spitze eines die Leuchtkugel tangirenden Kegels, legt zugleich aber durch die Spitze eine tangirende Ebene an die dunkle Sphäre, so wird diese Ebene sich im Inneren des Strahlenkegels ausdehnen und von der leuchtenden Kugel jenes Segment trennen, welches noch Strahlen nach der Spitze des Kegels zu senden vermag. Wiederum auch ist zu erkennen, daß dies noch wirksame Segment um so kleiner sein werde, je näher die Kegelspitze an der Gränze $R T U$ des völligen Schattens sich befindet.

Wir fassen folgendes allgemeine Ergebniß zusammen: Jene erste Kegel-

fläche, welche beide Sphären von einerlei Seite berührt, schließt jenseits der dunkeln Kugel den Raum ein, wohin kein Strahl der leuchtenden Kugel zu dringen vermag, den Raum des Kernschattens, und sie berührt die erstere Sphäre nach einem kleinen Kreise, welcher die im völligen oder Kernschatten befindliche Haube dieser Kugel abgränzt. Jene zweite tangirende Kegelfläche, welche die zwei Kugeln von entgegengesetzten Seiten berührt, und deren Scheitel zwischen beiden Mittelpunkten sich befindet, begränzt jenseits der dunkeln Kugel den Raum des Halbschattens, welcher nur theilweises Licht empfängt, und zwar in abnehmendem Grade von außen nach innen. Dieselbe Kegelfläche berührt die dunkle Kugel nach einem kleinen Kreise, welcher die Halbschattenzone von der völlig beleuchteten Haube scheidet.

Haben beide Flächen, die leuchtende und die dunkle, nicht mehr die sphärische, sondern eine andere Gestalt, oder ist dies auch nur bei einer von ihnen der Fall, dann verwandeln sich die genannten Kegelflächen in aufwickelbare Flächen von allgemeinerer Natur, deren eine die Region des Kernschattens begränzt, die andere die Region des Halbschattens, während ihre Bedeutung im Uebrigen all' dem entspricht, was im Falle der zwei Kugeln von deren tangirenden Kegelflächen hervorgehoben wurde.

338. **Eine Bemerkung.** In so weit vorstehende Erörterungen das Entstehen, das gegenseitige Verhalten krummer Flächen unter erweitertem Gesichtspunkte auffassen, und damit die Vorstellungskraft des Lernenden in Anspruch nehmen, sind sie ihrem ganzen Zwecke gerecht geworden. Doch möge uns noch ein kurzes, weiteres Wort über Lichtwirkung in zeichnerischer Beziehung hier gestattet sein. Wir haben bis daher das Licht nur in seiner direkten Wirkung betrachtet, nämlich auf dem Weg von seiner Quelle bis zu dem physischen Punkt, welchen es erhellt. Aber von den meisten undurchsichtigen Körpern wird das ihre Oberfläche treffende Licht theilweise wieder zurückgeworfen, einerseits zerstreut nach allen möglichen Richtungen, andererseits und in ausgesprochener Weise nach jener Richtung, welche durch das bekannte Gesetz der Reflexion des Lichtes angezeigt ist. So also wirken beleuchtete Flächentheile ihrerseits wieder als leuchtende Flächen und bringen auf anderen in ihrem Bereiche liegenden dunkeln Flächen völlig und halb erleuchtete Stellen hervor, welche man, freilich ohne nähere Unterscheidung, mit dem allgemeinen Namen der Reflexe bezeichnet. Allerdings verliert das zurückgeworfene Licht viel und schnell an seiner Intensität, allein vorhanden bleibt die Wirkung immerhin, wenn sie auch nicht stets so merklich wie

beim Mondschein sich kundgiebt. So z. B. würde unter Verhältnissen, wie in unserer Fig. *239*, durch die Horizontalebene Licht reflektirt werden, welches die dunkle Haube der beleuchteten Kugel bis zu gewissem Grade erhellte, und selbst darauf würde sich der Effekt nicht beschränken, vielmehr würde die erhellte Stelle ihrerseits wieder mildernd auf den Kernschatten *R T U* und dessen Umgebung zurückwirken. Wir wollen den angehenden Zeichner hier eingeladen haben, prüfenden Blickes solche Erscheinungen zu verfolgen, wo sie sich ihm darbieten, und dies wird, wenn er aufmerksam sein will, überall und jeden Augenblick geschehen.

Von den Uebergangspunkten der Berührungslinien krummer Flächen mit tangirenden Kegel- und Cylinderflächen.

339. Vergegenwärtigen wir uns irgend eine krumme Fläche nebst der tangirenden Ebene an einem ihrer Punkte, dann wird sogleich, je nach der besonderen Natur der Fläche, die Verschiedenheit in ihrem Verhalten zur Ebene hervortreten: Erstlich, daß bei gewissen Arten die dem Berührungspunkte benachbarten Theile der Fläche ganz auf einer Seite der tangirenden Ebene liegen, und diese mit der Fläche lediglich den Berührungspunkt gemein hat. Oder zweitens, daß die Fläche mit gewissen Theilen auf einer Seite der Ebene liegt und mit ihren anderen Theilen auf der entgegengesetzten Seite, wobei die Ebene zugleich als tangirend und schneidend auftritt. Zur ersten Art gehören die Sphäroide, die kreisrunden Kegel- und Cylinderflächen u. a., wir nennen sie Flächen mit konvexer Krümmung. Als Repräsentanten der zweiten Art wird man die Hyperboloide von einem Netze, überhaupt die windischen Flächen erkennen und wir zählen sie zu den Flächen mit konvex-konkaver Krümmung. Bei manchen Flächen wechselt diese Beschaffenheit ihrer Krümmung von einer Stelle zur anderen; die Annuloide z. B. zeigen auf ihrer äußeren, von der Achse entfernten Seite eine Konvexkrümmung und an ihrer Kehle die konvex-konkave Krümmung. Da nun der Kontakt krummer Flächen mit ihrem tangirenden Kegel oder Cylinder an jedem einzelnen Punkte der Berührungslinie von gleicher Beschaffenheit ist wie mit der tangirenden Ebene, so erklärt sich daraus, wie Flächen von konvexer Krümmung und ihre tangirenden Kegelflächen sich gegenseitig von einer und derselben berühren, während bei konvex-konkav gekrümmten Flächen diese Berührung bald von der einen, bald von der anderen Seite stattfinden kann, immer vorausgesetzt, daß man der Fläche so viel Körper-

liches zuschreibe, um eine rechte und linke, oder eine äußere und innere Seite an ihnen unterscheiden zu können.

Wir geben in Fig. *236* eine Pinthe oder die Kehle eines Annuloides, erzeugt durch Umdrehung der halben Ellipse $a' b' c'$ um die Achse $(A, A' A')$, welche beide in der Vertikalebene $C A C$ liegen. (s, s') ist der Scheitel einer die Plinthe tangirenden Kegelfläche und $(n p q o m r, q' p' n' r')$ deren beiderseitige Berührungslinie, welche nach der Vorschrift über Rotationsflächen konstruirt worden. An den Punkten (r, r'), (q, q'), welche der Hauptmeridianebene $C A s$ angehören, wird die Berührung der Plinthe mit den durch (s, s') gehenden tangirenden Ebenen auf der inneren, der Achse zugekehrten Seite der Fläche stattfinden. An den Punkten (i, i') und (j, i'), welche auf dem kleinsten Kreis der Fläche liegen, wird die Berührung mit den tangirenden Ebenen $s i$, $s j$ auf der äußeren Seite der Plinthenfläche vor sich gehen. Verfolgen wir nun die gerade Erzeugungslinie der tangirenden Kegelfläche, während ihrer Bewegung um die Umdrehungsfläche, indem wir bei der Stellung $(s r, s' r')$ beginnen. Hier wird die Fläche von der Geraden auf ihrer inneren Seite berührt, und die Gerade kreuzt die Berührungslinie im rechten Winkel. Entfernt man sich von (r, r') gegen (m, n') oder (n, n') hin, so durchkreuzen sich die Geraden und die Berührungslinie unter stets spitzerem Winkel. Hat die Gerade die Stellung $(s m, s' m')$ oder $(s n, s' n')$ erreicht, so ist sie zur Tangente der Berührungslinie geworden, und es läßt sich eben so wohl behaupten, die Berührungspunkte (m, n'), (n, n') lägen auf der inneren wie auf der äußeren Seite der Umdrehungsfläche; (m, n') und (n, n') sind also zwei Uebergangspunkte, in welchen die Berührungslinie $(m r n, r' n')$ von der inneren auf die äußere Seite der Plinthenfläche gleitet. Bei (p, p') und (o, p') ist die gerade Erzeugungslinie der Kegelfläche abermals zur Tangente der Berührungslinie geworden, und es geben sich diese Punkte als neue Uebergangspunkte zu erkennen, in welchen die Berührungslinie mit ihrem Bogen $(o q p, q' p')$ zum zweiten Male auf der inneren Flächenseite hervortritt. Zu näherer Verdeutlichung haben wir in Fig. *237* den ganzen Vorgang noch in schräger Projektion wiedergegeben und in beiden Figuren diejenigen Stücke der Berührungslinie, welche, nach der gemachten Unterscheidung, sichtbar sein könnten, durch volle Linien ausgedrückt, die nicht sichtbaren Theile durch punktirte Linien. — Betrachtet man den Scheitel (s, s') als leuchtenden Punkt, und die Berührungslinie als Trennungslinie von Schatten und Licht, so wird erhellen, daß die Bögen

n r n und *o q p* alsdann wirklich vorhanden sein können, wenn die innere Wandung der Fläche (man gestatte die Vorstellung) dem Lichte zugängig ist. Dagegen muß es die äußere Wandung sein, wenn die Bögen *n j p*, *m i o* in der Eigenschaft als Scheidelinien zwischen Schatten und Licht erscheinen sollen.

340. Fortsetzung. Sicherlich beruhen die Ergebnisse unserer Discussion von Fig. *236* auf keiner besonderen Eigenthümlichkeit der krummen Fläche, woran wir das Vorhandensein von Uebergangspunkten ihrer Berührungslinie mit einer tangirenden Kegelfläche nachgewiesen, und wir fassen den Vorfall folgendermaßen zusammen:

Irgend eine krumme Fläche wird von einer umschriebenen Kegel- oder Cylinderfläche berührt, wenn alle geraden Erzeugungslinien der letzteren Tangenten der ersten Fläche sind. Befindet sich unter diesen Geraden eine oder die andere, welche auch die Berührungslinie bei der Fläche selbst tangirt, so ist der Berührungspunkt auch ein Uebergangspunkt, in welchem die Berührungslinie von einer Seite der (als materiell gedachten) krummen Fläche auf die andere Seite übergleitet. Das Vorhandensein solcher Tangenten aber giebt sich dadurch zu erkennen, daß ihre Projektionen Tangenten sind an die Projektionen der Berührungslinie, und daß die zwei Berührungspunkte einer Senkrechten der Grundlinie angehören. So zeigt sich z. B., daß (q, q') in Fig. *226* gleichwie in Fig. *227* Uebergangspunkte der Berührungslinien seien.

In unserer Fig. *238* haben wir übereinstimmend mit Fig. *226* die Berührungslinie einer Wendelfläche und einer tangirenden Cylinderfläche nach schräger Projektion wiedergegeben. Die geraden Erzeugungslinien der Cylinderflächen sind parallel der Geraden GH, als deren Horizontalprojektion gH zu betrachten ist. Die Tangenten qt, $q't'$ ...., welche zu GH parallel sind, tangiren die Berührungslinie in t, t' ...., welche Punkte somit Uebergangspunkte der Berührungslinie sind.

Uebergänge, wie die fraglichen, von einer Flächenseite auf die andere, können bei Flächen mit konvexer Krümmung überall nicht vorkommen, und sie müssen bei konvex-konkaven Flächen nicht unter allen Umständen erscheinen. So z. B. ist leicht zu entnehmen, daß in Fig. *219* die Berührungslinie $(\alpha q \beta, \alpha' q' \beta \ldots, \varepsilon o \zeta, \varepsilon' o \zeta' \ldots)$ mit der Kegelfläche, deren Scheitel in (s, s'), ganz der äußeren Seite des Hyperboloides angehört. Ueberhaupt können Uebergangspunkte nicht vorkommen, wo die Berührungslinie eine ebene Kurve ist.

Ebene Schnitte krummer Flächen.

341. Die Linie, nach welcher eine ebene und eine krumme Fläche sich gegenseitig durchdringen oder durchschneiden, wird in der Regel eine Kurve, d. i. eine krumme Linie sein. Wir konstruiren dieselbe punktweise dadurch, daß in beiden Projektionen die Orte festgesetzt werden, in welchen eine Reihe von Erzeugungslinien der krummen Fläche die Ebene durchdringt. §. 95.

An einem Punkte des Durchschnittes einer ebenen und krummen Fläche die Tangente zu konstruiren, ist eine häufig auftretende Forderung. Diese Tangente bildet den gemeinsamen Durchschnitt der ebenen Fläche und der tangirenden Ebene der krummen Fläche an dem gegebenen Berührungspunkt, weil sie gleichzeitig diesen beiden Ebenen angehören muß. §. 100.

Nicht minder häufig stellt sich die Aufgabe, den ebenen Schnitt einer krummen Fläche, dessen beide Projektionen entworfen sind, in wahrer Gestalt zu erhalten. Es wird diesem Genüge geleistet durch Umlegung des Schnittes in eine der Projektionsebenen, indem man die Ebene desselben um den entsprechenden Riß als Charnier dreht, oder auch dadurch, daß man als Charnier eine Parallele zu einem der Risse wählt und die Ebene nebst der Linie in ihr umdreht, bis sie zur Projektionsebene parallel liegt.

Mit dem hier Angedeuteten ist ungefähr Dasjenige ausgeführt, was man in einem Lehrgange der darstellenden Geometrie über die ebenen Schnitte krummer Flächen vorzutragen pflegt; sowie überhaupt eine Aufgabe dieser Wissenschaft als gelöst betrachtet werden kann, sobald man dasjenige, was einen Vorgang im Raume betrifft, vermittelst der Projektionen auf einen Vorgang in der Ebene zurückgeführt hat. Wenn wir dessen ungeachtet manche unserer Konstruktionen nutzbar machen, um gleichsam als Nebengewinn gewisse Eigenschaften krummer Linien daraus abzuleiten, so folgen wir darin nur einer bekannten Vorschrift bei jeglichem Studium, den Lernenden nämlich auf einen möglichst allgemeinen, einen Ueberblick gewährenden Standpunkt zu stellen. Ein solcher aber wird gewonnen, sobald man unternimmt, die Methode der Projektionen in allgemein geometrischer Beziehung zur Anwendung zu bringen; denn dieser Methode als Untersuchungs- und Lehrmittel wohnt erstlich eine große Anschaulichkeit inne, weil sie stets zur Vorstellungskraft des Lernenden spricht, und andererseits muß den projektiven Gesetzen eine gleiche Allgemeingiltigkeit zuerkannt werden, wie etwa den Gesetzen der Analysis. Gerade das Kapitel von den ebenen Schnitten der krummen Flächen erscheint geeignet, Belege hierfür zu liefern. Auch wird sich

zeigen, wie die einfachsten Grundbeziehungen sich oft als die fruchtbarsten erweisen an zulässigen Folgerungen.

Ebene Schnitte der scheitrechten Umdrehungsflächen.

342. Punkte der Durchschnittslinie finden sich, indem man die Begegnungsorte der schneidenden Ebene mit geraden Erzeugungslinien festsetzt, oder die Begegnungsorte dieser Ebene mit Parallelkreisen der Fläche, wie dies letztere bei allen Umdrehungsflächen ohne Ausnahme thunlich ist. Im einzelnen Falle wird man diejenige von beiden Bestimmungsweisen anwenden, welche das praktisch sicherste Ergebniß liefert, d. h. bei welcher die Projektionen der einzelnen Punkte durch eine am wenigsten schiefwinklige Kreuzung zweier Linien erhalten werden.

Ebene Schnitte der Rotations-Cylinderflächen.

343. Unterscheiden wir drei verschiedene Stellungen der Ebene gegen die Rotationsachse: erstlich die rechtwinklige Stellung, bei welcher das Ergebniß des Schnittes ein Parallelkreis der Cylinderfläche sein wird. Zweitens eine Stellung parallel zur Achse, bei welcher als Schnitt zwei gerade Erzeugungslinien der Fläche hervorgehen. Diese zwei Geraden vereinen sich, wenn die Ebene tangirend wird zur Cylinderfläche. Drittens die schräge Stellung der Ebene gegen die Achse. Hier wird die Ebene sämmtliche Erzeugungslinien durchkreuzen, also eine geschlossene krumme Linie als Schnitt hervorbringen. Nur von dieser letzteren Art der Schnitte ist hier zunächst die Rede.

Die Schnitte einer Cylinderfläche durch parallele Ebenen E', E'', E''' ... rc. sind gleiche Kurven A', A'', A''' ... rc., denn denkt man sich in der Linie A' irgend eine Sehne S' gezogen und durch sie eine Ebene F parallel zur Achse gelegt, so schneidet diese die Cylinderfläche nach zwei geraden Erzeugungslinien, welche durch die Enden der Sehne S' gehen. Die Ebene F aber wird in den Ebenen E'', E''' parallele Schnitte zu S' hervorbringen, welche, so weit dieselben zwischen den Parallelen liegen, gleiche Größe mit S' haben und als gleich große Sehnen S'', S'' .. der Linien A'', A''' ... erscheinen. Da Solches bei allen denkbaren Sehnen der Linie A', A'', A''' ... stattfinden muß, so folgt daraus, daß diese Kurven durch Aufeinanderlegen zur Deckung gebracht werden können, d. i. daß sie gleich seien. Die Beweisführung gilt begreiflich für alle Cylinderflächen ohne Ausnahme.

Ist eine Cylinderfläche durch verschiedene unter sich nicht parallele Ebenen geschnitten, und man betrachtet die geraden Erzeugungslinien der Fläche als projicirende Linie, so erscheint jeder der Schnitte als die gemeinsame Projektion aller andern. Aus diesem Satze, dessen Geltung sich auf alle Cylinderflächen ohne Unterschied ausdehnt, folgt, daß alle ebenen Schnitte irgend einer Cylinderfläche Linien von gleicher geometrischer Art seien. Ist nämlich die eine Linie geschlossen oder geht sie ins Unendliche, so findet Gleiches bei der andern statt. — Hat die eine Linie einen Durchmesser, d. i. eine Gerade, welche durch die Mitte aller zu irgend einer Richtung parallelen Sehnen geht, so findet sich auch in jedem der anderen Schnitte ein solcher Durchmesser. — Besitzt einer der Schnitte einen Mittelpunkt, einen Punkt nämlich, in welchem sich alle Durchmesser gegenseitig halbiren, so ist solches auch bei den andern Schnitten der Fall u. s. w.

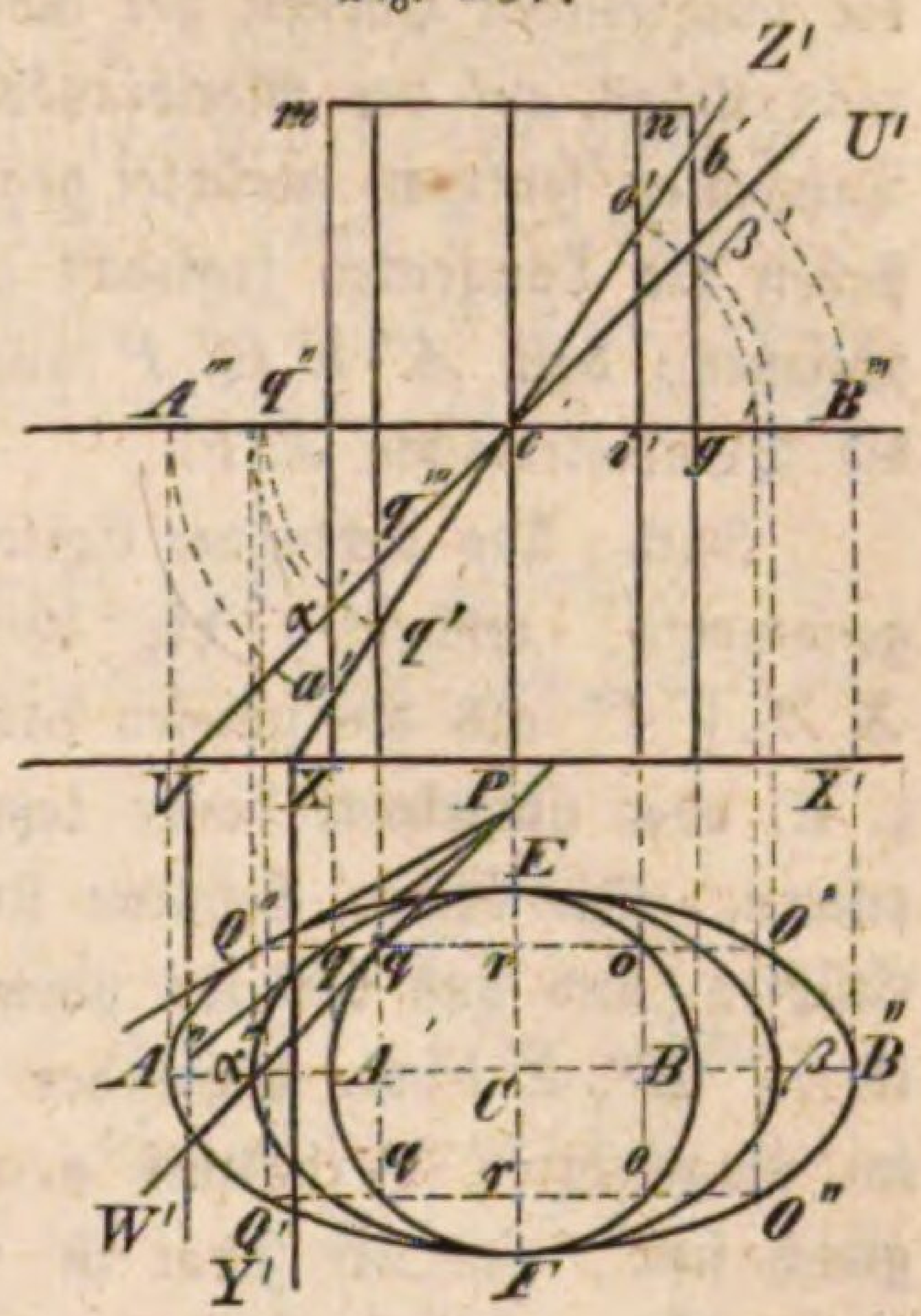
344. Den besondern Fall einer Rotations-Cylinderfläche wieder ins Auge fassend, so mag die Stellung der beiden Projektionsebenen in Bezug auf die Rotationsachse jede beliebige sein, die Konstruktion von Punkten der Durchschnittslinie der Fläche mit einer Ebene bietet keinerlei Schwierigkeit, sobald man die geraden Erzeugungslinien der Fläche hierzu in Anwendung bringt. Insofern es sich jedoch nur um die wahre Gestalt, überhaupt um die Beschaffenheit des Schnittes handelt, läßt sich durch zweckentsprechende Wahl der Projektionsebenen eine Vereinfachung der graphischen Arbeit gewinnen.

Bezeichnet A die Rotationsachse und E die schneidende Ebene, so läßt sich eine erste Ebene senkrecht auf A annehmen und deren Schnitt mit E festsetzen, welcher P heißen soll. Senkrecht auf P ordnet man eine zweite Ebene an und giebt dem Ganzen eine solche Drehung, daß die erste Ebene zur horizontalen, die zweite zur vertikalen Projektionsebene wird.

Dies sei in Fig. 237 ausgeführt. Die Rotationsachse C steht senkrecht auf der Horizontalebene und der Kreis $AFBE$ ist auf ihr die Projektion der ganzen Cylinderfläche; die schneidende Ebene steht senkrecht auf der vertikalen Projektionsebene und projicirt sich darauf als eine Gerade XZ', ihr Horizontalriß XY steht senkrecht auf der Grundlinie XX'. Der Kreis $AFBE$ erscheint als Horizontalprojektion der ganzen Cylinderfläche, also auch ihres Schnittes durch die Ebene YXZ'. Nachdem die senkrechten Tangenten Am', Bn' des Kreises gezogen worden, deren obere Theile die Umrisse der Vertikalprojektion des Cylinders bilden, erscheint in $a'b'$ die Vertikalprojektion des Durchschnittes der Fläche und der Ebene XZ'.

Die Tangente an irgend einem Punkte (Q, q') der Durchschnittskurve liegt in der tangirenden Ebene dieses Punktes, deren Horizontalprojektion die Kreistangente $Q\,P$. Dies $Q\,P$ ist zugleich Projektion der Tangente an die Durchschnittskurve, so wie man $X\,Z'$ als deren Vertikalprojektion erkennen wird.

Fig. 237.



Was schließlich die wahre Gestalt der Durchschnittskurve betrifft, so haben wir dieselbe bei $A''\,E\,B''\,F$ dadurch erhalten, daß die Ebene $X\,Z'$ um die Horizontale $(c', E\,F)$ als Charnier gedreht ward, sie nebst den Linien in ihr in die wagerechte Stellung $A'''\,B'''$ zu bringen.

Ein jeder Punkt der Ebene beschrieb dabei einen Kreisbogen, dessen Ebene zur vertikalen Projektionsebene parallel stand. Dadurch fiel (A, a') nach A'', (B, b') nach B'', indem die Länge $c'\,a'$ oder $c'\,b'$ von c nach A'' und B'' getragen ward; (O, o') fiel nach O'' $(r\,O'' = c'\,o')$ 2c.; E und F endlich, als auf dem Charnier liegend, blieben fest.

Für die Tangente $(P\,Q, c'\,q')$ fiel der Berührungspunkt nach Q'', während der Punkt P auf dem Charniere unverändert blieb.

Man sieht in der Figur noch den Schnitt der Cylinderfläche und der Ebene $W\,V\,U'$ verzeichnet, welche gleichfalls auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht und sich mit der Ebene $X\,Z'$ nach der Wagerechten $(c', E\,F)$ schneidet. Bei $\alpha''\,E\,\beta''\,F$ ist die Umlegung dieses Schnittes in die Ebene $A'''\,B''''$ verzeichnet, wobei für die Tangente an dem Punkte q'' des umgelegten Schnittes P wiederum unverändert geblieben.

345. Bei allen Umdrehungsflächen ohne Ausnahme wird die Durchschnittslinie L der Fläche und einer Ebene, welche schief gegen die Rotationsachse steht, symmetrisch gebildet sein gegen diejenige Meridianebene, welche senkrecht steht auf der schneidenden Ebene. Denn letztere Ebene schneidet jeden Parallelkreis, den sie trifft, nach einer Sehne, welche auch Sehne der Linie L ist, welche senkrecht steht auf genannter Meridianebene und von dieser halbirt wird.

So ist auch in Fig. 237 die Durchschnittslinie $A''\,E\,B''\,F$ gleich ihrer

Horizontalprojektion symmetrisch gebildet gegen $A'' B''$, auf welcher Achse auch die Mitten aller Sehnen $O'' O''$, $o\,o$ liegen. An den Punkten (A, a') und (B, b') stehen die Tangenten des Schnittes senkrecht gegen $A B$, weil hier die tangirenden Ebenen der Rotationsfläche gleich der schneidenden Ebene senkrecht stehen auf der Meridianebene $A B$. So sind auch bei A'' und B'' die Tangenten senkrecht gerichtet gegen die Achse $A'' B''$. Bei (E, c') und (F, c') stehen die Tangenten senkrecht gegen den Durchmesser $(E F, c')$, woraus zu schließen, daß $A'' E B'' F$ auch symmetrisch gebildet erscheint in Bezug auf die Symmetrieachse $E F$.

346. Die Achse der Cylinderfläche als Richtung der projicirenden Linien genommen, erscheinen die beiden Schnitte der Fläche durch die Ebenen $X Z', V U'$ als die schiefen Projektionen irgend eines der Parallelkreise $m' n'$, z. E. oder umgekehrt dieser letztere als die gerade Projektion von einer der erstern. Die beiden Schnitte sind nach der früher angenommenen Erklärung Ellipsen, und aus den im vorigen §. stattgehabten Erörterungen wird man in $A'' B'', E F$ die Achse der Ellipse erkennen, deren Ordinaten*) $r\,O''$ den im umgekehrten Verhältniß von $C B : C B''$ vergrößerten Kreisordinaten $r\,o$ gleich sind. In der That ist vorerst $B C = c' g'$; $C B'' = c' b'$; $o\,r = c' i'$; $O'' r = c' o'$. Aber wegen der ähnlichen Dreiecke $c' b' g'$ und $c' o' i'$ hat man

$$\frac{c' g'}{c' b'} = \frac{c' i'}{c' o'} \text{ oder } \frac{G B}{G B''} = \frac{o\,r}{O\,r''}.$$

Setzt man das konstante Verhältniß $\dfrac{c' g'}{c' b'} = m$, so ergiebt sich

$$C B'' = \frac{C B}{m};\; O'' r = \frac{o\,r}{m}.$$

Würde man umgekehrt den Kreis $A E B F$ als rechtwinklige Projektion der Ellipse $a' b'$ betrachten, so fände sich für eine Kreisordinate $o r$ z. B. der Werth

$$o\,r = m \times O'' r.$$

Bei der rechtwinkligen Projektion eines Kreises erscheinen die Ordinaten der

*) Wo es sich um Projektionen in einer Ebene handelt, sind die Ausdrücke Projektionen und projicirende Linien ziemlich gleichbedeutend mit den Ausdrücken Abschnitt (Abscissen) und Ordinaten. Wird $A X$ in Fig. 160 (Seite 267) als Achse und A als Anfangspunkt genommen, dann ist $P p$ die Ordinate und $A p$ die Abscisse des Punktes P; $M m$ die Ordinate, $A m$ die Abscisse des Punktes M 2c.

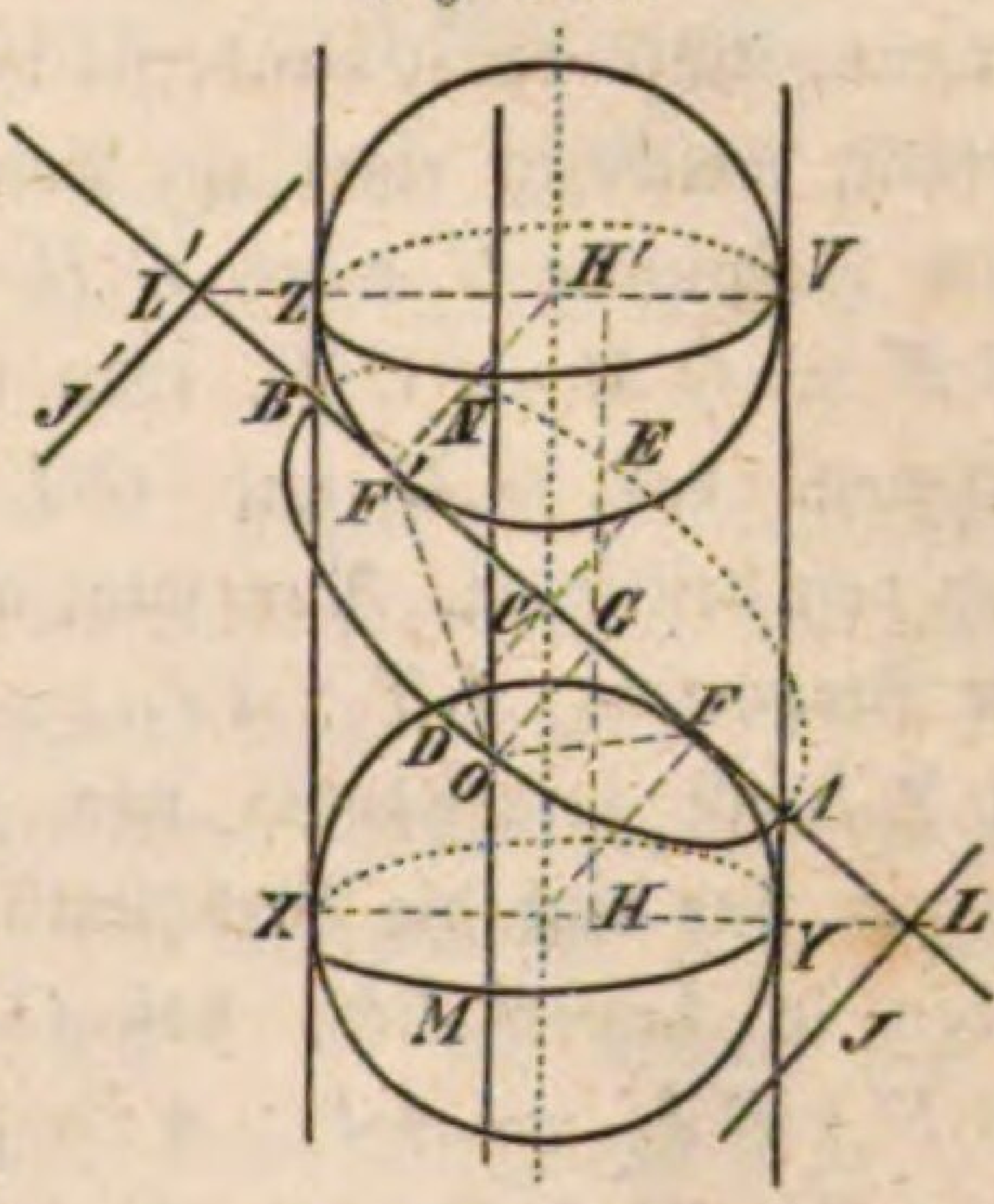
Projektion als proportional **verkürzte** Kreisordinaten. Setzt man in Fig. *146* (Seite 245) das Verhältniß $\frac{G'\varepsilon}{GE''} = m$, so folgt unter Anderem

$$\varphi\gamma = m \times F'G' \text{ ꝛc.}$$

347. **Lehrsatz.** **Die Durchschnittslinie einer Umdrehungscylinderfläche und einer Ebene, welche schief gegen die Rotationsachse steht, hat auf der großen Achse des Schnittes zwei Brennpunkte von der Beschaffenheit, daß die Summe der Abstände eines Punktes der Kurve von diesen Brennpunkten gleich ist der großen Achse.**

Es stellt Fig. *238* (nur versinnlichend, nicht regelrecht gezeichnet) eine Umdrehungs-Cylinderfläche dar, welche von einer schräg gegen die Achse der Fläche gestellten Ebene nach einer Ellipse $ADBE$ geschnitten worden. Eine Meridianebene, welche auf der Ellipsebene senkrecht steht, schneidet diese nach der großen Achse AB und die Cylinderfläche nach zwei geraden Erzeugungslinien YAV, XBZ. Es werden sofort zwei Kreise verzeichnet, welche die Parallelen YV, XZ berühren, sowie die Gerade AB, letztere nämlich von entgegengesetzten Seiten. F und F' seien die Berührungspunkte, so steht die Behauptung, daß für irgend einen Punkt O der Durchschnittslinie die Summe der Abstände $OF + OF'$ gleich sei der Achse AB.

Fig. *238*.



Dies zu beweisen, lasse man die Kreise sammt ihren zwei parallelen Tangenten um die Rotationsachse drehen, so werden die letztern die Cylinderfläche wieder hervorbringen und die Kreise werden zwei Kugeln erzeugen, welche von ersterer nach den zwei durch die Berührungspunkte X oder Y, V oder Z beschriebenen Parallelkreisen berührt werden; F, F' sind die Berührungspunke der Kugeln mit der Ellipsebene. Nun haben alle geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche zwischen den Parallelkreisen die gleiche Länge XZ oder YV, und der ersten Konstruktion zufolge mußten die Kreistangenten BF', BZ, AY, AF ineinander gleich werden, woraus $BF' = AF$ folgt. Nachdem durch O die Erzeugungslinien MON gezogen worden, hat man $OF' = ON$ als zwei Tangenten an die obere Kugel,

welche von einem gemeinsamen Punkt ausgehen. Aus demselben Grunde hat man aber auch $OF = OM$; daher

$$OF + OF' = OO + OM = MN = YV = \text{beständig}.$$

Sodann

$$MN = YV = AY + AV = AF' + AF' = AB.$$

348. Zusatz. Durch die Ebenen der zwei Parallelkreise VNZ, YMX wird die Ellipsebene nach zwei Geraden geschnitten, welche auf AB senkrecht stehen und durch die Punkte L, L' gehen, LJ, $L'J'$ seien diese Geraden. Sie heißen die **Leitlinien** der Ellipse und stehen in solcher Beziehung zur Linie, daß **für jeden Punkt des Umfanges sein Abstand von einem Brennpunkt und sein Abstand von der benachbarten Leitlinie ein konstantes Verhältniß bilden.** Dies nachzuweisen sei O irgend ein Punkt der Ellipse, und MN die durch sie gehende gerade Erzeugungslinie der Cylinderfläche. Aus O sei auf AB die Senkrechte OG gefällt, welche in einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene liegen wird. Aus dem Fußpunkte G ward GH senkrecht auf XY gefällt und man wird haben $GH = OM = OF$, eben so $GH' = ON = OF'$. Ferner ist zu entnehmen, daß GL und GL' gleich seien den Abständen des Punktes O von den Leitlinien. Nun folgt aus den ähnlichen Dreiecken AYL und GHL die Proportion $AY : AL = GH : GL = OF : GL$. Aber das Dreieck AYL ist unabhängig von dem Orte des Punktes O und $AY = AF$, darum sind auch die Verhältnisse $AF : AL = OF : GL =$ unveränderlich. Eben so beweist sich, daß $OF' : GL'$ ein konstantes Verhältniß und $= BF' : BL' = AF : AL$ sei. Zudem ist bei einem elliptischen Schnitt des Rotationscylinders FAY immer ein stumpfer Winkel und deshalb $AY = AF$ kleiner als AL, also auch das konstante Verhältniß $\frac{AF}{AL} < 1$. Auf dieses Mindere, Mangelnde bezieht sich der griechische Name Ellipsis.

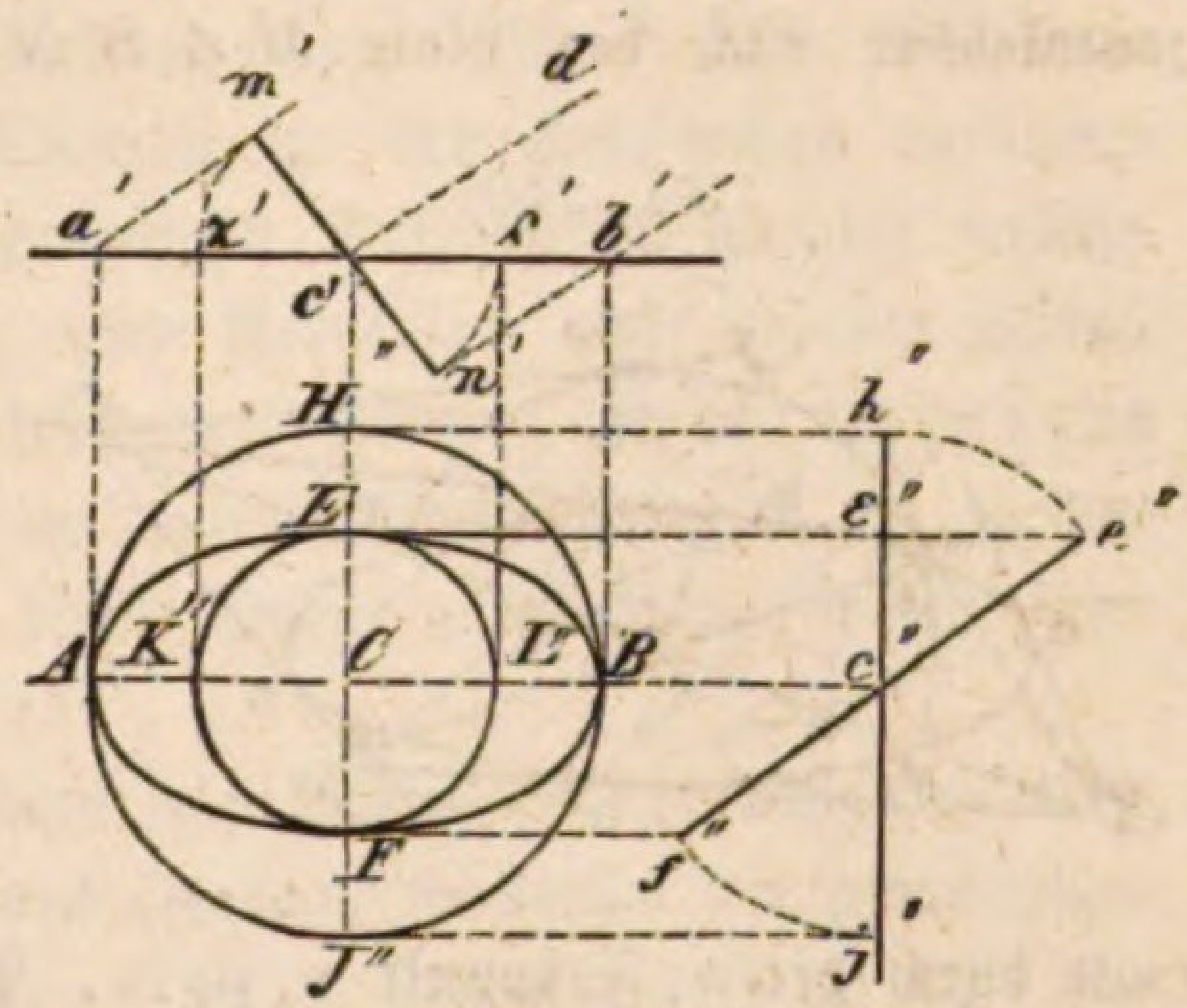
Zieht man durch jeden Brennpunkt der Ellipse eine auf der großen Achse senkrechte Sehne und an den Enden derselben die Tangenten der Ellipse, so werden diese sich paarweise in den Punkten L, L' der Leitlinien kreuzen, ein Satz, der sich vermittelst einer Horizontalprojektion von Fig. 238 leicht beweisen lassen wird.

349. **Jede Ellipse kann hervorgebracht werden durch die gerade Projektion eines Kreises, dessen Durchmesser gleich ist der großen Achse, und gleichzeitig auch durch die schräge Pro-**

jektion eines Kreises, dessen Durchmesser gleich ist der kleinen Achse.

Die Ellipse $AEBF$ Fig. 239 kann betrachtet werden als etwa in horizontaler Ebene liegend und es sei über je einer Achse AB, EF als Durchmesser ein Kreis beschrieben. Den größeren Kreis denke man sich um den Durchmesser AB so lange gedreht, bis die Enden des darauf senkrechten Durchmessers H'', J'' sich nach E und F projiciren, und man hat ihm die begehrte Stellung gegeben. Aus einer Seitenprojektion, deren Grundlinie $h''\,j''$ senkrecht auf AB steht und deren übrige Bedeutung unsern Lesern klar sein wird, geht hervor, daß der Kreis, um sich in gerader Projektion als die Ellipse $AEBF$ darzustellen, unter einem Winkel $h''\,c''\,e''$ gegen die Horizontalebene gedreht werden müsse. Die projicirende Cylinderfläche kann dabei als gerade und elliptisch, oder als schräg und cirkulär angesprochen werden.

Fig. 239.



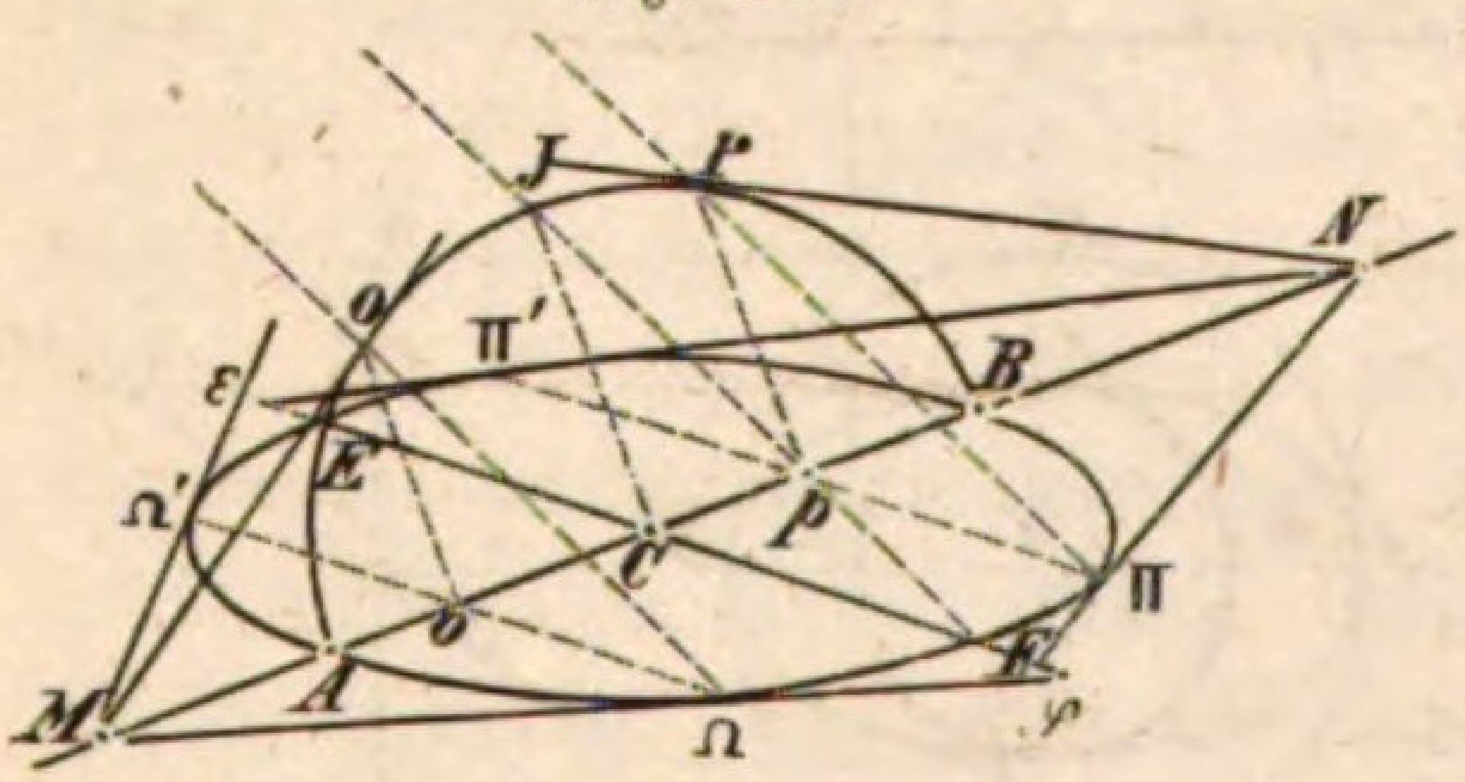
Den Fall der schrägen Projektion zu bezeichnen, stellten wir die Grundlinie $a'\,b'$ der Seitenprojektionen senkrecht auf den Durchmesser EE, projicirten A, C, B nach a', c', b' und beschrieben mit CK'' als Radius aus c' die Kreisbogen $\varkappa'\,m'$, $\lambda'\,n'$; wir zogen aus a' und b' die Tangenten $a'\,m'$, $b'\,n'$ an die Bögen und stellten endlich $m'\,c'\,n'$ rechtwinklig gegen $a'\,m'$. Wird nun $m'\,c'\,n'$ als Vertikalprojektion des um seinen Durchmesser EF gedrehten Kreises $E\,K''\,F\,L''$ betrachtet, so hat man denselben durch Gerade ($m'\,a'$, CA), ($b'\,n'$, BC) . . ꝛc. schräg in die Horizontalebene zu projiciren, um als Ergebniß die Ellipse $EAFB$ zu erhalten, weil die Projektion nothwendig gleiche Achsen erhält wie diese Ellipse, also mit ihr identisch sein muß.

Unsere Figur zeigt noch, daß in einer Rotations-Cylinderfläche, deren Durchmesser gleich EF einen elliptischen Schnitt von der Gestalt $EAFB$ hervorbringen, die schneidende Ebene unter einem Winkel $b'\,c'\,d'$ gegen die Umdrehungsachse geneigt sein müsse.

Im Uebrigen geht aus unserer Figur mit völliger Schärfe hervor, wie alle projektiven Eigenthümlichkeiten des Kreises, welche auf die Ellipse übergehen, gleichmäßig bestehen bei gerader wie bei schräger Projektionsweise.

350. Es möge wohl beachtet werden, daß in dem Vorhergehenden nur von den beiden Kreisen die Rede gewesen, deren Durchmesser einer oder der andern Achse der Ellipse gleichen, denn außerdem ist diese Linie auch zu betrachten als die schräge Projektion eines jeden Kreises, dessen Durchmesser gleich ist irgend einem Durchmesser der Ellipse. In der That nehme man den Kreis AJB Fig. 240 als in schiefer Ebene liegend, welche die Horizontalebene nach der Linie $MABN$ durchschneidet. (Die untere Hälfte desselben ward unterdrückt, eine Ueberladung zu vermeiden.) EF sei eine in der Horizontalebene durch das Centrum C gehende Gerade von beliebiger Länge, doch $EC = FC$. Nachdem der Halbmesser CJ senkrecht auf AB gezogen worden, sowie einige ihm parallele Kreisordinaten oder halbe Sehnen Oo, Pp, .. ꝛc., ziehe man durch deren Fußpunkt $o, p, \ldots$ Parallelen zu EF, ferner durch die Kreispunkte O, P', ... Parallelen mit JF und markire die Kreuzungspunkte Π, Ω, .. Π', Ω', .., welche einer Ellipse $A\Omega B\Pi'$ angehören werden, weil die Parallelen zu JF als schräg projicirende Linien genommen werden können. AB und EF sind in der Ellipse konjugirte Durchmesser, denn sie erscheinen als die Projektionen zweier im Kreise unter sich rechtwinkligen Durchmesser, und schon der Konstruktion zufolge liegen auf AB die Mitten aller zu EF parallelen Sehnen, so wie ihrerseits EF alle zu AB parallelen Sehnen halbirt würden. — Konstruirte man nun in der Ellipse zwei andere konjugirte Durchmesser (indem der eine beliebig angenommen, der andere durch C und durch die Mitte einer dem ersten parallelen Sehne gelegt würde), beschriebe über dem ersten Durchmesser einen Kreis und führte in Bezug auf diesen Kreis und die beiden Durchmesser dieselbe Konstruktion aus wie für AB und EF, so müßte als schräge Projektion des zweiten Kreises eine Ellipse entstehen, welche mit $A\Omega B\Pi'$ zwei konjugirte Durchmesser gemein hat, also mit ihr identisch ist. Denn zwei derartige Durchmesser bestimmen die Ellipse so vollständig wie ihre zwei Achsen, welche selbst nur solche konjugirte Durchmesser sind, die auf einander rechtwinklig stehen.

Fig. 240.



Unsere Fig. 240 zeigt übrigens, wie eine Ellipse punktweise zu konstruiren sei, wenn von ihr zwei konjugirte Durchmesser gegeben sind.

351. **Fortsetzung.** Bezüglich der Tangenten entnehmen wir der Figur noch Folgendes. Ist OM die Kreistangente in O, und Ω die schräge Projektion an O, so folgt daraus $M\Omega$ als Ellipstangente in Ω. Denkt man sich die Kreisordinate Oo nach abwärts verlängert, bis sie den Kreis nochmals in O' schnitte, so wäre Ω' die schräge Projektion dieses Punktes und $M\Omega'$ ist die Ellipstangente in Ω', weil die Kreistangente in O' durch M gehen muß. Ebenso fanden sich die Ellipstangenten $N\Pi$, $N\Pi'$. Weil nun im Kreise alle Tangenten, welche den Umfang an den Endpunkten paralleler Sehnen berühren, sich paarweise auf demjenigen Durchmesser kreuzen, welcher rechtwinklig gegen die Sehnen steht, so wird Aehnliches auch bei der Ellipse stattfinden, d. h. werden bei der Ellipse aus Punkten eines verlängerten Durchmessers beliebige Tangentenpaare an den Umfang gezogen, so werden für jedes Paar die Berührungspunkte einer Sehne angehören, welche dem Durchmesser beigeordnet ist.

Man betrachte Mo in der Kreisebene als Projektion der Tangente MO, dann ist Mo, als auch in der Ellipsebene liegend, wiederum die gemeinsame Projektion der Ellipstangenten $M\Omega$ und $M\Omega'$. Desgleichen zeigt sich Np als Projektion der Kreistangente NP, sowie die Ellipstangenten $N\Pi$, $N\Pi'$. Aehnlich erscheint in Fig. 237 rP als gemeinsame Projektion der Tangenten PQ, Pq'', PQ''. In der analytischen Geometrie nennt man eine solche Projektion der Tangente auf den beigeordneten Durchmesser die Subtangente, und man pflegt das vorige Ergebniß kurz so auszudrücken: haben zwei Ellipsen oder ein Kreis und eine Ellipse einen gemeinsamen Durchmesser, so haben sie auch für gleichnamige Punkte die gleiche Subtangente. Dies führt rückwärts wiederum zu einer Konstruktion der Tangente einer Ellipse, welche durch einen gegebenen Punkt N oder Π gehen soll. (Auf andere Konstruktionsweisen der Tangenten ist bereits in §§. 147, 171 hingewiesen worden.)

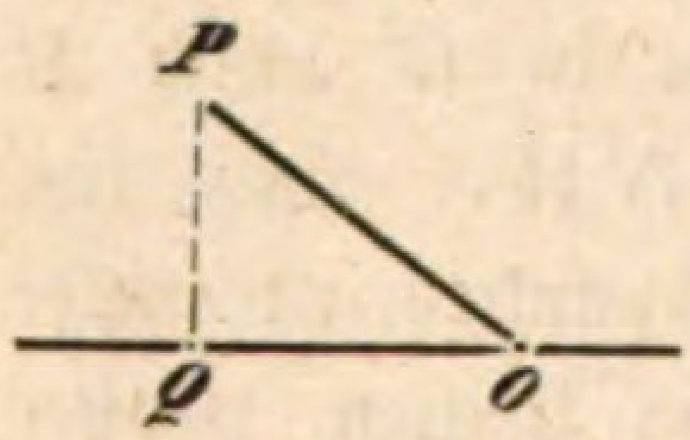
352. **Fortsetzung.** Ward eine Ellipse punktweise bestimmt, z. B. als Durchschnittslinie zweier Flächen, so können deren Centrum und Achsen verlangt werden. Folgende Sätze leiten zur desfallsigen Konstruktion.

I. Die Mitten zweier parallelen Sehnen gehören einem Durchmesser an, und seine Mitte ist der Mittelpunkt der Linie.

II. Zwei gleichgroße Durchmesser der Ellipse liegen stets symmetrisch gegen beide Achsen. Wird daher aus dem Centrum der Ellipse ein Kreis beschrieben, welcher deren Umfang in vier Punkten schneidet, so sind die Diagonalen des dadurch angezeigten Rechteckes zwei gleichgroße Durchmesser, und die Rechtecksseiten liegen den Achsen parallel.

353. Vor weiterem Verfolg unseres Stoffes haben wir ein Wort über die Projektion von Flächenräumen zu sagen. Das rechtwinklige Dreieck PQO Fig. 241 wolle man als eine Vertikalprojektion betrachten und zwar OQ als Grundlinie, OP als Projektion eines Rechteckes oder Dreieckes, dessen Grundlinie g in der Horizontalebene liegt und sich als Punkt O projicirt. Alsdann ist OP gleich der Höhe h der Figur und ihr Flächenraum wäre $= g\,h =$ bezw. $= \frac{1}{2}\,g\,h. = \Phi$. Es wird nämlich h entweder mit OP identisch sein, oder zu dieser Linie parallel liegen. Die Horizontalprojektion Φ' des Flächenraumes ist vorgestellt durch OQ und ausgedrückt durch $\Phi' = g \times OQ$. Indem man die jetzige Höhe OQ als die Projektion von h betrachtet, wird dies OQ abhängen von dem Winkel O oder, was gleichbedeutend ist, von dem Verhältniß $OQ : OP$. Setzt man dies Verhältniß, nämlich $\frac{OQ}{OP} = m$, also $OQ = m \times OP$, so findet sich $\Phi' = g \times m \times OP = m \times \Phi$. Würde OP ein Dreieck vorstellen ohne horizontale Grundlinie, so ließe sich dies in zwei Dreiecke theilen mit einer gemeinsamen horizontalen Grundlinie und in diesem Falle wäre denn OP gleich der Summe der Höhen beider Dreiecke, aber die Grundlinie projicirte sich auf die Horizontalebene in gleicher Größe und OQ wäre wiederum gleich der Summe der Höhen beider Projektionen, auch abermals gleich $m \times OP$, so daß, wenn Φ den Flächenraum des Dreieckes und Φ' den Flächenraum seiner Horizontalprojektion bedeuten, wiederum die Beziehung hervortreten wird $\Phi' = m \times \Phi$. Da sich nun ein jedes Polygon, welches in schiefer Ebene liegt, in eine gewisse Anzahl von Dreiecken mit horizontaler Grundlinie zerlegen läßt und da für diese Anzahl keine Gränze gesetzt werden kann, so folgt schließlich, daß, wenn in schiefer Ebene ein Flächenraum Φ gegeben ist, geradlinig oder krummlinig begränzt, und wenn L eine begränzte gerade Linie in der Ebene bedeutet, welche auf dem Horizontalrisse P der Ebene rechtwinklig steht, L' aber die Horizontalprojektion von L, wenn schließlich das Verhältniß $\frac{L'}{L} = m$ gesetzt wird, die Horizontalprojektion Φ' dieses Flächenraumes gleich sei $m \times \Phi$. — Haben zwei in schiefer Ebene liegende Flächenräume gleiche Größe, so sind auch ihre Projektionen einander gleich. Das Bisherige auf den Flächeninhalt der Ellipse anzuwenden, betrachte man in Fig. 239 die Ellipse $AEBF$ als gerade Projektion des Kreises $AH''B$ und setze deren halbe große Achse $CA = a$,

Fig. 241.



die halbe kleine Achse $CE = b$; dann ist vorerst der Flächeninhalt des Kreises $K = a.^2 \pi$. Aber CE als Linie in der schiefen Kreisfläche steht rechtwinklig gegen die Horizontale AB und macht mit der Horizontalebene einen Winkel gleich $e'' c'' \varepsilon''$ und $CE = c'' \varepsilon'' = b$ ist die Horizontalprojektion dieses Radius. Setzt man wiederum das Verhältniß $c'' \varepsilon'' : c'' e'' = CE : CH'' = m$, so ist einmal die Horizontalprojektion der Kreisfläche, nämlich die Ellipsfläche $E = m \times a.^2 \pi = ma \times a \times \pi$, weil aber $ma = b$, so folgt $E = ab\pi$, d. h. der Ellipsenraum gleicht der Fläche eines Kreises, dessen Radius gleich ist der mittleren geometrischen Proportionallinie zwischen der halben großen und halben kleinen Achse.

Als weitere Folgerungen mögen hier noch die nachstehenden Sätze aufgeführt werden:

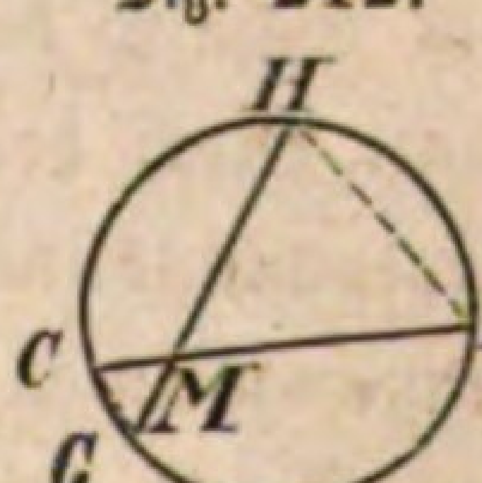
I. Alle um einen Kreis beschriebenen Quadrate sind gleich groß, daher sind es auch alle einer Ellipse umschriebenen Parallelogramme, deren Seiten konjugirten Durchmessern parallel liegen, als den Projektionen jener Quadrate.

II. Alle in einen Kreis eingeschriebenen Rechtecke haben Durchmesser des Kreises als Diagonalen, weshalb auch die Diagonalen aller in eine Ellipse eingeschriebenen Parallelogramme Durchmesser der Kurve sein müssen.

III. Alle Quadraten, welche in einen Kreis beschrieben sind, haben gleichen Flächenraum und ihre Diagonalen sind rechtwinklig unter sich stehende Durchmesser, deshalb sind auch in der Ellipse alle Parallelogramme, welche von den Endpunkten zweier konjugirten Durchmesser gebildet werden, flächengleich.

354. Zwei Sehnen eines Kreises CD und GH Fig. 242, welche sich in einem Punkte M kreuzen, werden dadurch in solche Abschnitte getheilt, daß die Produkte der Abschnitte auf jeder Sehne einander gleich sind, nämlich daß man hat $CM \times DM = HM \times GM$*). Für eine zweite zu GH parallele Sehne, deren entsprechende Punkte mit G', M', H' bezeichnet sein mögen, würde man erhalten $CM' \times DM' = H'M' \times G'M'$, woraus in Verbindung mit der ersten Gleichung folgende dritte Relation hervorgeht:

Fig. 242.



*) Denkt man sich die Hilfslinien CG, DH gezogen, so bildet man zwei ähnliche Dreiecke, denn sie haben einen Scheitelwinkel gemeinsam und die beiden andern Winkel stehen paarweise auf gleichen Bögen; daraus aber folgt die Proportion $CM : GM = HM : DM$, wonach $CM \times DM = HM \times GM$.

$$\frac{CM \times DM}{CM' \times DM'} = \frac{HM \times GM}{H'M' \times G'M'} \cdot \cdot \cdot \cdot (a)$$

Wird sofort der Kreis in eine andere Ebene projicirt, worin er sich als Ellipse darstellt, gleichwie die Kreissehnen als Ellipssehnen, so kann die Beziehung (a) zwischen den Abschnitten der drei Sehnen durch die Projektion nicht geändert werden, weil jedes Produkt zweier Linien zu betrachten ist als der Ausdruck eines Flächenraumes, nämlich als das Produkt einer Grundlinie und Höhe, und weil ferner alle in der Kreisebene liegenden Flächenräume durch die Projektion nur gleichmäßig geändert werden, so daß die Glieder obigen Ausdruckes gleiche Koefficienten erhalten, welche sich gegenseitig wieder aufheben.

Angenommen, CD sei in Fig. 242 in einen Durchmesser verwandelt, auf welchem GH, $G'H'$ senkrecht stehen und wodurch $GM = MH$, $G'M' = M'H'$ geworden, so erhielte man

$$\frac{CM \times DM}{CM' \times DM'} = \frac{\overline{HM}^2}{\overline{H'M'}^2} \cdot \cdot \cdot \cdot (b)$$

diese neue Relation, welche unschwer in Worte zu fassen bleibt, muß, dem so eben Gesagten zu Folge, gleichfalls projektiver Natur sein, und ist der Ausdruck einer allgemeinen Eigenthümlichkeit des Kreises, wie der Ellipse, welche, wie die Folge zeigen wird, auch der Hyperbel zukommt, sowie mit leichter Abänderung der Parabel.

355. Die ebenen Schnitte der Rotationskegelfläche.

Mit Hervorheben der besonderen Fälle zu beginnen, so kann die schneidende Ebene auf der Rotationsachse rechtwinklig stehen, in welchem Falle sie als Schnitt der Kegelfläche einen ihrer Parallelkreise hervorbringt; die Ebene kann durch den Scheitel der Fläche gehen und diese nach zwei ihrer geraden Erzeugungslinien schneiden, oder sie kann die Fläche nach einer ihrer Erzeugungslinien tangiren, oder endlich sie kann außer dem Scheitel weiter keinen Punkt mit der Fläche gemein haben. Als Ergebnisse dieser besonderen Fälle des ebenen Schnittes der Rotationskegelfläche haben wir somit den Kreis, zwei sich kreuzende gerade Linien, eine gerade Linie, und den Punkt. In allen andern Lagen der schneidenden Ebenen wird sie gewisse krumme Linien als Schnitte hervorbringen, von welchen hier im Besonderen die Rede sein soll.

356. Die Schnitte einer Rotationskegelfläche durch parallele Ebenen E', E'', E''', ... sind ähnliche Linien A', A'', A''', ... rc. Denn man nehme in dem ersten Schnitte A' irgend eine Sehne S' an und

lege durch sie und den Scheitel der Fläche eine Ebene F, welche dieselbe nach zwei durch die Endpunkte von S' gehenden geraden Erzeugungslinien schneiden wird. Die Ebene F aber wird in den Ebenen $E'', E''', \ldots$ Schnitte hervorbringen parallel zu S', welche, soweit sie innerhalb der Linien A'', A''' liegen, Sehnen S'', S''', .. dieser Linien sind. Der Größe nach werden die parallelen Sehnen $S', S'', S''', \ldots$ sich verhalten wie die Abstände der Ebenen $E', E'', E''', \ldots$ vom Scheitel der Kegelfläche. Einer jeden andern Sehne Σ', welche in A' gezogen oder gedacht wird, entsprechen in den Schnitten $A'', A''', \ldots$ parallele Sehnen $\Sigma'', \Sigma''', \ldots$ von verhältnißmäßiger Größe, wie die ersten Sehnen S', S'', S''', woraus endlich folgt, daß die Linien $A', A'', A''', \ldots$ durchaus ähnlich gebildet, nur in der Größe verschieden, mithin ähnlich seien.

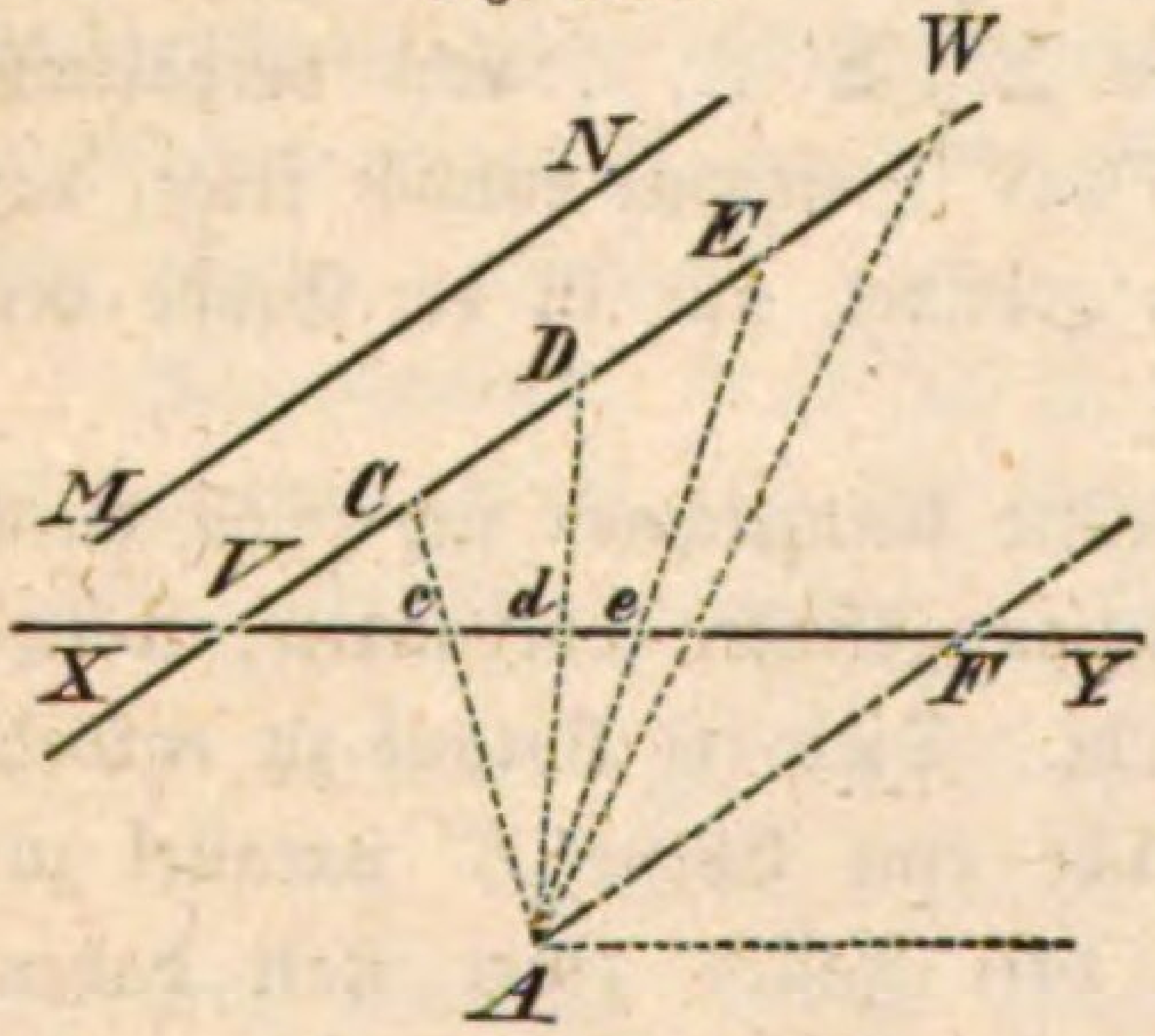
357. Die besondern Arten der Kegelschnitte kennzeichnen sich schon durch den Umstand, ob auf der Fläche gerade Erzeugungslinien vorhanden, welche der schneidenden Ebene parallel liegen oder nicht. Dies im Voraus zu entnehmen, lege man durch den Scheitel der Fläche eine Ebene E' parallel zur schneidenden Ebene E, und es wird von drei Fällen einer statt haben. 1) E' hat mit der Kegelfläche nur den Scheitel gemein, woraus sich ergiebt, daß auf der Fläche keine zu E parallele gerade Erzeugungslinie vorhanden sei, daß diese Ebene somit alle Geraden durchdringen müsse und zwar auf der gleichen Seite bezüglich des Scheitels, mit andern Worten: daß der Schnitt der Kegelfläche und der Ebene E eine geschlossene Linie sei. 2) E' schneidet die Kegelfläche nach zwei ihrer geraden Erzeugungslinien; diese sind offenbar der Ebene E parallel und könnten somit von ihr nur im Unendlichen getroffen werden. Daraus geht hervor, daß jetzt der Schnitt der Kegelfläche und der Ebene E keine geschlossene Linie sei, vielmehr vier Punkte im Unendlichen habe, daß E einen Theil der geraden Erzeugungslinien diesseits vom Scheitel durchschneiden werde, den andern Theil jenseits vom Scheitel, und der fragliche Schnitt aus zwei getrennten und ins Unendliche sich erstreckenden Aesten gebildet werde. 3) E' berührt die Kegelfläche nach einer geraden Erzeugungslinie. Diese eine Berührungslinie ist zu E parallel und wird von dieser Ebene in unendlicher Entfernung geschnitten, jede andere Erzeugungslinie in endlicher Entfernung und auf gleicher Seite bezüglich des Scheitels. Damit aber bekundet sich der fragliche Schnitt als eine einzige offene Kurve.

358. Ist eine Kegelfläche durch verschiedene Ebenen geschnitten, und man betrachtet die geraden Erzeugungslinien der Fläche als projicirende Linien, dann erscheint jeder der Schnitte

als die gemeinsame Projektion aller andern. Aber diese Projektion ist jetzt eine perspektivische oder polare, indem der Scheitel der Kegelfläche als Auge oder projektiver Pol auftritt. Späteren Unterbrechungen des Vortrages vorzubeugen, scheint es am Platze, hier einige Ergebnisse dieser Projektionsart hervorzuheben.

359. Man betrachte Fig. 243 als eine gewöhnliche Horizontalprojektion; *V W* sei eine gerade Linie, welche in der Horizontalebene liegen kann; *X Y* sei eine vertikale Ebene und diene als Bildfläche, worauf die Grade perspektivisch projicirt werden soll. *A*, welches beliebig hoch liegen mag, sei die Horizontalprojektion des Auges oder Poles, von welchem die perspektivisch projicirenden Linien ausgehen. Nun entsteht die Projektion von *V W* auf der Bildfläche *X Y* dadurch, daß durch die Gerade und das Auge eine Ebene gedacht und deren Schnitt in der Bildfläche verzeichnet wird. Sind auf *V W* gleich entfernte Punkte *C*, *D*, *E*, ... gegeben, so sieht man, daß diese sich über *c*, *d*, *e* projiciren werden, und weil *W V Y* ein schiefer Winkel, werden die Theile *c d*, *d e* um so kleiner werden, je weiter *D*, *E* ꝛc. von *X Y* sich entfernen. Denkt man sich durch *A* eine Parallele *A F* mit *V W* gelegt, welche die Bildfläche über *F* und in gleicher Höhe mit *A* durchschneiden wird, so gehört dies *A F* mit zur Reihe der projicirenden Linien *A D*, *A E* ꝛc. und *F* ist die perspektivische Projektion eines Punktes, welcher im Unendlichen auf *V W* liegt. Hat man in *M N* eine Parallele mit *V W*, welche beliebig über oder unter der Horizontalebene liegen kann, und es wird die perspektivische Projektion dieser Parallelen entworfen, so ist zu erkennen, daß *F A* auch in der projicirenden Ebene von *M N* liegt, und daß dies *F* auch der perspektivischen Projektion von *M N* angehört. Eine dritte und vierte Parallele zu *V W* würde das gleiche Ergebniß liefern, welches sich also verallgemeinert ausdrücken läßt: werden parallele Linien, welche schief gegen die Bildfläche liegen, perspektivisch auf dieselbe projicirt, so durchschneiden sich alle Projektionen in einem einzigen Punkte. Dieser und das Auge gehören einer Parallelen zu den projicirten Linien an.

Fig. 243.



Läge *V W* parallel zur Bildfläche *XY*, so würde *F* auf dieser Fläche

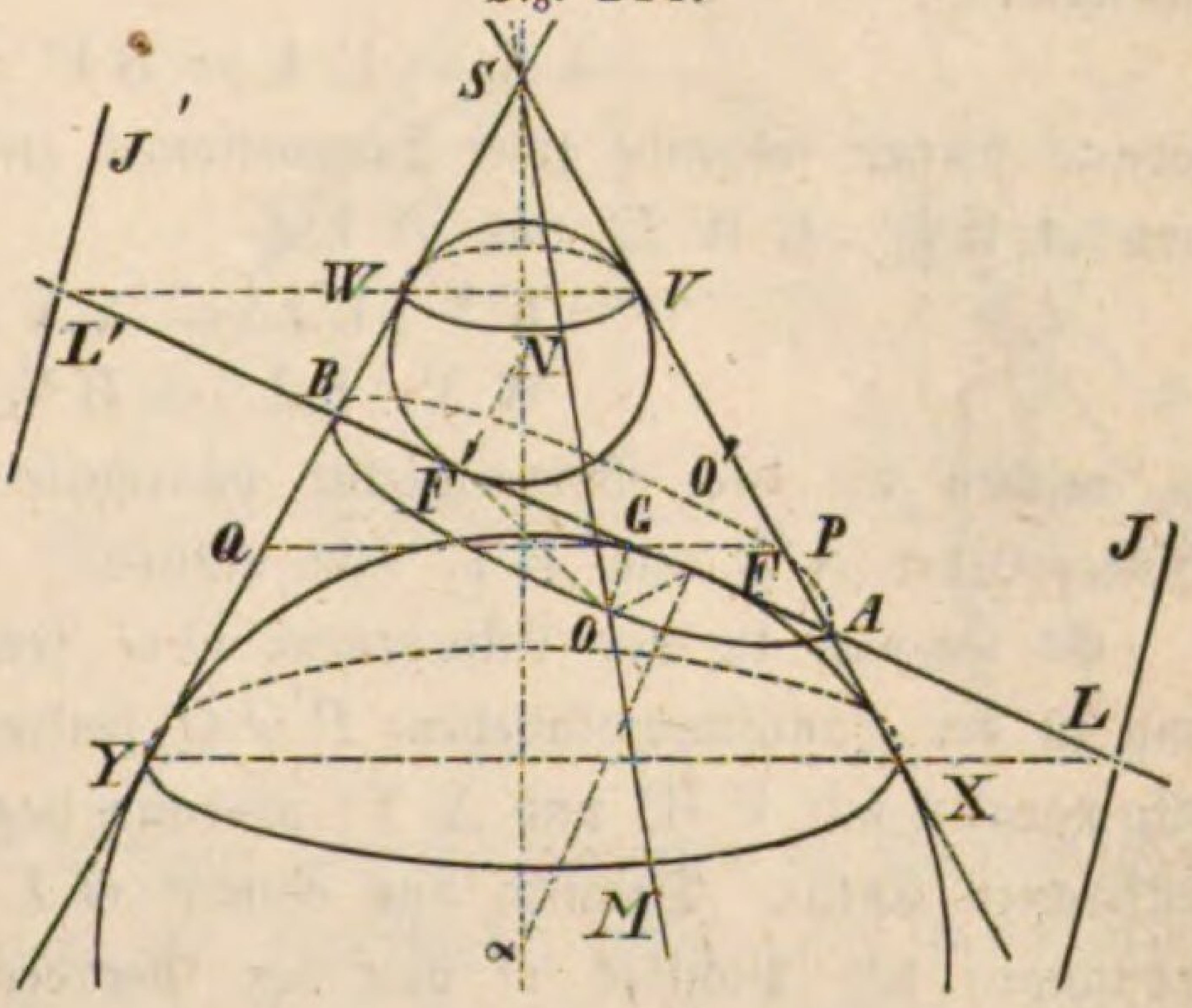
in unendliche Entfernung übergehen und die Projektion von *V W*, sowie von ihren Parallelen *M N*, wäre in diesem Fall parallel mit genannten Linien. Auch die Theile *c d*, *d c* würden jetzt gleichgroß ausfallen. Parallele Linien, welche zugleich der Bildfläche parallel liegen, bleiben somit auch in der perspektivischen Projektion unter sich parallel.

Eine Folgerung aus dem Gesagten ist, daß wenn zwei oder mehrere gerade Linien, welche sich in einem einzigen Punkte kreuzen, perspektivisch in eine Ebene projicirt werden und die projicirende Linie des Kreuzungspunktes liegt der Ebene parallel, kann sie also nur im Unendlichen erreichen, so werden die Projektionen der sich kreuzenden Linien, weil nach einem im Unendlichen liegenden Punkt gerichtet, unter sich als parallel erscheinen.

360. **Lehrsatz.** Der Schnitt einer Rotations-Kegelfläche und einer Ebene, welche alle geraden Erzeugungslinien der Fläche durchkreuzt, ist eine Ellipse.

Die Fig. *244* von entsprechender Bedeutung und gleich behandelt wie Fig. *238*, stellt bei *A O B O'* einen solchen Schnitt dar. Die Zeichnungsfläche sei zugleich jene Meridianebene, welche rechtwinklig steht auf der schneidenden Ebene, und *A B* deren Durchschnitt, welcher die Kurve *A O B O'* in zwei symmetrische Hälften spaltet (§. 345). *S A* und *S B* sind die beiden der Meridianebene angehörigen geraden Erzeugungslinien. Es seien die zwei Kreise beschrieben worden, welche *S A*, *S B* und *A B* tangiren. *F* und *F'* sind die Berührungspunkte derselben mit *A B*: man wird sie gleich als die Brennpunkte der Ellipse erkennen; *V*, *W* und *X*, *Y* sind die Berührungspunkte der Kreise und der Erzeugungslinien. Indem man diese nebst den Kreisen in rotirender Bewegung um die Achse α *S* setzt, beschreiben erstere wiederum die Kegelfläche, die Kreise aber beschreiben zwei Kugeln. Diese berühren die Kegelfläche nach den Parallelkreisen *V N W*, *X M Y* und *F*, *F'* sind ihre Be-

Fig. *244.*



rührungspunkte mit der Ellipsebene. Es sei nun SM irgend eine gerade Erzeugungslinie der Kegelfläche, welche die Parallelkreise in $N, M,$ die Ellipse aber in O durchkreuzt; beachte man sofort, daß die Stücke aller Erzeugungslinien zwischen den Parallelkreisen gleiche Länge haben müssen, also $VX = NM = WY$ sein wird. Nachdem O mit F und F' verbunden worden, wird $OF' = ON$ sein, als zwei Tangenten der obern Kugel, welche von einem gemeinsamen Punkte O, ausgehen, und aus demselben Grunde wird $OF = OM$ sein. Man wird also haben: die Summe der Fahrstrahlen $OF + OF' = OM + ON = MN = XV =$ beständig.

Es ist aber auch $MN = VX = AB$. Denn man hat

$$XV = AX + AV = AF + AF' = 2AF + FF',$$
$$YW = BW + BY = BF + BF' = 2BF + FF',$$

woraus

$$AF = BF' \text{ und } XV = AB.$$

Dies sind aber entscheidende Merkmale der Ellipse.

Zusatz. Die Ebenen der Parallelkreise VNW und XMY schneiden die Ellipsebene nach zwei mit AB rechtwinkligen Geraden $LJ, L'J'$, den Leitlinien (§. 348) der Ellipse. Denn vorerst hat man $AL = BL'$. Es ist nämlich

$$AX = FA = BF' = BW,$$

sodann fließen folgende zwei Proportionen aus den ähnlichen Dreiecken AXL und AVL', BWL' und BYL

$$XV : LL' = AX : AL,$$
$$WY : LL' = BW : BL',$$

in welchen die drei Vorderglieder paarweise gleich sind, daher es auch die Hinterglieder AL und BL' sein müssen.

Es sei nun in der Ellipsebene OG senkrecht auf AB gefällt worden und in der Hauptmeridianebene PGQ senkrecht auf die Rotationsachse αS, also parallel mit VW und XY; alsdann liegen OG, PQ in einer auf αS senkrechten Ebene. Dadurch sind einmal GL und GL' gleich geworden den Abständen des Punktes O von den Geraden LJ und $L'J'$. Es mußte ferner $PX = OM = OF$ werden, $PV = WQ = ON = OF'$ und endlich ergiebt sich aus den ähnlichen Dreiecken

$$APG \text{ und } AXL,\; GBQ \text{ und } BWL',$$
$$PX : GL = AX : AL, \text{ oder } OF : GL = AX : AL$$

und

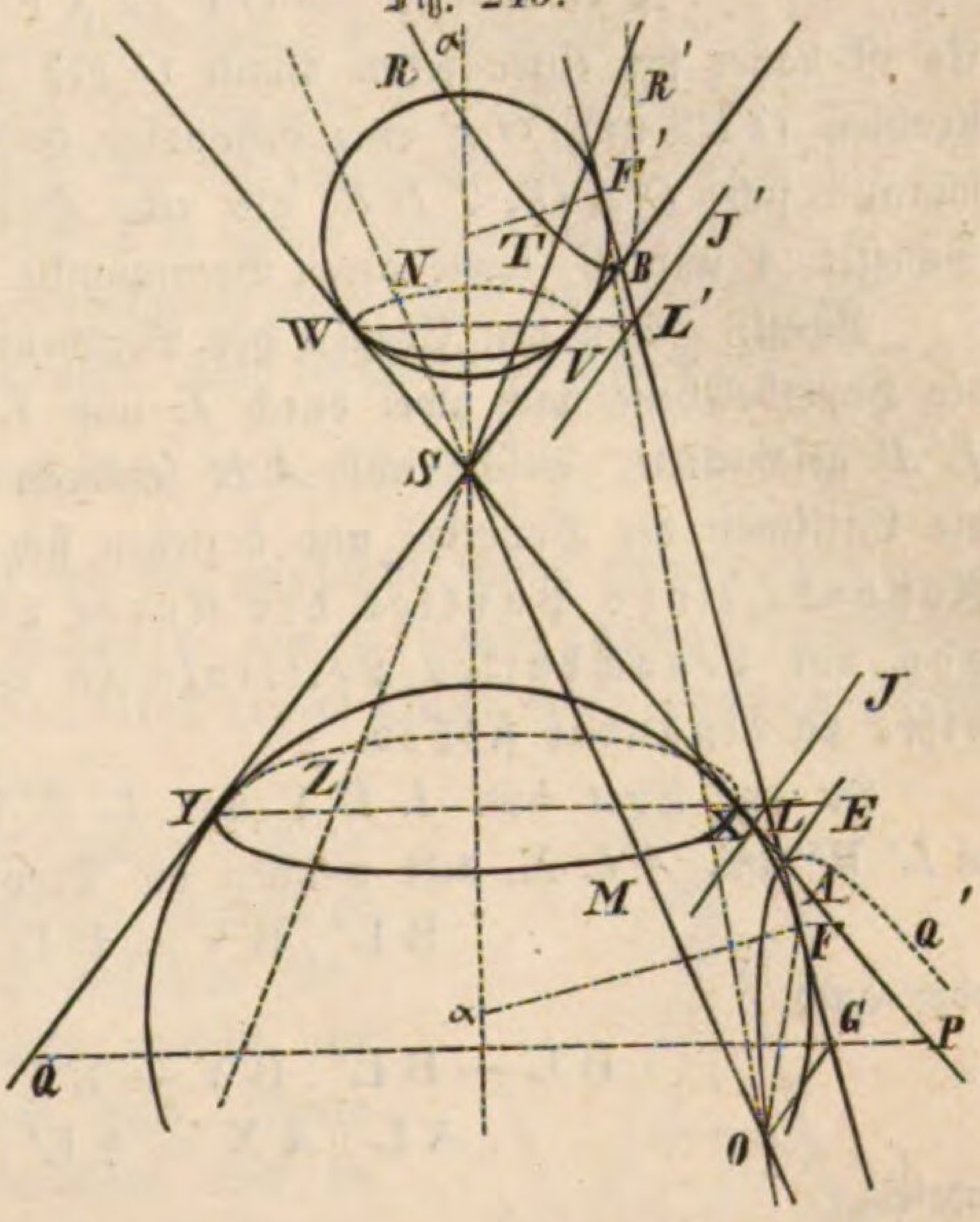
$$WQ : GL' = BW : BL', \text{ oder } OF' : GL' = BW : BL'.$$

Aus diesen konstanten Verhältnissen erkennt man in $L J$ und $L' J'$ die Leitlinie der Ellipse. Daß $\frac{A X}{A L} < 1$, ward bereits angegeben.

361. **Lehrsatz.** Der Schnitt einer Rotations-Kegelfläche und einer Ebene, welche beide Netze der Fläche trifft, ist eine Hyperbel.

Fig. 245 $O A O'$, $R B R'$ sei ein solcher Schnitt, von welchem ein Ast dem unteren Flächennetze angehört, der andere dem oberen. In Anordnung und Bedeutung der Figur im Einzelnen gleicht sie völlig der vorhergehenden und es ist $A B$ die Durchschnittslinie der Hyperbelebene mit der Hauptmeridianebene der Kegelfläche, $P S W$, $Q S B$ sind die in dieser Meridianebene liegenden geraden Erzeugungslinien der Fläche. Wie vorhin auch, seien die beiden Kugeln erzeugt worden, welche die schneidende Ebene in F, F' berühren und die Kegelfläche nach den Parallelkreisen $V N W$, $X M Y$. Desgleichen ist hervorzuheben, daß alle geraden Erzeugungslinien zwischen den genannten Parallelkreisen die gleiche Länge $X W$ oder $Y V$ haben, O sei ein Punkt der Hyperbel, welcher auf einer Erzeugungslinie $O M N$ liegt, und wir bemerken im Vorübergehen, daß alle geraden Erzeugungslinien der Kegelfläche, welche den Parallelkreis $X M Y$ in der Gegend des Bogens $X M$ kreuzen, die Hyperbelebene in Punkten des unteren Astes durchdringen, während die Erzeugungslinie $Z S$ z. B. einen Punkt T des oberen Astes liefert. Es soll nun bewiesen werden, daß F, F' die Brennpunkte der Hyperbel seien. Man ziehe die Verbindungslinien $O F$, $O F'$, dann sind $O F = O M$ und $O F' = O N$ als

Fig. 245.



Tangentenpaare an je eine Kugel, welche von einem gemeinsamen Punkte O ausgehen. Daraus folgt

$$OF' - OF = ON - OM = MN = \text{konstant.}$$

Man hat jedoch

$$MN = XW = AW - AX = AF' - AF = AB + BF' - AF,$$
$$MN = YV = BY - BV = BF - BF' = AB + AF - BF',$$

also $$BF' - AF = AF - BF',$$

oder $$2BF' = 2AF \text{ und } BF' = AF,$$

folglich auch

$$XW = OF' - OF = AF - BF' = AB.$$

Es ist daher für einen jeden Punkt O des Schnittes die Differenz der Fahrstrahlen OF' und OF eine beständige Größe und gleich der Achse AB, woraus sich OAO', TBR als eine Hyperbel zu erkennen giebt, deren Scheitel A und B, sowie deren Brennpunkte F und F' sind. (I. Th. §. 115.)

Zusatz. Von den Ebenen der Berührungskreise NWV, YMX wird die Hyperbelebene nach zwei durch L und L' gehenden geraden Linien LJ, $L'J'$ geschnitten, welche auf AB senkrecht stehen. Diese Geraden heißen die Leitlinien der Hyperbel und beziehen sich der Art auf die Linie, daß die Abstände eines Punktes der Kurve von einem Brennpunkte und von der benachbarten Leitlinie in unveränderlichem Verhältnisse zu einander stehen.

In der That sind LBY und $L'BV$ ähnliche Dreiecke, sowie auch $AL'W$ und ALX, aus welchen die Proportionen hervorgehen;

$$BL' : BV = BL : BY,$$

oder auch

$$BL - BL' : BY - BV = L'L : VY,$$
$$AL : AX = AL' : AW,$$

sowie

$$AL' - AL : AW - AX = L'L : WX = L'L : VY.$$

Weil die letzten Verhältnisse in beiden Proportionenreihen gleich sind, so müssen es auch die ersten sein, und weil außerdem $BV = AX$, so folgt daraus auch $BL' = AL$.

Sei OG sofort senkrecht auf AB gefällt worden, so sind GL und GL' gleich den Abständen des Punktes O von LJ und $L'J'$. — Durch G werde PGQ parallel mit XY gezogen, dann liegen OG und PQ in einer auf αS senkrechten Ebene und Q, $O'P$ werden einem Parallelkreise der Kegelfläche angehören, weshalb $PX = YQ = MO = OF$ sein wird.

Nun folgt aus den ähnlichen Dreiecken PAG und LAX die Proportion $PX : GL = AX : AL$, oder auch $OF : GL = AX : AL$. Es geben ferner die ähnlichen Dreiecke GBQ und $L'BV$

$$BQ : BG = BV : BL',$$

oder auch

$$BQ - BV : BG - BL' = VQ : L'G = BV : BL'.$$

Weil aber $VQ = PW = ON = OF$, dann $BV = AX$ und $BL' = AL$, so folgt $OF : GL = AX : AL$, womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Zieht man in der Hauptmeridianebene AE parallel zu SQ, so ist einmal XAE ein gleichschenkliges Dreieck, und AB muß die Grundlinie in L zwischen X und E durchkreuzen, soll die schneidende Ebene beide Netze der Kegelfläche treffen, darum wird auch AL immer kleiner sein als AX, woraus zu schließen, daß irgend ein Hyperbelpunkt stets näher an einer Leitlinie liegt als an dem benachbarten Brennpunkt. Das konstante Verhältniß $AX : AL$ ist deshalb einem unächten Bruche gleich, und es folgt $\frac{AX}{AL} > 1$. Auf dies Größere, Ueberschüssige, bezieht sich der griechische Name Hyperbola.

362. **Lehrsatz.** Der Schnitt einer Umdrehungskegelfläche und einer Ebene, welche parallel liegt einer tangirenden Ebene der Fläche, ist eine Parabel.

Fig. 246.

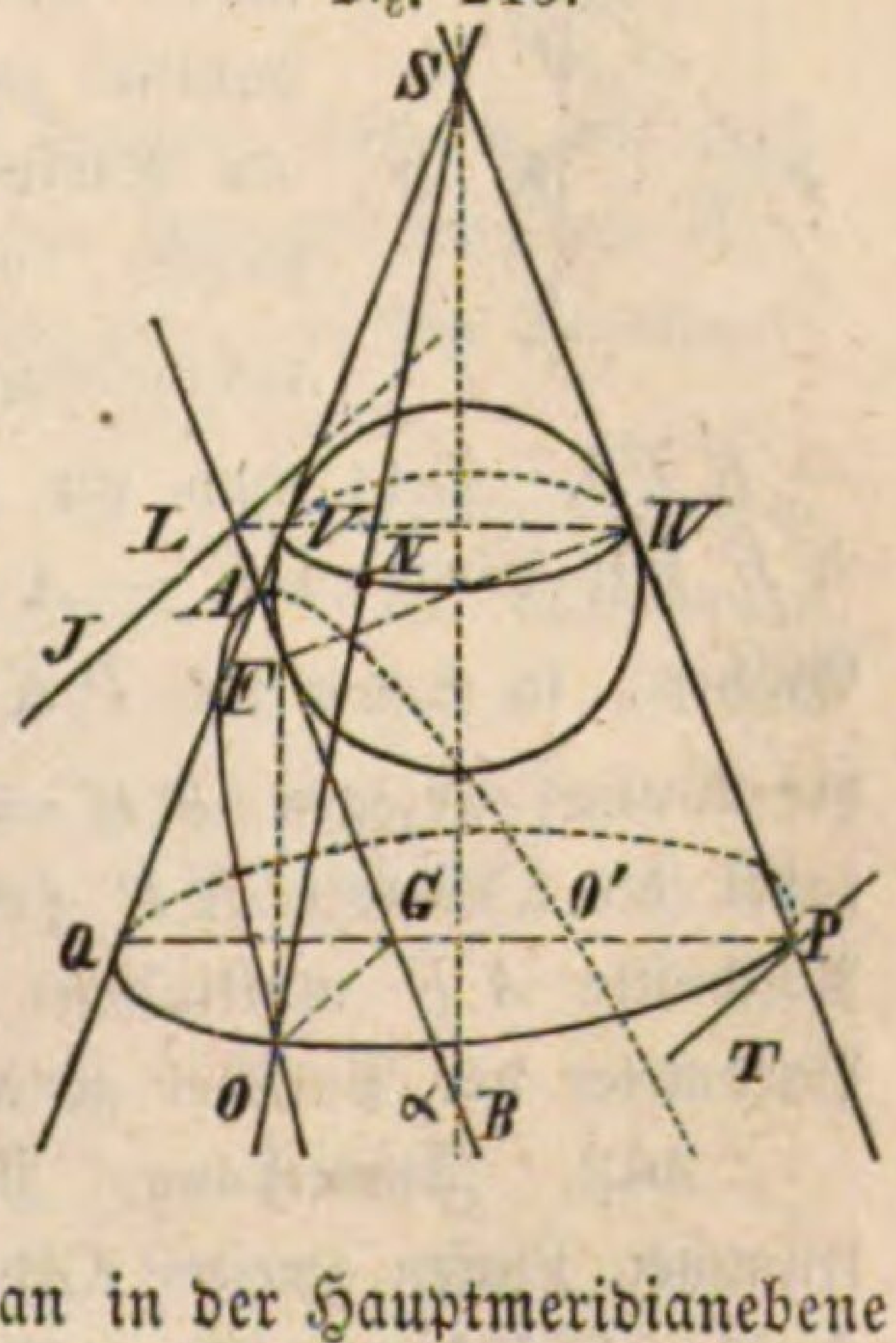
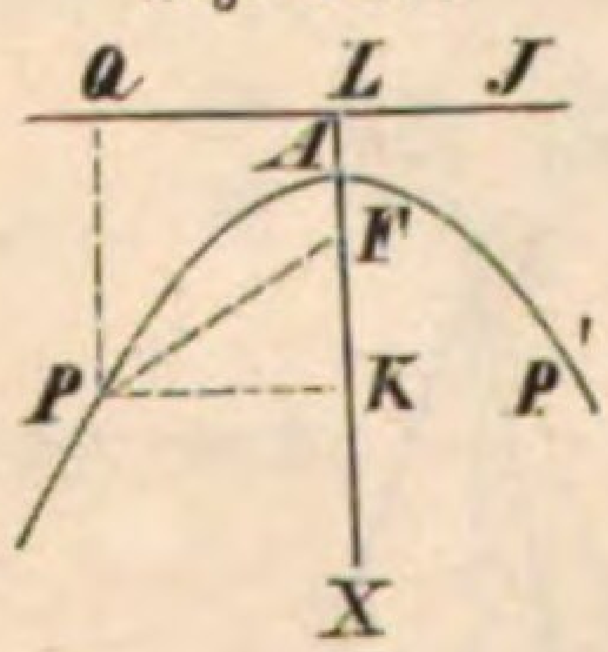


Fig. 246 stellt die Kegelfläche vor, die Bildfläche ist zugleich Hauptmeridianebene, in welcher die Erzeugungslinien SP, SQ enthalten sind. Eine tangirende Ebene der Fläche, welche auf der Hauptmeridianfläche senkrecht steht, könnte sie nach der Geraden SP berühren und in ihr läge die Tangente PT am Punkte P des Parallelkreises POQ. Dieser tangirenden Ebene sei die schneidende Ebene parallel und AB parallel zu SP ihr Durchschnitt mit der Meridianebene, also auch die Achse des Schnittes OAO'. Mit Ausnahme von SP werden alle übrigen geraden Erzeugungslinien der Kegelfläche von der Ebene getroffen werden, dies soll für die Gerade SN in O geschehen. Nachdem man in der Hauptmeridianebene den Kreis beschrieben, welcher SQ, SP und deren Parallele AB berührt,

wird durch dessen Rotation um die Drehungsachse $\alpha\, S$ eine Kugel erzeugt, welche die schneidende Ebene in F berührt und die Kegelfläche nach dem Parallelkreise $V N W$. Die Ebene dieses Kreises und die schneidende Ebene durchdringen sich nach der auf $A B$ senkrechten Geraden $L J$, und ich sage, dies sei die Leitlinie, F aber der Brennpunkt des Schnittes $O A O'$, denn man fälle $O G$ senkrecht auf die Hauptmeridianebene und ziehe $O F$, so ist aus den schon angegebenen Gründen $O F = N O$, aber die Stücke der Erzeugungslinien zwischen den zwei Parallelkreisen sind gleich groß; daher hat man $O F = O N = P W = G L$, und dies letztere ist gleich dem Abstande des Punktes O von $L J$. Es sind demnach die Abstände irgend eines Punktes auf $O A O'$ von F und von $L J$ einander gleich, was als ausschließliche Eigenthümlichkeit der Parabel bekannt ist, (I. Thl. §. 118.) Wiederum auch ist das konstante Verhältniß $\frac{O F}{G L} = \frac{A F}{A L} = 1$, worauf sich der Name der Linie bezieht. Daß diesem zufolge der Scheitel A einer Parabel auf deren Achse in der Mitte zwischen dem Brennpunkte und der Leitlinie liegt, mag noch besonders hervorgehoben werden.

Zusatz. Eine kleine Rechnung wird nöthig sein zu zeigen, daß die Seite 162 gegebene Erklärung der Parabel statthaft gewesen. Es sei $J L Q$ Fig. 247 die Leitlinie, $A X$ die Achse F der Brennpunkt einer Parabel und A ihr Scheitel, wenn $A F = A L$ gemacht worden. Nachdem P, P' in beliebiger Entfernung parallel zur Leitlinie gezogen worden und aus F mit $L K$ als Radius in P, P' durchkreuzt, sind dies zwei Parabelpunkte, weil $P F = K L = P Q$. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $P K F$ der Kathete $\overline{P K}^2 = \overline{P F}^2 - \overline{K F}^2$. Setzt man für $P Q$ den gleichen Werth $A K + A F$, und für $K F$ den Werth $A K - A F$ und entwickelt die Quadrate dieser zweisätzigen Größen, so findet sich $\overline{P K}^2 = 4 A F \times A K$, oder aus beiden Theilen die Wurzel gezogen $P K = \pm \sqrt{4 A F \times A K}$, es ist also bei der Parabel die Ordinate $K P$ (oder $K P'$) gleich der Quadratwurzel aus dem Abschnitte $A K$ multiplicirt mit der beständigen Größe $4 A F$, welche der Parameter der Parabel genannt wird.

Fig. 247.



363. Anmerkung. Mit Vorstehendem ist nachgewiesen, wie die drei krummen Linien zweiter Ordnung, die Ellipse, Hyperbel und Parabel, den Kreis, als besondere Art von Ellipse dazu gerechnet, durch die ebenen Schnitte

der Rotationskegelfläche hervorbringen können. Seit uralten Zeiten nannte man diese Linien darum auch **Kegelschnitte**. Daß eine in die Kegelfläche beschriebene Kugel, welche auch eine schneidende Ebene tangirt, dies in einem Brennpunkte des Schnittes thue, ist ein längst bekannter **Satz**, namentlich in der Form, daß man wußte, eine auf horizontaler Ebene ruhende Kugel berühre dieselbe in dem Brennpunkt der Ellipse, welche den von der Kugel auf die Ebene geworfenen Schlagschatten begrenzt. Im Uebrigen wurde diese Anschauung von **Quetelet***) zu einer selbstständigen Doktrin umgewandelt, welche auch von Th. **Olivier****) noch entwickelt worden ist. Verfasser dieses hat sie bereits in seinem geometrischen Portfolio (1840) angewendet. Unsere Fig. *244—246*, welche der Leser vor Augen behalte, mögen hier nur noch zu dem Nachweise benutzt werden, wie beliebig viele Umdrehungskegelflächen anzugeben sind, auf deren jede eine bestimmte Kegelschnittslinie sich versetzen läßt.

Man errichte in einem Brennpunkt der Linie eine Senkrechte auf die Ebene E der Linie und nehme auf der Senkrechten den Mittelpunkt einer Kugel an, welche die Kurve in dem Brennpunkte berührt; man ziehe aus den Enden der großen Achse zwei Tangenten an die Kugel, welche mit dieser Achse und der Senkrechten in einer Ebene liegen. (Bei der Parabel ist die zweite Tangente parallel zur Achse anzuordnen.) Der Punkt S, wo beide Tangenten sich kreuzen, ist der Scheitel einer um die Kugel umschriebenen Kegelfläche, welche von der Ebene E nach der vorgelegten Kurve geschnitten werden muß, weil der Schnitt mit dieser Kurve eine gleichgroße Achse und gleiche Brennpunkte hat.

364. Aus gleichen Gründen, wie bereits entwickelt, nehmen wir auch in dem Folgenden eine solche Lage oder geschehene Umwandlung der Projektionsebene an, daß die Horizontalebene senkrecht steht auf der Rotationsachse und die Vertikalebene senkrecht auf der schneidenden Ebene.

Fig. *248* $(s, \alpha' s')$ die Rotationsachse, $(I s J, i' s' j')$ der Hauptmeridianschnitt, $(i' j', I T J)$ Grundkreis in der Horizontalebene, $P Q' R'$ schneidende Ebene; $s' x' X$ Ebene parallel zu $P Q' R'$ und durch (s, s') gehend; sie hat außer dem Scheitel keinen Punkt mit der Kegelfläche gemein, weshalb diese von $P Q' R'$ nach einer Ellipse geschnitten werden, wovon $(a' b', a b)$ die große Achse (§. 360).

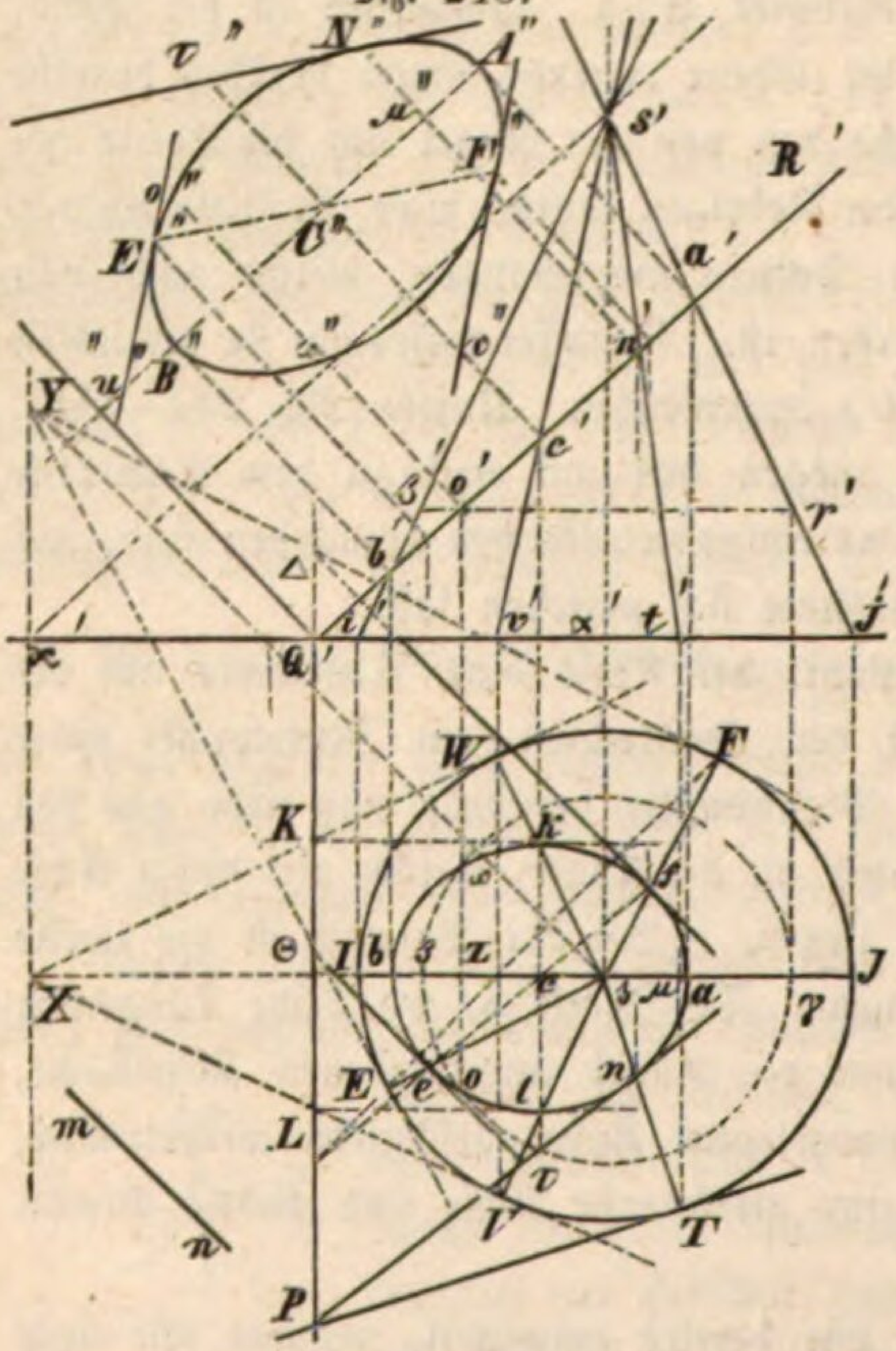
---

*) In den Abhandlungen der Belgischen Akademie.

**) Des surfaces et des courbes du second ordre. Paris 1844.

Punkte des Schnittes auf einem Parallelkreise: ($\beta' \gamma'$, $\beta \omega \gamma$) ein solcher; er liefert die Punkte (o', o), (o', ω).

Fig. 248.



Punkte auf einer geraden Erzeugungslinie: ($s\ T$, $s'\ t'$) eine solche; sie schneidet die Ebene $P\ Q\ R$ in ($n'\ n$).

Tangente des Schnittes: ($n\ n'$) sei der gegebene Berührungspunkt, also ($s\ n\ T$, $s'\ n'\ t'$) die gerade Erzeugungslinie dieses Punktes. Die Kreistangente $T\ P$ gehört der tangirenden Ebene längs der Erzeugungslinie; ($P\ n$, $Q'\ R'$) Durchschnitt der tangirenden Ebene und der Ebene $P\ Q'\ R'$ also verlangte Tangente.

Wahre Gestalt $A''\ N''\ B''$ des Schnittes, sie ward erhalten durch Drehung der Ebene $P\ Q'\ R'$ um eine Parallele zu ihrem Vertikalriß, bis die Ebene selbst vertikal stand und die große Achse nach $A''\ B''$ fiel. Steht $o\ o''$ senkrecht auf $a'\ b'$, so war die halbe Sehne $o\ \omega$ auf $o'\ o''$ von der Achse aus links und rechts nach ω'', o'' zu tragen rc. Der Berührungspunkt (n, n') fiel nach N'' ($\mu''\ N'' = \mu\ n$); irgend ein zweiter Punkt der Tangente τ'' z. B. fand sich, indem $c\ \tau$ von C'' nach τ'' getragen ward.

365. Einige Ausführungen. Das Centrum (C, c') der Ellipse konnte erhalten werden dadurch, daß man $a'\ b'$ in c' halbirte und den Punkt herab nach c projicirte. Allein dies Centrum und mit ihm zugleich die kleine Achse der Ellipse ließ sich in der Horizontalprojektion durch eine direkte Konstruktion bestimmen. Die Gerade ($s'\ x'$, $s\ X$) geht durch den Scheitel der Kegelfläche und ist der großen Achse ($a\ b$, $a'\ b'$) parallel; legt man durch erstere Gerade zwei tangirende Ebenen an die Kegelfläche, so berühren sie diese nach den Erzeugungslinien ($V\ s$, $v'\ s'$), ($W\ s$, $v'\ s'$), (die Berührungspunkte V, W müssen symmetrisch liegen gegen $X\ J$). Die beiden tangirenden Ebenen und

die Ebenen PQR schneiden sich nach zwei Geraden, welche Tangenten sind, an die Ellipse; K und L gehören je einer der Tangenten an. Diese selbst aber müssen zu $(s X, s' x')$ oder zu $(a b, a' b')$ parallel sein und ihre Horizontalprojektionen sind die zu $s X$, Parallelen $K k$, $K l$. Denn wenn zwei Ebenen durch eine gerade Linie gehen, welche einer dritten Ebene parallel liegt, so sind auch die Durchschnitte der zwei Ebenen mit der dritten jener Geraden parallel. Aber die Tangenten einer Ellipse, welche der großen Achse parallel sind, berühren sie in den Endpunkten der kleinen Achse. Dies sind aber in unserer Figur die Punkte k, l; ihre Verbindungslinie ist die kleine Achse und muß $a b$ im Centrum c durchkreuzen.

Der Vorgang möge noch unter dem Gesichtspunkt der Projektion betrachtet werden. Nimmt man (s, s') als Auge oder perspektivischen Pol, die geraden Erzeugungslinien der Kegelfläche als projicirende Linien, so stellt sich der elliptische Schnitt dar als die perspektivische Projektion des Kreises JVI, oder umgekehrt dieser als die Projektion von jenem. Indem nun die Tangenten $X V$, $X W$ in die Ebene $P' Q$ projicirt werden, erscheinen k, l als Projektionen der Berührungspunkte W, V, sodann sind K und L sowol Original als Projektion, folglich Kk, Ll die Projektionen von WX, VX. Aber der Kreuzungspunkt X muß durch die Projektion ins Unendliche übergehen, weil die Projicirende $(s X, s' x')$ zur Ebene $R' Q$ parallel liegt. Daher die Projektionen $K k$, $L l$ eine zu $(s X, s' x')$ oder zu $(a b, a' b')$ parallele Richtung erhalten werden.

Hat man somit in $l k$ die kleine Achse und in C das Centrum der Ellipse erkannt, so erhellt auch, wie die projicirende Linie dieses Centrums, nämlich $(s C, s' c')$, die Horizontalebene nur in Z treffen könne, wo der Durchmesser IJ und die Sehne der Berührungspunkte $W V$ sich kreuzen. Z ist also jener Punkt der Kreisebene, welcher durch die perspektivische Projektion zum Mittelpunkt der Ellipse wird.

Entsprechende Ergebnisse werden sich darstellen für jedes Paar tangirender Ebenen der Kegelfläche, welche durch einen beliebigen Punkt Y der Geraden $X x'$ gehen, diese letztere als den Horizontalriß einer zu PQR parallelen Ebene $X s' x'$ betrachtet. Die Tangenten YE, YF sind die Horizontalrisse solcher tangirenden Ebenen und $s E$, $s F$ die Projektionen ihrer Berührungslinien mit der Kegelfläche; e, f die Projektionen der Ellipspunkte auf diesen Geraden. Die Risse YE und YF aber kreuzen den Riß PQ in Θ und Δ, daher Θe und Δf Projektionen der Ellipstangenten als der Durchschnitte der tangirenden Ebenen mit $P Q' R'$. Weil aber die Pro-

jicirende von Y, nämlich die Gerade $(s\,Y, s'\,x')$, zur Ellipsebene parallel ist, mußte durch die perspektivische Projektion der Punkt Y in unendliche Entfernung übergehen; die Tangenten wurden somit parallel zu $(s\,Y, s'\,x')$ und ihre Horizontalprojektionen $\Theta\,e$, $\Delta\,f$ parallel zu $s\,Y$. Es folgt aus diesem, daß $e\,f$ einen Ellipsdurchmesser vorstellt, und daß dieser als die perspektivische Projektion der Kreissehne $E\,F$ sich zu erkennen giebt. In der Umlegung kamen die Berührungspunkte nach E'', F'' zu liegen; ein weiterer Punkt der einen Tangente nach u'', der andere nach v''. (In der Wahl von u'',v'' waren wir durch den kleinen Raum unserer Figur beschränkt.)

Man sieht aus dem Vorhergehenden, wie die Beziehungen der zusammengehörigen Durchmesser, Tangenten &c. für die Ellipse auch aus der perspektivischen Projektion des Kreises abzuleiten sind.

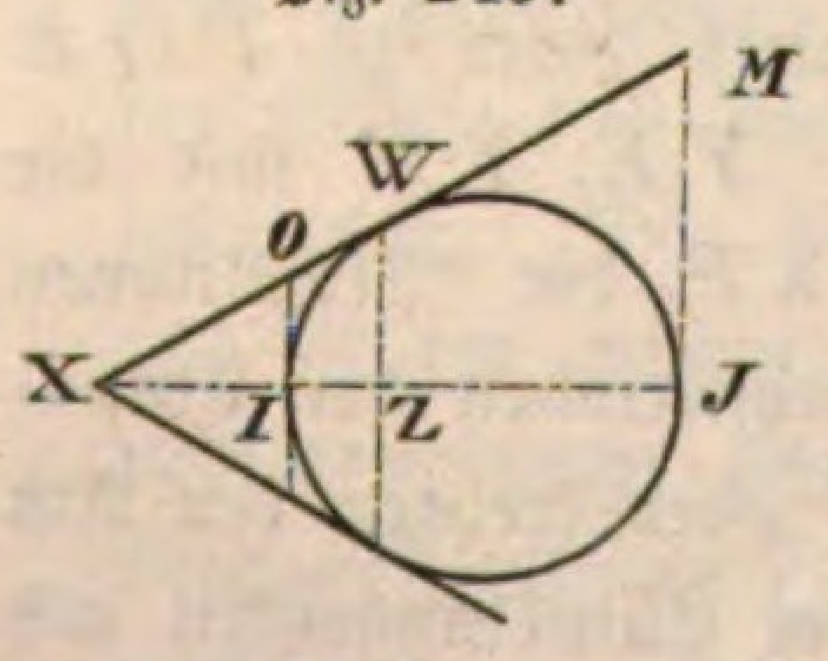
366. Aufgabe. Es soll diejenige Tangente des elliptischen Schnittes Fig. 248 konstruirt werden, welche parallel ist zu einer in der Ellipsebene gegebenen Geraden.

$m\,n$ sei die Horizontalprojektion dieser Geraden und $Q'\,R'$ unter allen Umständen deren Vertikalprojektion. Durch den Scheitel (s, s') lege ich eine Parallele zu der Geraden; $s\,Y$ sei deren Horizontalprojektion und nothwendig wieder $s'\,x'$ deren Vertikalprojektion. Die zwei tangirenden Ebenen der Kegelfläche, welche durch diese Parallele gelegt werden können, schneiden die Ebene $P\,Q\,R'$ nach den Parallelen $(\Theta\,e, Q\,R')$, $(\Delta\,f, Q\,R')$, deren jede den gestellten Bedingnissen entspricht.

Wäre diejenige Tangente der Ellipse verlangt worden, welche durch einen in der Ellipsebene gegebenen Punkt P geht, so bildete sie den Durchschnitt dieser Ebene mit der durch P an die Kegelfläche gelegten tangirenden Ebene. Die zwei vorstehenden Konstruktionen beziehen sich begreiflicherweise auf jede andere Art des Kegelschnittes.

367. Von einigen weiteren Eigenthümlichkeiten der Kegelschnitte.

Fig. 249.



Man hat hervorzuheben, daß der Punkt Z, in welchem der Durchmesser $I\,J$ und die Sehne der Berührungspunkte V, W sich kreuzen, es ist, welcher durch die perspektivische Projektion des Kreises in die Ebene $Q\,R$ zum Mittelpunkt der Ellipse wird. Wir haben das hierauf Bezügliche in Fig. 249 nochmals wiederholt. Man sieht, daß Z und X sich gegenseitig bedingen, so daß aus der Lage des einen die des andern hervorgeht. Z theilt

den Durchmesser IJ in zwei Segmente oder Abschnitte JZ und IZ, deren Summe dem Durchmesser gleicht, und X theilt den Durchmesser in zwei Segmente JX und IX, deren Differenz wiederum dem Durchmesser gleicht; man hat nämlich $JI = ZY + ZI = XJ - XI$. Nun sage ich, diese vier Segmente stehen in folgender Proportion $ZJ : ZI = XJ : XI$. In der That, würden JM, IO parallel zu VW gezogen, so gäben die ähnlichen Dreiecke der Figur folgende zwei Proportionen:

$$MW : OW = ZJ : ZI \text{ und } MJ : OI = XJ : XI,$$

aber beim Kreise hat man $MW = MJ$ und $OW = OI$, daher sind die Vorderglieder beider Projektionen einander gleich, und die Hinterglieder bilden die obige Proportion. Schreibt man $XJ - XZ$ anstatt ZJ, und $XZ - XI$ anstatt ZI, so erhält jene Proportion die Form

$$(XJ - XZ) : (ZX - XI) = XJ : XI.$$

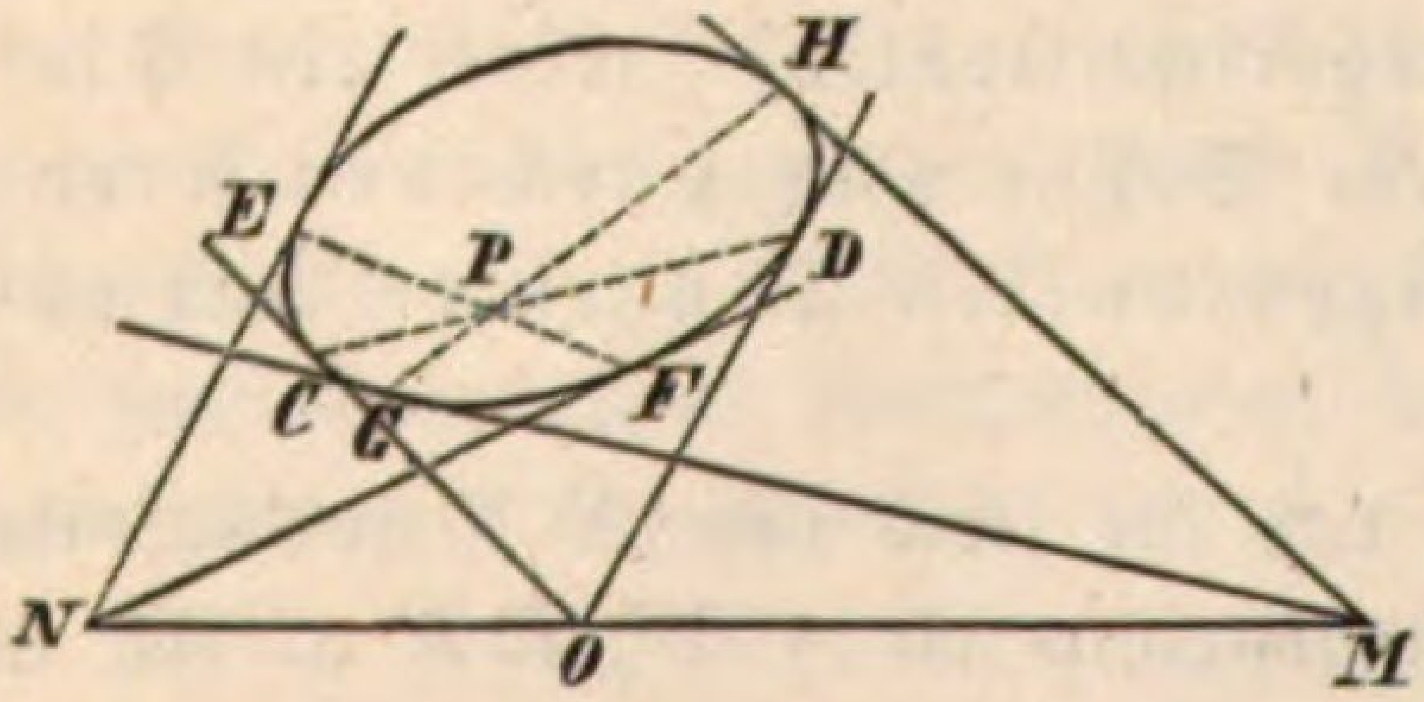
Es erscheinen hier die drei Abstände XJ, XZ, XI und dabei verhält sich der erste weniger dem zweiten zum zweiten weniger dem dritten wie der erste zum dritten. Die griechischen Mathematiker haben diese Art von Proportion eine harmonische genannt, weil sie den Längen einer schwingenden Saite entspricht, wenn diese nacheinander die Töne des harmonischen Dreiklanges hervorbringt. Die Proportion kann durch eine Parallelprojektion nicht geändert werden, sie besteht darum auch bei der Ellipse. Rückwärts schließend gilt also auch die Behauptung, daß jenes Verhältniß wiederum nicht durch die perspektivische Projektion geändert werde. Es läßt sich daher in allgemeiner Form so aussprechen: **Bei jeder Kegelschnittslinie wird ein Diameter durch eine ihm beigeordnete Sehne und durch den Kreuzungspunkt der jener Sehne beigeordneten Tangenten harmonisch getheilt.**

Wir haben in Fig. 248 gesehen, daß für jedes von XY auslaufende Tangentenpaar die Sehne der Berührungspunkte wie VW, EF ꝛc. sich in die Ellipsebene als ein Diameter der Kurve projicire: ein Punkt der Sehne muß sich deshalb als Centrum darstellen; weil dies für VW nun der Punkt Z ist, so folgt daraus, daß alle genannten Sehnen sich in Z kreuzen müssen. Wenn man sich daher vorstellt, VW drehe sich um den Punkt Z, bleibe jedoch stete Sehne des Kreises und führe die Tangenten an ihren Endpunkten mit sich, so wird der Kreuzungspunkt X der Tangenten die gerade Linie XY durchlaufen. Man hat wegen dieser Beziehung zwischen Z und XY ersteres den **Pol** und letzteres die zugehörige **Polarlinie** des Kreises genannt. Es begreift sich, daß diese gegenseitige Beziehung durch irgend eine

Projektion bei allen Kegelschnittslinien nachzuweisen sei. Der Satz läßt sich direkt aus der perspektivischen Projektion des Kreises ableiten. Man denke sich in einem Kreise beliebige Durchmesser gezogen, nebst den Tangenten an den Endpunkten eines jeden. Das Ganze werde perspektivisch in eine andere Ebene *E* projicirt, welche der Kreisebene nicht parallel ist. Nun kann höchstens ein Tangentenpaar der neuen Ebene parallel sein, die andern werden verschiedene Winkel gegen dieselbe bilden. Die Projektion eines jeden Paares wird darum in einem Punkt sich schneiden, wie *F* Fig. *243,* welchen wir in §. 357 als den Kreuzungspunkt der Projektionen von *V W*, *M N* ꝛc. erkannt haben. Weil ferner die projicirenden Geraden, wie *A F*, welche den verschiedenen Paaren von Kreistangenten parallel sind, sämmtlich auch der Kreisebene parallel liegen, so sind sie ihrerseits alle auch der Kreisebene parallel und gehören deshalb einer zu dieser parallelen Ebene *P* an; die Punkte, wie *F* Fig. *243,* in welchen sich die Projektionen eines jeden Tangentenpaares kreuzen, liegen darum in dem Durchschnitte der Ebenen *E* und *P*, d. h. in einer geraden Linie.

368. **Fortsetzung.** Pole und Polarlinien eines Kegelschnittes lassen sich auch als Projektionen eines Vorganges im Raume auffassen und solche Momente nicht unbeachtet zu lassen, gehört wesentlich zu den Zielpunkten unseres Lehrganges. Wolle man zu dem Ende die Linie *E F H* Fig. *250* vorerst als einen Kreis betrachten, zugleich auch als den Umriß einer Kugel, deren Centrum in der Projektionsebene liegt. In gleicher Ebene ist auch die Gerade *N M* enthalten, und es sei durch dieselbe eine tangirende Ebene an die Kugel gelegt worden; II heiße beider Berührungspunkt. Nimmt man nun auf der

Fig. *250.*



Geraden beliebige Punkte *N*, *O*, *M*, jeglichen als Scheitel einer die Kugel tangirenden Kegelfläche, dann müssen sich die Berührungskreise der Kugel und jede Kegelfläche in dem Berührungspunkte II der Fläche und der durch *N M* gehenden tangirenden Ebenen kreuzen, §. 280. Nun ist jede der Tangenten wie *N E* zu betrachten als eine tangirende Ebene der Kugel, welche auf der Projektionsebene steht; daher ist *E* ein Punkt des Berührungskreises der Kugel und der Kegelfläche, von welcher *N* der Scheitel; ein Gleiches gilt für den Berührungspunkt *F*. Weil ferner die Achse der tangirenden Kegelfläche

in der Projektionsebene liegt, muß die Ebene des Berührungskreises auf der Projektionsebene senkrecht stehen und *EF* ist die Projektion dieses Kreises. Gleiches findet statt in Bezug auf die Berührungskreise der Kegelflächen, von welchen *O, M* ꝛc. die Scheitel. Die Ebenen aller dieser Berührungskreise müssen sich nach einer durch II gehenden Vertikallinie schneiden, woraus schließlich folgt, daß sich die Sehnen der Berührungspunkte *CD, JH, EF* ꝛc. in dem einen Punkte *P*, der Projektion von II, kreuzen müssen. Die Gränze der tangirenden Kegelfläche bildet jene der Kugel umschriebene Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien zu *NM* parallel sind. Ihr beiderseitiger Berührungskreis projicirt sich als jener Kreisdurchmesser, welcher auf *NM* senkrecht steht, wie dies übrigens schon aus der Fig. *248* ersichtlich gewesen.

Nachdem die ganze Fig. *250* so in eine andere Ebene projicirt worden, daß der Kreis sich in eine Ellipse verwandelte, blieben die Beziehungen zwischen *P* und *NW* als Pol und Polarlinie der Ellipse ungeändert.

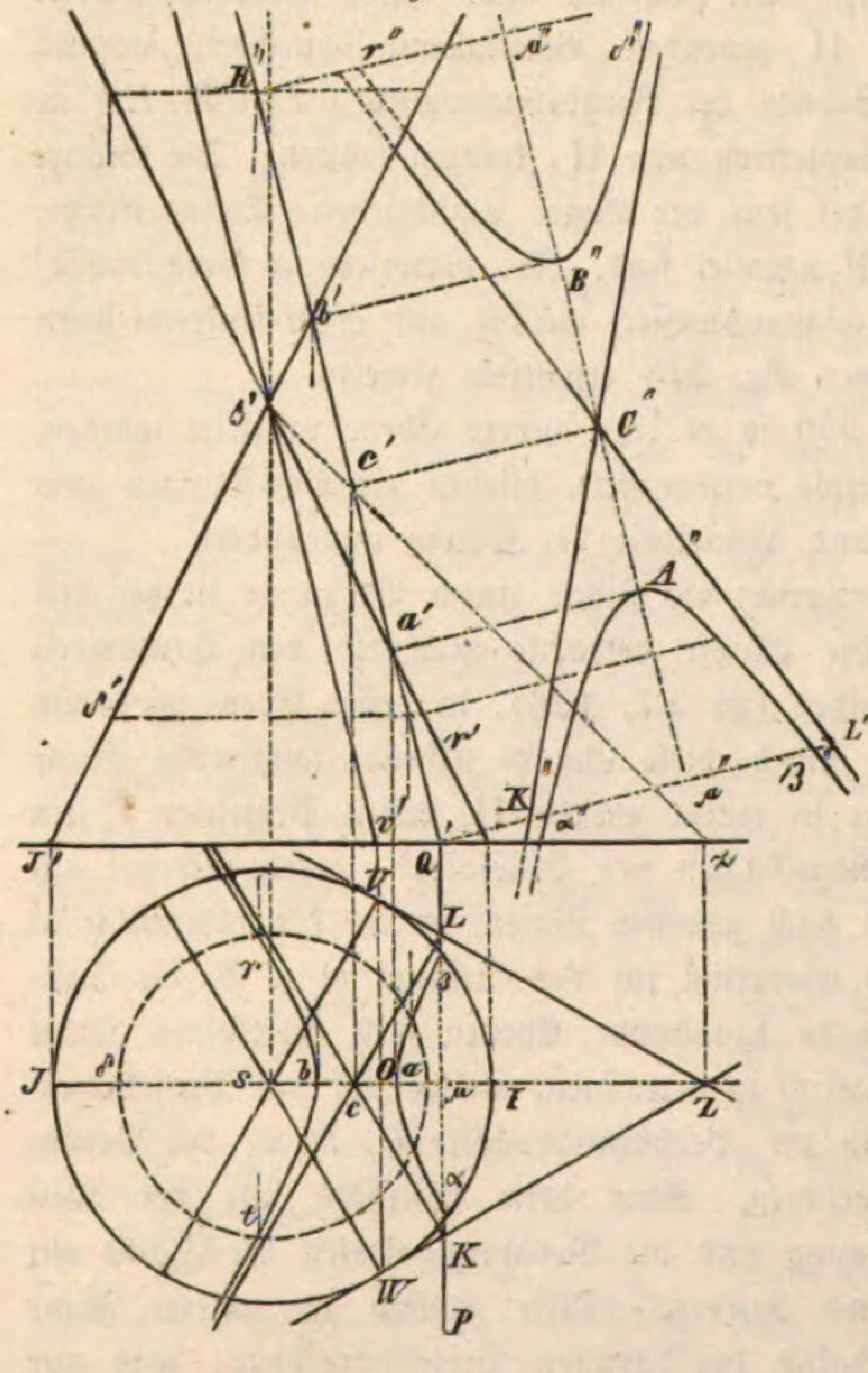
Doch auch jetzt wieder entspricht die Figur einem Vorgange in den drei Dimensionen des Raumes. Die Ellipse betrachte man als den Hauptmeridian eines Umdrehungs-Ellipsoides (§§. 87, 126), in dessen Ebene wiederum die Gerade *NM* liegt. Eine durch diese Gerade gehende tangirende Ebene des Ellipsoides berührt dasselbe in einem Punkte II, dessen Projektion *P* sein soll. Aber alle tangirenden Kegelflächen des Ellipsoides, deren Scheitel auf *NM* liegen, berühren dasselbe nach gewissen Linien, welche sich sämmtlich in II kreuzen müssen. Nun sind wiederum für den Scheitel *O* z. B. die Tangenten *OC, OD* ꝛc. als solche tangirende Ebenen des Ellipsoides sowol als der Kegelfläche vom Scheitel *O* zu betrachten, welche auf der Projektionsebene senkrecht stehen, weshalb die Berührungspunkte *C, D* ꝛc. der Berührungslinie beider Flächen angehören. Aber beim Ellipsoid wie bei allen krummen Flächen zweiter Ordnung sind die Berührungslinien der Fläche mit tangirenden Kegelflächen e b e n e Kurven. Diese müssen in unserer Figur symmetrisch gebildet sein bezüglich der dortigen Projektionsebene, was nur statt haben kann, wenn die Ebenen der Berührungslinien auf der Projektionsebene senkrecht stehen; demzufolge werden die Berührungslinien der tangirenden Kegelflächen sich darstellen als die Sehnen der Berührungspunkte *C, D*; *E, F*; *H, J*; ... welche Sehnen darum einen gemeinsamen Kreuzungspunkt *P* haben müssen. Dies *P* ist ein Pol der Ellipse in Bezug auf die Polarlinie *NM*.

369. Der hyperbolische Kegelschnitt. Fig. *251*.

Ihrer Anordnung nach unterscheidet die Figur sich überall nicht von

der vorhergehenden in Nr. 248. Damit die schneidende Ebene $P\,Q\,R'$ eine Hyperbel als Schnitt hervorbringe, ist es nothwendig, daß eine durch den Scheitel gehende zu ihr parallele Ebene $s'\,v'\,W$ ins Innere der Kegelfläche dringe und sie nach zwei ihrer geraden Erzeugungslinien $(s\,W, s'\,v')$, $(s\,V, s'\,v')$ schneide. Alle Geraden der Kegelfläche, welche von Punkten des Bogens $V\,I\,W$ ausgehen, treffen mit der Ebene $P\,Q'\,R'$ auf dem unteren Netze der Kegelfläche zusammen, und alle Erzeugungslinien, welche den Bogen $V\,J\,W$ kreuzen, liefern Hyperbelpunkte auf dem oberen Flächennetze. Die zwei Geraden der Ebene $s'\,v'\,W$, welche der Ebene $P\,Q'\,R'$ parallel sind, könnten diese nur im Unendlichen treffen. Nach dem in §. 364 Vorgetragenen wird keine Erläuterung darüber mehr nöthig scheinen, wie Punkte des Kegelschnittes zu konstruiren seien, welche einer geraden Erzeugungslinie, oder einem

Fig. 251.



Parallelkreis der Fläche angehören, oder wie an einem solchen Punkte die Tangente sich bestimme. Was die wahre Gestalt $\alpha''\,A\,\beta''\,..\,r''\,B''\,\rho''$ anlangt, so ward sie durch Drehung der Ebene $P\,Q'\,R'$ um ihren Vertikalriß und durch Umlegen in die vertikale Projektionsebene erhalten. Man zog $\mu''\,C''$ parallel zu $Q'\,R'$ und in einem Abstande gleich $Q'\,\mu$. Auf diese Achse des umgelegten hyperbolischen Schnittes kamen die beiden Scheitelpunkte (a, a') und (b', b) nach A'', B'' zu liegen. Irgend ein Kurvenpunkt (α, Q') oder (β, Q')

fand sich, indem die halbe Sehne $\mu\,\alpha$, oder $\mu\,\beta$ auf der Senkrechten $Q'\,\mu''$ von μ'' aus rechts und links nach α'', β'' getragen ward u. s. w.

Die Asymptoten des Schnittes. Ordnet man die zwei tangirenden Ebenen an, welche die Kegelfläche längs der Geraden $(s'\,v', s\,V)$, $(s'\,v', s\,W)$ berühren, und welche als Horizontalrisse die Kreistangenten $V\,Z$, $W\,Z$ haben, so werden die Schnitte dieser tangirenden Ebenen und der Ebene $P\,Q'\,R'$ Tangenten des hyperbolischen Schnittes, und die Berührungspunkte da sein, wo die Erzeugungslinien durch $P\,Q'\,R'$ dringen, wie solches bei allen anderen tangirenden Ebenen der Kegelfläche statt hat. Weil jedoch im gegenwärtigen Fall die Geraden $(s\,V, s'\,v')$, $(s\,W, s'\,v')$ der Ebene $P\,Q'\,R'$ parallel sind und sie nur in unendlicher Entfernung erreichen, so findet man jetzt jene beiden Tangenten der Hyperbel, welche sie erst im Unendlichen berühren, woher auch ihr Name. Aber wegen des Parallelismus der zwei Erzeugungslinien und der Ebene $P\,Q'\,R'$ müssen auch die Durchschnitte dieser Ebene mit den zwei tangirenden Ebenen jenen Geraden wiederum parallel sein. K und L, wo die Risse $V\,Z$, $W\,Z$ und $P\,Q$ sich kreuzen, sind Punkte für je eine der Asymptoten, deren Horizontalprojektionen $L\,c$, $K\,c$ zu $V\,s$ resp. $W\,s$ parallel sind und sich in einem Punkte c der Hauptmeridianebene kreuzen müssen. Ihre gemeinsame Vertikalprojektion ist wiederum $P'\,Q'$.

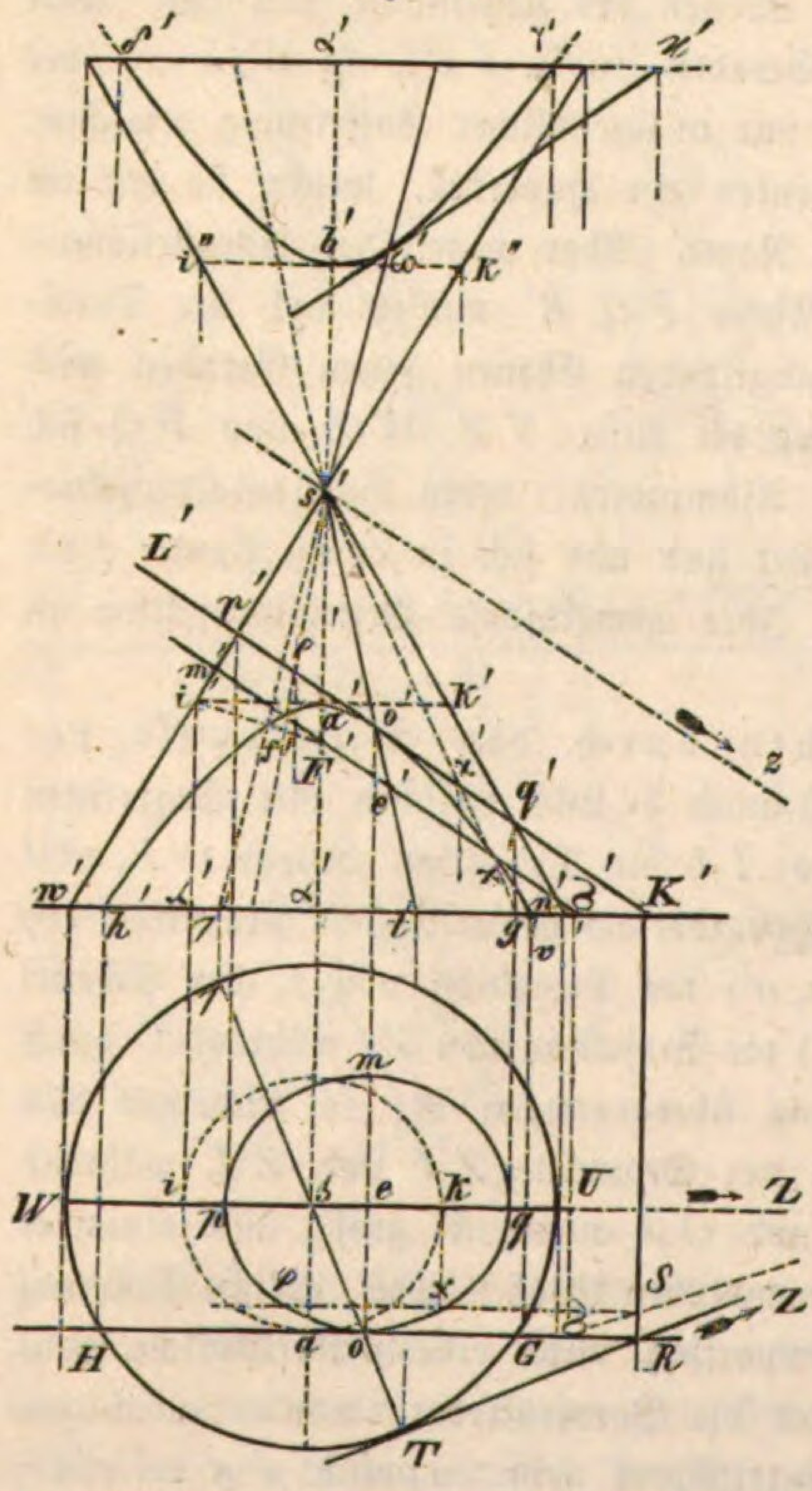
370. Die Asymptoten gehen durch den Mittelpunkt der Hyperbel. Denn man beachte, daß nach §. 264 zwischen vier Segmenten $O\,I$, $O\,J$, $Z\,I$, $Z\,J$ des Durchmessers $I\,J$ die Projektion besteht $O\,I : O\,J = Z\,I : Z\,J$. Nimmt man aber die Hyperbel als perspektivische Projektion des Kreises $I\,W\,J$, so ist der Scheitel (a, a') die Projektion von I, der Scheitel (b, b') die Projektion von J und (c, c') die Projektion von Z, während O durch die Projektion in unendliche Entfernung übergegangen ist; es erscheinen also $c'\,a'$ und $c'\,b'$, als die Projektionen der Segmente $Z\,I$ und $Z\,J$, während die Projektionen der Segmente $O\,I$ und $O\,J$ unendlich groß, also einander gleich geworden sind, weil zwischen unendlichen Größen jede endliche Differenz verschwindet. Da nun die obige Proportion durch eine perspektivische Projektion nicht geändert werden kann und die Vorderglieder einander gleich geworden sind, werden es auch die Hinterglieder sein, nämlich $c'\,a' = c'\,b'$; w. z. B. w.

In der Umlegung der Hyperbel kommt (c, c') auf die Achse noch C'' zu liegen; zwei weitere Punkte der Asymptoten K'', L'' liegen auf der Senk-

rechten $Q' L''$, so daß die Abstände $\mu'' L''$ oder $\mu'' K''$ gleich sind den Abständen μL oder μK.

Konstruirt man an irgend einem Punkte des hyperbolischen Schnittes die Tangente und trägt sie auf die Umlegung $\alpha'' A'' \beta'' \ldots r' B'' \rho''$ über, so wird sich zeigen, daß sie mit der Achse $A'' B''$ einen Winkel bildet, größer als der halbe Asymptotenwinkel $L'' C'' \mu''$. Bei den Scheiteln $A'' B''$ steht die Tangente senkrecht zur Achse. Läßt man die Scheiteltangente $A'' a''$ z. B. tangirend auf der Kurve hingleiten, daß sie immer kleinere Winkel mit der Achse bildet, so wird sie schließlich zur Asymptote $C'' K''$ und kann ihre Drehung in demselben Sinne nicht weiter fortsetzen, ohne aufzuhören Tangente der Hyperbel zu sein.

Fig. 252.



Betrachtete man jetzt Z als einen Pol des Kreises $I W J$ und den verlängerten Horizontalriß $V O W$ der schneidenden Ebene als die entsprechende Polarlinie, so ließen sich mittelst dieser Anschauung die Eigenthümlichkeiten der Hyperbel in Bezug auf deren Durchmesser, konjugirte Sehnen und Tangenten aus der perspektivischen Projektion des Kreises nachweisen; man würde z. B. zeigen, daß jede Kreissehne, deren Verlängerung durch Z geht, sich in die Hyperbelebene als ein Durchmesser der Linie projicire. Allein wir ziehen vor, uns zu diesem Zweck in Fig. 252 einer von Th. Olivier mitgetheilten eben so einfachen als anschaulichen Kombination zu bedienen.

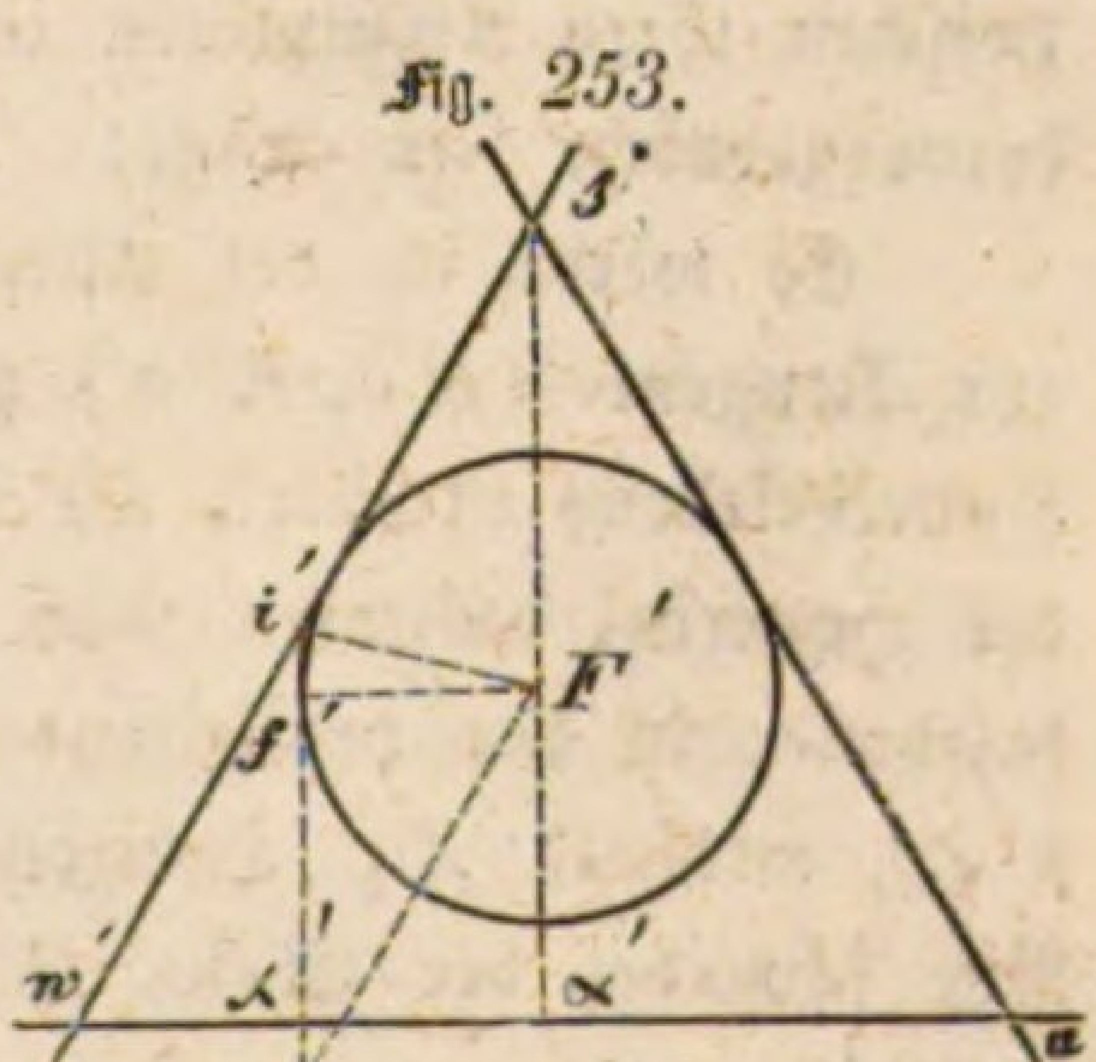
371. Diese Figur stellt eine Rotationskegelfläche dar, geschnitten durch eine vertikale Ebene $G H$, welche zur vertikalen Projektionsebene wie zur Hauptmeridianebene $U W$ parallel steht und darum nothwendig einen hyper-

bolischen Schnitt ($G H, g' a' h' .. \gamma' \sigma' \delta'$) hervorbringt. Die Scheitelpunkte (a', a'), (b, b') der Ellipse liegen auf jenen Parallelkreisen, welche die Ebene $G H$ berühren, also einen Radius gleich $s a$ haben. Der gemeinsamen Horizontalprojektion $a i k$ entspricht nun als Vertikalprojektion die Wagerechte $i' a' k'$ oder $i'' b' k''$. Die geraden Erzeugungslinien in der Hauptmeridianebene $U W$ sind es, welche jetzt der schneidenden Ebene parallel liegen und die berührenden Ebenen der Kegelfläche an diesen Erzeugungslinien haben als Horizontalrisse die Senkrechten $w' W, u' U$; sie schneiden die Ebene $H G$ nach zwei durch $W U$ gehenden Geraden, den Asymptoten der Hyperbel, welche jenen Erzeugungslinien parallel sind. Die Vertikalprojektionen dieser Asymptoten fallen zusammen mit den Umrissen $s' u'$, $s' w'$ der Kegelfläche.

Man kann die Ebene $H G$ selbst als vertikale Projektionsebene betrachten und alsdann ist der hyperbolische Schnitt im Raume identisch mit seiner Vertikalprojektion.

Halbirt man den Winkel $\lambda' i' s'$ durch eine gerade Linie, so schneidet diese auf der Achse einen Brennpunkt F der Hyperbel ab. In der That, wenn man sich vorstellt, die Ebene $H G$ sei im rechten Winkel um die Rotationsachse gedreht und in die Stellung $i \lambda' i'$ gebracht worden, und man beschreibt in Fig. 253 (welche nur eine Wiederholung aus Fig. 252 ist) den Kreis, welcher die Geraden $s' w'$, $s' k'$, $\lambda' i'$ berührt, so liegt sein Centrum F in der Halbirungslinie $i F$ des Winkels $\lambda' i' s'$ und der Berührungspunkt f ist der Brennpunkt des hyperbolischen Schnittes $\lambda' i'$ der Kegelfläche. Nachdem man aber die Hyperbelebene wieder in ihre erste Stellung zurückgebracht hat, wird f nach F fallen. Halbirt aber $i F$ den Winkel $k' i' s'$, so muß $s' F = s' i'$ sein (man betrachte $i' s' F$ als die Hälfte eines Parallelogrammes, wovon $i F$ die Diagonale). Aus Alledem folgt: den Brennpunkt F einer Hyperbel zu finden, von welcher die Asymptoten $s' w'$, $s' q'$ und ein Scheitel a' gegeben sind, errichtet man $a' i'$ senkrecht auf die Achse und trägt $s' i'$ nach $s F$.

Fig. 253.



372. An einem Punkte (o, o') der Hyperbel sei die Tangente ($R o$, $K' o'$) verzeichnet. [(o, o') gehört zu der geraden Erzeugungslinie ($s o T, s' o' t_{,}$) und die tangirende Ebene längs dieser Geraden hat als Horizontalriß die Kreistangente $T R$, welche die Ebene $H G$ in (R, K') schneidet 2c. Wäre

o als an dem oberen Aste liegend zu betrachten, so fände sich seine Vertikalprojektion in ω' auf der Geraden $(\tau s, \tau' s')$.]

Man denke sich nun durch die Tangente $(R o, K' o')$ eine Ebene gelegt, welche senkrecht steht auf der Ebene $H G$; ihre Risse werden $R K'$, $K' o' L'$ sein; man konstruire den Schnitt dieser Ebene und der Kegelfläche; der Schnitt wird elliptisch sein, denn eine Ebene, parallel zu $R K' L'$ und durch den Scheitel gehend, hat als Vertikalprojektion die Parallele $s' z'$ zu $K' L'$. Dies $s' z'$ aber muß mit der Achse $\alpha' \alpha'$ einen größern Winkel machen als die Asymptote, daher hat die Ebene $s' z'$ mit der Kegelfläche nur den Scheitel gemein und $K' L'$ muß in der Fläche einen geschlossenen Schnitt hervorbringen, nämlich die Ellipse $(m p o q, p' q')$, welche mit der Hyperbel in (o, o') die gemeinsame Tangente $(o R, o' K')$ hat. $(p q, p' q')$ ist die große Achse der Ellipse und $o m$ die kleine Achse, schon aus dem Grunde, weil hier die Tangente der großen Achse parallel liegt; außerdem liegen [$(Z, z'$ als den Begegnungspunkt der Geraden $(s U, s' z')$ mit der Horizontalebene betrachtet] dieselben Beziehungen vor wie zwischen $P Q' R$ und $X x s'$ in Fig. 248. Somit muß o' in die Mitte von $p' q'$ fallen und weil für eine jede andere Tangente bei gleicher Behandlung das gleiche Resultat sich ergeben wird, so folgt daraus ganz allgemein, daß das Stück einer jeden Hyperbeltangente zwischen ihren Asymptoten im Berührungspunkte halbirt sei, was gelegentlich hervorgehoben sein mag.

Es werde in der Ellipsebene irgend eine Sehne $(\varphi \chi, \varphi' \chi')$ parallel zur Tangente $(R o, K' o')$ gezogen und diese Sehne von (s, s') aus in die Hyperbelebene projicirt, wo sie wiederum als zur Tangente parallele Sehne der Hyperbel auftreten muß. Aber die erste Sehne trifft in ρ die Horizontalebene; in der projicirenden Ebene derselben liegt auch die Gerade $(s Z, s' z')$, weshalb $Z \rho$ Horizontalriß der projicirenden Ebene sein muß; dieser Riß schneidet die Ebene $H G$ in (σ, σ') und die Parallele $\sigma' m'$ zu $K' L'$ stellt ihrer Lage nach die genannte perspektivische Projektion der Ellipssehne $(\rho \varphi, K' L')$ in der Ebene $H G$ dar. Die Endpunkte φ', χ' jener ersten Sehne projiciren sich vermittelst der Geraden $s' \varphi'$, $s' \chi'$ nach f', x' auf die Hyperbel. Zieht man die Gerade $s' o'$, welche die $f' x'$ in e' kreuzt, so hat man wegen $o' \varphi' = o' \chi'$ auch $e' f' = e' x'$. Aus diesem Ergebniß darf gefolgert werden, daß alle innerhalb des Asymptotenwinkels liegenden und durch das Centrum der Hyperbel gehenden Geraden **Durchmesser** der Kurve seien und daß sie alle jene Sehnen halbiren, welche den Tangenten an den Durchschnittspunkten des Durchmessers und der Kurve parallel liegen.

Der zu genannter Tangente $q'p'$ parallele Durchmesser ist dem ersten $s'o'$ konjugirt und geht durch die Mitten aller demselben parallelen Sehnen, welche von einem Aste der Hyperbel zum andern laufen.

Nur zwei konjugirte Durchmesser stehen auf einander senkrecht, nämlich die Achsen der Hyperbel. Zweite oder eingebildete Achse heißt, wie schon bemerkt, diejenige, welche auf der Achse $a'b'$ senkrecht steht. Einer gewissen Uebereinstimmung mit der Ellipse wegen pflegt man ihr eine Größe gleich der Senkrechten $a'i'$ beizulegen.

Von je zwei konjugirten Durchmessern durchschneidet stets nur einer den Umfang der Hyperbel.

Angenommen, der Punkt o' gleite auf der Ellipse fort, sich der Asymptote $s'u'$ nähernd, und führe dabei den Durchmesser $s'o'$ wie die Tangente $q'o'$ mit sich, so wird letztere immer dem zu $s'o't'$ beigeordneten Durchmesser parallel sein, während der Winkel $q'o't'$ immer spitzer wird. Ist o' in unendliche Entfernung übergegangen, dann wird in demselben Augenblick auch der Winkel $q'o't'$ Null, $q't'$ zur Asymptote geworden sein, und beide Durchmesser sind mit dieser in Eins zusammengefallen. So veranschaulicht es sich, wie eine jede der zwei Asymptoten der Hyperbel zwei konjugirte und in Eins vereinigte Durchmesser repräsentire.

Die beiden Sehnen, welche einen Punkt des Umfanges mit den Endpunkten irgend eines Durchmessers verbinden, sind wechselsweise zweien konjugirten Durchmessern parallel. *)

Die Tangenten an den Endpunkten einer Sehne kreuzen sich in einem Punkte des zur Sehne gehörigen Durchmessers.

Wegen $o'q' = o'p'$ ist auch $e'n' = e'm'$ und da $e'x' = e'f'$, bleibt $n'x' = m'f'$, woraus hervorgeht, daß die Stücke einer verlängerten Sehne zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten einander gleich seien.

373. Aus den vorhergehenden Sätzen leiten wir einige lineare Konstruktionen ab.

Ist eine Hyperbel punktweise bestimmt worden und man verlangt deren Mittelpunkt, Achsen, Tangenten, so führen dazu folgende Beziehungen, welche der Leser graphisch ausführen wolle.

Die gerade Linie, welche die Mitte zweier parallelen Sehnen verbindet, ist ein Durchmesser der Hyperbel.

Zwei also bestimmte Durchmesser kreuzen sich im Mittelpunkt der Kurve.

---

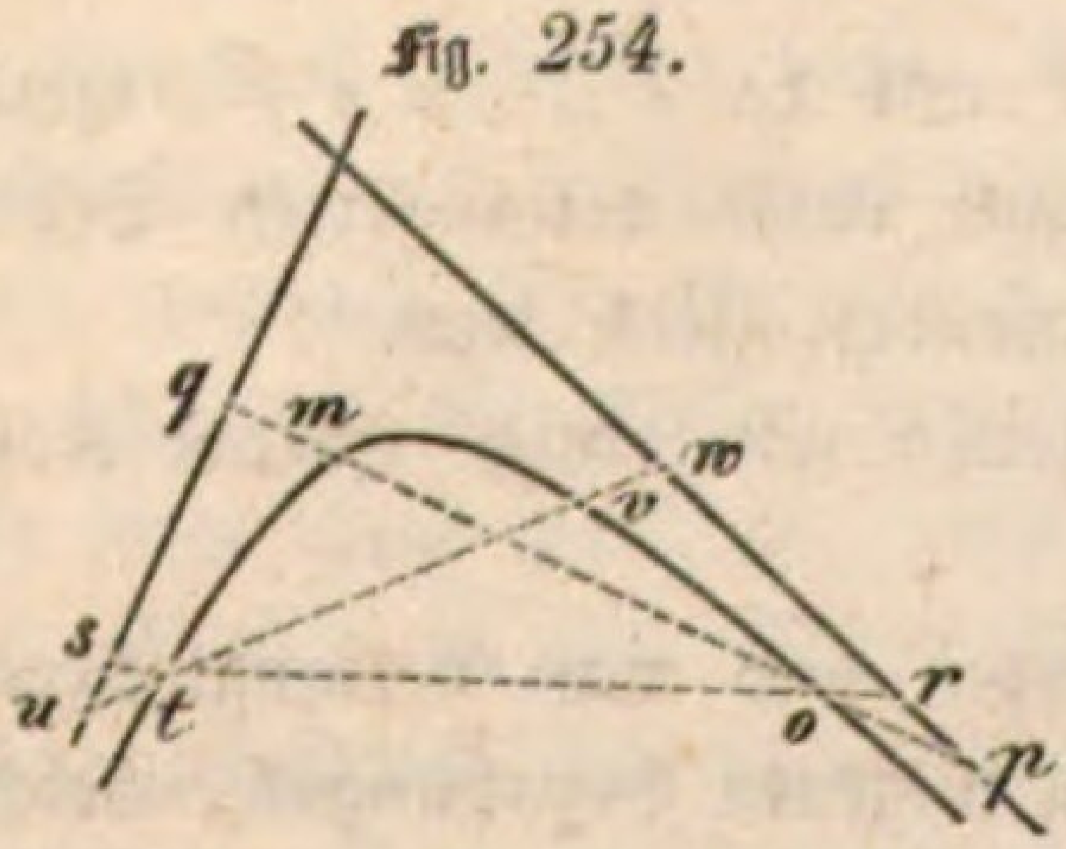
*) Vergl. §. 146, Fig. 6, S. 223.

Irgend ein Durchmesser schneidet die Hyperbel in zwei Punkten M und N; beschreibt man über MN einen Halbkreis, welcher die Kurve noch in P durchkreuzt, so sind einmal die Sehnen PM, PN parallel zu zwei konjugirten Durchmessern der Hyperbel; weil aber die Sehnen rechtwinklig unter sich stehen, sind jene Durchmesser die Achsen.

Die Tangente an einem gegebenen Punkt o' Fig. 252 der Kurve zu erhalten, zieht man den Durchmesser $s'\,o'$ dieses Berührungspunktes und noch eine ihm parallele Sehne (von einem Kurvenaste zum andern reichend). Jene Gerade, welche die Mitte dieser Parallelen mit s' verbindet, ist der zu $s'\,o'$ konjugirte Durchmesser und ihm parallel liegt die Tangente $q'\,o'$. — Sind die Asymptoten verzeichnet, so kann man durch den Berührungspunkt o' eine Parallele zu der Asymptote $s'\,w'$ ziehen (man wolle diese Linien nachtragen), ihren Durchschnittspunkt ω mit der zweiten Asymptote markiren und $s'\,\omega'$ von ω' nach q' tragen, welches ein zweiter Punkt der Tangente sein wird, denn die Dreiecke $p'\,q'\,s'$, $q'\,o'\,\omega'$ sind ähnlich und $q'\,\omega' = \omega'\,s'$, weil $q'\,o' = o'\,p'$. — Es können drittens zur Konstruktion der Tangente die supplementären Sehnen entsprechend wie in Fig. 6, S. 223, angewendet werden.

Es ändert die Konstruktion nur wenig, wenn die Tangente parallel sein soll zu einer Geraden G. Denn der Durchmesser, welcher durch die Mitte einer mit G parallelen Sehne geht, ist beigeordnet zu der verlangten Tangente und schneidet den Umfang der Hyperbel in dem Berührungspunkte. Es giebt somit immer zwei zu G parallele Tangenten der Hyperbel. Aber die Aufgabe hat keine mögliche Lösung, sobald die zu G parallele Sehne von einem Hyperbelast zum andern geht.

Fig. 254.



Wurden in Fig. 254 die Asymptoten und ein Punkt o einer Hyperbel gegeben und man verlangte weitere Punkte der Kurve, so ziehe man durch o mehrere gerade Linien $p\,o\,q$, $r\,o\,s$ ... und trage auf der ersten $p\,o$ von q nach m, auf der zweiten $r\,o$ von s nach t u. s. f. Jeder so gewonnene Punkt könnte seinerseits wieder wie o benutzt werden: auf $u\,t\,w$ war $u\,t$ von w nach v zu tragen ꝛc.

Sind die Asymptoten Achsen und Scheitel einer Hyperbel gegeben, so findet man die Brennpunkte dadurch, daß Fig. 253 im Scheitel a' ein Perpendikel $a'\,i'$ auf die Achse errichtet wird, welcher die Asymptoten in i'

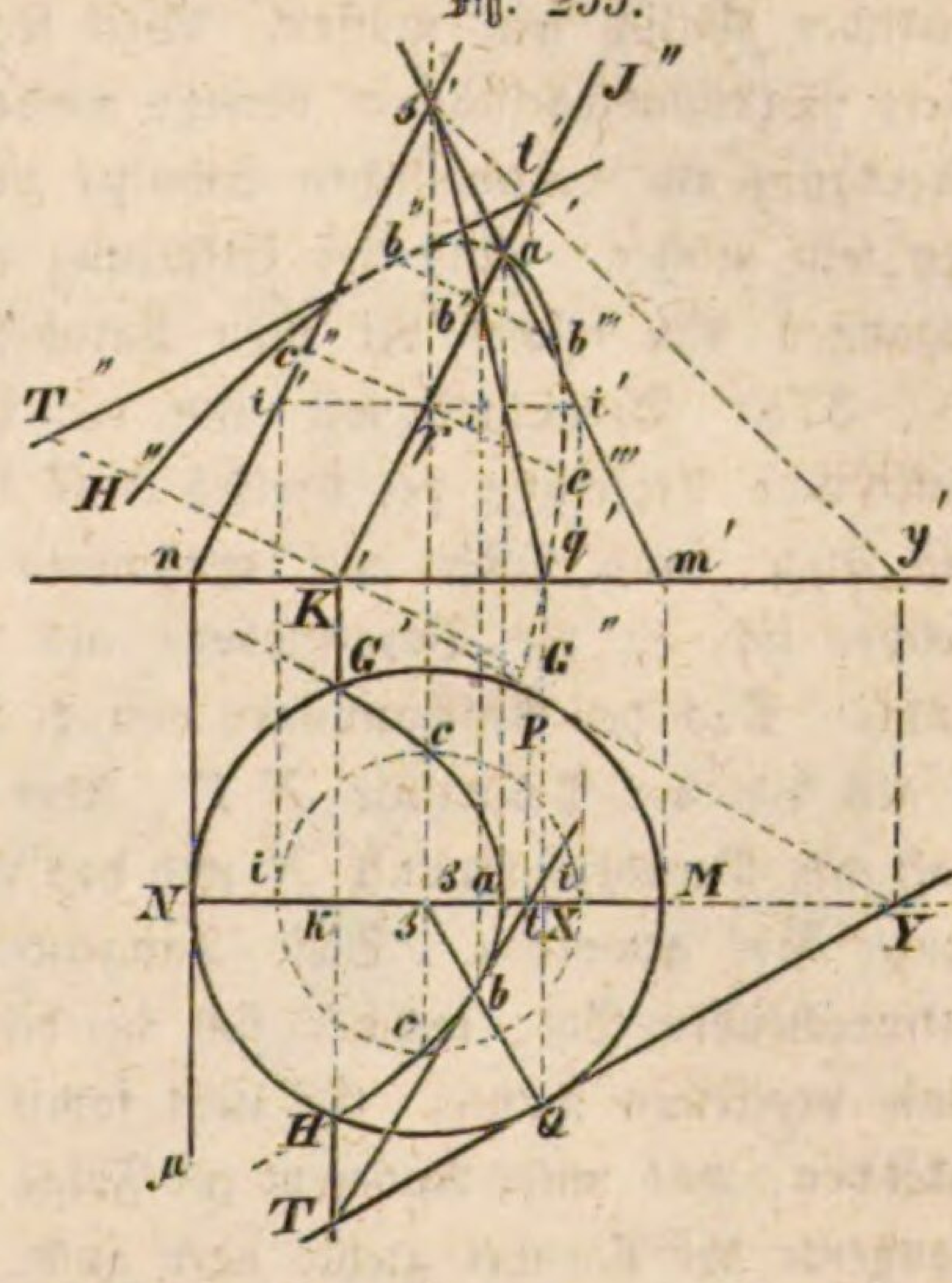
schneidet. $s' i'$ ist stets gleich der halben Brennweite und bleibt darum von s' nach F (auch nach aufwärts) zu tragen.

Anmerkung. Wie eine Hyperbel mittelst ihrer Achse und Brennweite punktweise zu verzeichnen sei, setzen wir hier als bekannt voraus (1. Thl., §. 115). In diesem Falle die Asymptoten zu erhalten, schlägt man gegen vorhin den umgekehrten Weg ein: man schneidet mit der halben Brennweite aus s' auf der Senkrechten $a' i'$ die Punkte i' ... ab.

374. Parabolischer Kegelschnitt Fig. 255.

Er entsteht unter der Bedingung, daß die schneidende Ebene einer tangirenden Kegelfläche parallel sei. $\mu\, n' s'$ in unserer Figur ist eine der zwei tangirenden Ebenen, welche auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehen; ihr parallel liegt die Ebene $H K' J'$, als deren Schnitt in der Kegelfläche sich die Parabel ($H a G$, $a' K'$) ergeben hat. (c, γ'), (c, γ') sind Punkte des Schnittes auf einem Parallelkreise ($i' i'$, $i c i$), (b, b') ein Punkt auf einer geraden Erzeugungslinie ($s Q$, $s' q'$); $Q T$ Horizontalriß der tangirenden Ebene längs dieser Geraden, daher ($T b$, $K' J'$) ihr Durchschnitt mit der Ebene $H K' J'$ und zugleich Tangente der Parabel am Punkte (b, b'); ($a k$, $a' k'$) die Achse der Kurve, (a, a) ihr Scheitel. Die Achse diente als Charnier, um die Ebene $H K' J'$ nebst der krummen Linie in ihr zu drehen, bis sie der Vertikalebene parallel stand und die Kurve sich bei $H'' c'' a G''$ in ihrer wahren Gestalt zeigte. (Nachdem durch die verschiedenen Punkte b', γ' K' Senkrechte auf $a' K'$ gezogen waren, hatte man auf dieselben aufzutragen: $K G$ oder $K H$ von K'' nach G'' und H''; $s c$ von γ' nach c'' und c''' βb von b' nach b'' und b''' 2c.; für die Tangente $T'' b''$ mußte $K'' T''$ gleich $K T$ genommen werden 2c.)

Fig. 255.



Die Erzeugungslinie ($s N$, $s' n'$) ist der Achse ($a K$, $a' K'$), also auch der Parabelebene parallel, weshalb auf dieser Geraden ein Punkt der Para-

bel im Unendlichen liegt. Sucht man die Tangente an diesem Punkt der Kurve, so ist zu erkennen, daß sie die Durchschnittslinie sein müßte der Parabelebene mit der tangirenden Ebene $s' n' \mu$; beide sind aber parallel und können sich nur im Unendlichen schneiden. Mit andern Worten: die Parabel hat keine Tangente, welche sie im Unendlichen berührt, d. h. keine Asymptote.

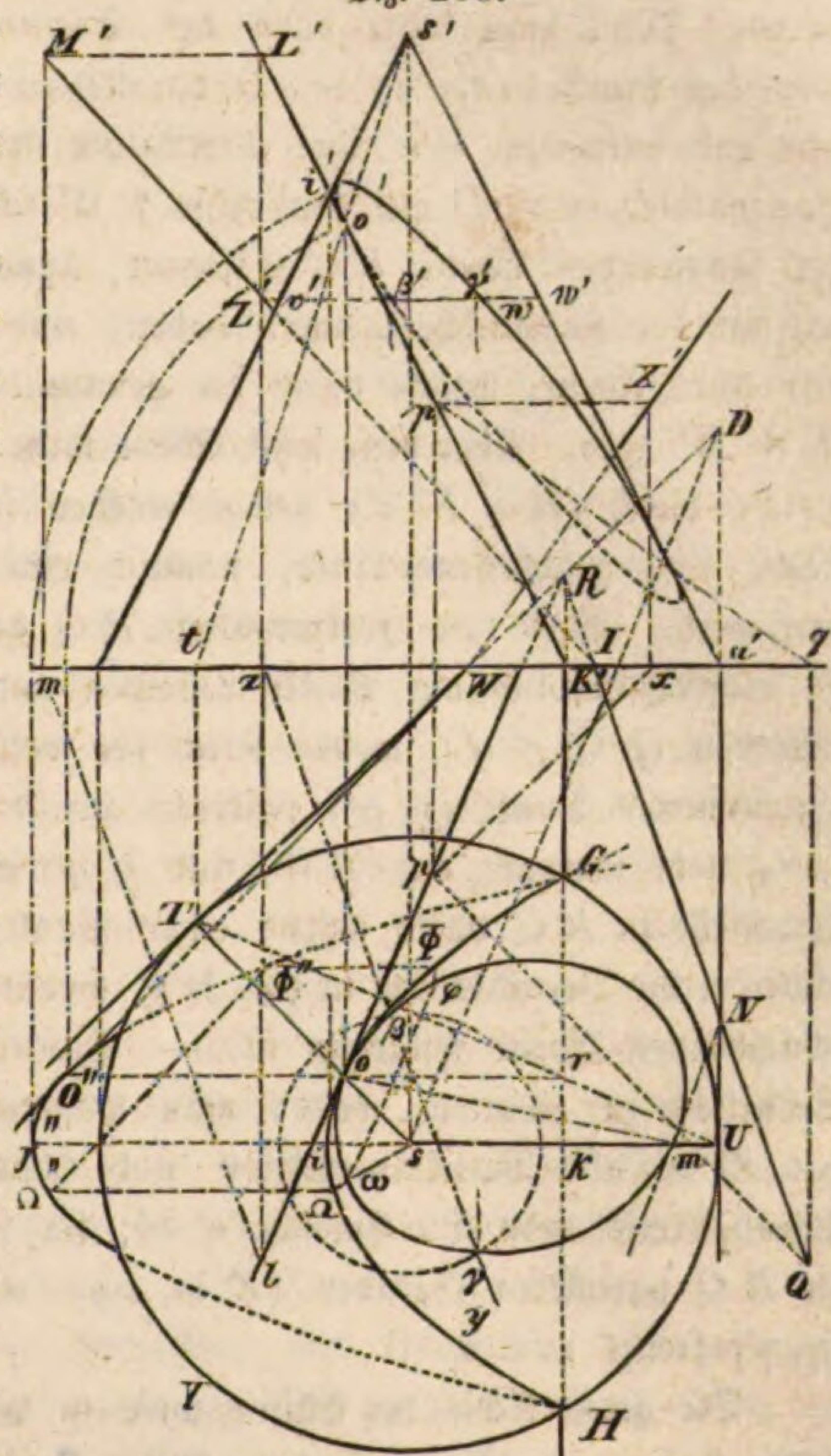
Da alle tangirenden Ebenen einer Rotationskegelfläche gleiche Winkel mit der Drehungsachse bilden, so muß das Gleiche stattfinden bei allen Ebenen, welche in der Fläche einen parabolischen Schnitt machen. Ohne darum an der Form eines solchen Schnittes irgend Etwas zu ändern, kann man sich die Ebenen derselben so um die Achse der Fläche gedreht denken, daß diese Ebenen unter sich parallel werden, woraus erhellt, daß die Schnitte selbst einander ähnlich sein müssen. Weil ferner eine jede Parabel auf unendlich viele Rotationskegelflächen versetzt werden kann, so zeigt sich schließlich, daß überhaupt alle parabolischen Schnitte von Rotationskegelflächen ähnliche Kurven sein müssen. Aus der Erklärung von §. 62 ist übrigens schon hervorgegangen, daß solches bei allen Parabeln ohne Ausnahme stattfinde.

375. Betrachten wir nun die Parabel als entstanden durch die perspektivische Projektion des Kreises NHM in die Ebene $TK'J'$, wobei (s, s') das Auge, und suchen wir denjenigen Punkt der Kreisebene zu erkennen, welcher sich in die Parabelebene als den Mittelpunkt der Linie projiciren müßte. Nach den Anschauungen von §. 370 Fig. *251* war es dort der Punkt Z als Pol der Polarlinie XT. Aber das dortige X ist im gegenwärtigen Fall der Berührungspunkt N und das dortige XY ist gegenwärtig zur Tangente Nn' geworden. Diese Tangente ist nun also Polarlinie und N ihr entsprechender Pol, welcher sich in die Parabelebene als Mittelpunkte der Linie projiciren mußte. Es liegt somit der Mittelpunkt der Parabel im Unendlichen, was unter Anderem zur Folge hat, daß es keine Achse zur parallelen Tangente der Parabel giebt, oder auch, daß man von solchen Tangenten annehmen muß, sie lägen ganz im Unendlichen, weil der zur Achse beigeordnete Durchmesser selbst eine unendliche Größe erhalten hat.

Man denke sich in Y die zweite Tangente YP des Kreises gezogen und bezeichne den Kreuzungspunkt von PQ und NM mit X, so besteht nach §. 364 zwischen den vier Segmenten XM, XN, YM, YN die Proportion $XX : MN = YM : YN$, welche auch noch zwischen den perspektivischen Projektionen dieser Segmente stattfinden muß. Aber Y projicirt sich nach (t, t'), M nach (a, a'), X nach (β, b') und N ging ins Unendliche über; somit ist $a' t'$ die Projektion von MY, $a' b'$ die Projektion von MX

und die Projektionen der beiden andern Segmente sind unendlich groß, also einander gleich geworden. Werden aber in der vorigen Proportion zwei Glieder einander gleich, so muß dasselbe auch bei den beiden andern der Fall sein, d. h. man wird erhalten haben $a'b' = a't'$. Wird in dem rechtwinkligen Dreiecke $t'b'b''$ der Kathete $b't'$ als die Projektion des Tangentenstückes $t'b''$ betrachtet und nennt man ersteres die Subtangente, so folgt im Allgemeinen, daß bei der Parabel die Subtangente $b't'$ gleich sei der doppelten Abscisse $a'b'$, nämlich $b't' = 2a'b'$.

Fig. 256.



376. Zum Ableiten anderer projektiver Eigenthümlichkeiten der Parabel dient uns Fig. 256, welche wiederum den parabolischen Schnitt einer Rotationskegelfläche zeigt, hervorgebracht durch die Ebene $HK'L'$, welche zur tangirenden Ebene $Uu's'$ parallel und gleich dieser auf der Vertikalebene senkrecht steht; $(ik, i'K')$ sei die Achse der Parabel, (o, o') ein beliebiger Punkt der Linie und $(Ro, K'L')$ die Tangente an demselben. — Die gerade Erzeugungslinie des Punktes (o, o') trifft die Horizontalebene in T, daher TR Horizontalriß der tangirenden Ebene am Punkte (o, o') und R dessen Begegnungspunkt mit dem Risse HK, wodurch die Projektion Ro sich festsetzt. Es wird jedoch sogleich auch der Vertikalriß WX' derselben tangirenden Ebene in Frage kommen, von welchem W auf der Tangente TR liegt und ein zweiter Punkt (X', x) desselben sich ergab, indem durch einen beliebigen Punkt (p, p') der Tangente $(Ro, K'L')$ eine Parallele $(px, p'X')$ zu TR geführt ward, welche die Vertikalebene in (x, X') durchkreuzt. Es wird jetzt zu ähnlichen

Zwecken wie in §. 370 die Aufgabe gestellt: durch die Parabeltangente eine Ebene senkrecht gegen die tangirende Ebene TWX' zu legen und deren Schnitt in der Kegelfläche zu verzeichnen.

Zuvörderst wird behauptet, daß der Schnitt elliptischer Beschaffenheit sein werde. Denn man führe durch den Scheitel (s, s') eine Parallele zur Tangente des Punktes (o, o'); — sD, parallel zu oR, wird ihre Horizontalprojektion sein und wiederum $s'u'$ ihre Vertikalprojektion, — diese Parallele wird die Horizontalebene in D auf dem Risse TW schneiden. Sie wird ferner, weil in der tangirenden Ebene $Uu's$ liegend, außer dem Scheitel keinen Punkt weiter mit der Kegelfläche gemein haben, und das Gleiche wird der Fall sein mit einer Ebene, welche durch die genannte Parallele senkrecht auf die Ebene TWX' geht. Aber diese letzte Ebene muß parallel sein mit der Geforderten, welche durch $(Ro, K'o')$ gelegt werden soll, weshalb diese in der Kegelfläche eine geschlossene Linie, nämlich eine Ellipse, als Schnitt hervorbringen wird. Was den Horizontalriß RQ der fraglichen Ebene betrifft, so ist R selbstverständlich ein Punkt desselben und (Q, q') ist der Fußpunkt einer Geraden $(pQ, p'q')$, welche durch den beliebig wo auf der Parabeltangente genommenen Punkt (p, p') senkrecht auf die Ebene TWX' gelegt ward. (pQ steht senkrecht auf TW, und $p'q'$ senkrecht auf WX', §. 30.) Eine Parallelle zu RQ durch irgend einen Punkt (l, L') auf $(Ro, K'o')$ geführt, schneidet die Vertikalebene in (m, M'), wodurch der Vertikalriß IM' der neuen schneidenden Ebene festgesetzt ist. — Punkte (β, β'), (γ, γ') des elliptischen Schnittes zu erhalten, wende man wagerechte Hilfsebenen an. Eine solche hat $Z'w'$ als Vertikalprojektion und schneidet die Kegelfläche nach einem Parallelkreise vom Durchmesser $v'w'$; sie schneidet die Ellipsebene nach der zu RQ parallelen Geraden $(Z'w, zy)$, welche den Parallelkreis in (β, β'), (γ, γ') kreuzt u. s. w.

Die große Achse der Ellipse wird in derjenigen Meridianebene der Kegelfläche liegen, welche auf dem Risse RQ senkrecht steht. Es bleibe dem Studirenden anheimgestellt, diese große Achse, welche sich auch als die Achse der Projektion $\beta o \gamma$ darstellt, zu bestimmen; nur sei hinzugefügt, daß die konstruktiven Arbeiten sich bequemer gestalten, wenn noch eine vertikale Hilfsprojektion angeordnet wird, deren Ebene auf RQ senkrecht steht, denn in solcher Projektion wird die Ellipsebene sich als eine gerade Linie darstellen, welche bestimmt ist durch den Kreuzungspunkt der neuen Grundlinie mit dem Risse QR und zweitens durch die neue Projektion von (o, o').

377. Fortsetzung. $(Ro, K'o')$ ist eine gemeinsame Tangente des

parabolischen wie des elliptischen Kegelschnittes und in dieser Anordnung liegt wieder das Hilfsmittel, bekannte Eigenthümlichkeiten der Ellipse auf die Parabel zu übertragen (§. 371). Zu dem Ende lege man durch die Parallele ($s\,D$, $s'\,u'$) die zweite tangirende Ebene an die Kegelfläche; sie kann keine andere sein als die Ebene $U\,u'\,s'$, in welcher jene Parallele enthalten ist, wie schon oben hervorgehoben worden. Als nächste Folge hiervon ergiebt sich, daß die Durchschnittslinie der Ellipsebene und der zweiten tangirenden Ebene eine zu ($R\,o$, $K'\,o'$) parallele Tangente sein müsse (denn wenn in zwei Ebenen parallele Linien liegen, muß auch deren Durchschnitt diesen Linien parallel sein). Nun ist aber N ein Punkt dieser Tangente, ihre Projektion $N\,m$ ist parallel zu $R\,o$ und in m, wo diese Projektion mit $s\,U$ sich kreuzt, hat man die Projektion des Berührungspunktes. $m\,o$ stellt den zu beiden Tangenten konjugirten Durchmesser der Ellipse dar.

Man nehme sofort in der Ellipse eine Reihe von Sehnen an, parallel zur gemeinsamen Tangente von ihr und der Parabel; $\omega\,\varphi$ ist die Horizontalprojektion einer von ihnen, deren Vertikalprojektion, wenn verzeichnet, als Parallele zu $K'\,o'$ erscheinen würde. Wird jetzt (s, s') als Auge angenommen, die Parabel als perspektivische Projektion der Ellipse, und man projicirt die genannten Sehnen gleichfalls in die Parabel, so werden sie dort als zur Tangente parallele Sehnen auftreten. Die Mitten der Ellipssehnen gehören dem Durchmesser an, dessen Projektion die Gerade $o\,m$. Wird dieser Durchmesser vom Scheitel (s, s') aus in die Parallelebene projicirt, so erkennt man alsobald $T\,U$ als den Horizontalriß der projicirenden Ebene dieses Durchmessers, welcher Riß sich in r mit dem Risse $H\,K'$ kreuzt, wonach sich ($o\,r$, $K'\,o'$) als die neue Projektion des Durchmessers zu erkennen giebt. Weil aber die Projicirende ($s\,m\,U$, $s'\,u'$) der Ebene $H\,K'\,L'$ parallel liegt, muß m durch die Projektion ins Unendliche übergegangen und folglich ($o\,r$, $K'\,o'$) parallel geworden sein zu ($s\,U$, $s'\,u'$) sowie zur Parabelachse ($i\,k$, $i'\,K'$).

Bei $G\,J''\,H$ sieht man die Parabel in wahrer Gestalt, nachdem sie durch Drehung um den Riß $H\,K'$ in die Horizontalebene niedergelegt worden. Der Scheitel (i, i') fiel dabei nach J''; die Achse ($i\,k$, $i'\,K'$) nach $J''\,k$; (o, o') kam nach O'' zu liegen, die Tangente dieses Punktes nach $R\,O''$ und die Gerade $r\,o$ nach $r\,O''$. Werden die Geraden $s\,\varphi$, $s\,\omega$ gezogen, so schneiden diese den Umfang von $G\,i\,H$ in Φ und Ω, welche Punkte durch die Umlegung der Parabel nach Φ'' und Ω'' fallen, und die Verbindungslinie dieser zwei Punkte, welche zu $R\,O''$ parallel geworden sein muß, ist in der

Umlegung der Sehne $\Omega\,\Phi$. Weil aber die Ellipssehne $\omega\,\varphi$ von dem Durchmesser $o\,m$ halbirt wird, und diese Sehne der Parabelebene parallel liegt, muß auch $O''\,r$ durch die Mitte von $\Omega''\,\Phi''$ gehen. Es möge ferner noch beachtet werden, daß m wie U durch ihre perspektivische Projektion in die Parabelebene ins Unendliche übergehen und dort zum Mittelpunkt der Kurve werden, so wird aus Allem zu entnehmen sein, daß die zur Achse $J''\,k$ parallele Gerade $O''\,r$ ein Durchmesser der Parabel sei, welcher alle zur Tangente $O''\,R$ parallelen Sehnen der Linie halbirt.

Beachte man auch, daß die zur Tangente des Punktes o, o' parallelen Sehnen der Parabel wie der Ellipse als perspektivische Projektionen solchen Sehnen des Grundkreises $G\,T\,H$ entsprechen, deren Verlängerungen durch D gehen, weil die Gerade $(s\,D, s'\,u')$ nothwendig in der projicirenden Ebene einer jeden von diesen Sehnen liegt.

Angenommen sofort, (o, o') verändere seinen Ort auf der Parabel und mit dem Punkte thue dies auch die Tangente $(R\,o, K\,o')$, so wird die Parallele zur Tangente, welche durch (s, s') geht, doch immer in der tangirenden Ebene $U\,u'\,s'$ verbleiben, also D auf der Geraden $U\,u'$ und somit U unverändert. Es zeigt sich daraus erstlich, daß jede durch U gehende Sehne des Grundkreises wie $U\,T$ sich in die Parabelebene als eine Parallele zur Achse, d. i. als ein Durchmesser der Linie projicire, zweitens daß die Kreistangente im Endpunkte T der Sehne sich als Parabeltangente projicire, welche durch den Scheitelpunkt des Durchmessers geht, sowie daß dieser Durchmesser jetzt wieder alle der Tangente parallele Sehnen halbire, zu welchem er somit konjugirt ist. Diese Parabelsehnen aber sind zu betrachten als die perspektivischen Projektionen solcher Kreissehnen, welche verlängert durch den Kreuzungspunkt D der unveränderlichen Tangente $U\,u'$ und der veränderlichen Tangente $T\,R$ gehen. Solcher Art sind die Beziehungen der Lage zwischen denjenigen zwei Systemen von Kreissehnen, welche sich in die Parabelebene als Durchmesser und ihnen konjugirte Sehnen wie Tangenten projiciren.

Jeder Durchmesser kann die Kurve nur in einem einzigen Punkte durchschneiden und ist von unendlicher Größe — von allen Durchmessern ist es nur die Achse, welche senkrecht steht auf ihren konjugirten Sehnen.

Je weiter o sich vom Scheitel der Linie entfernt, je schiefer wird der Winkel, welchen die Tangente dieses Punktes mit dem ihr konjugirten Durchmesser bildet, aber niemals kann dieser Winkel Null werden.

Von zwei supplementären Sehnen der Parabel (welche einen Punkt des Umfanges mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden) ist eine davon

stets der Achse parallel. Die zwei Tangenten an den Enden einer Sehne kreuzen sich auf dem verlängerten Durchmesser, welcher der Sehne beigeordnet ist, und der Scheitel des Durchmessers liegt in der Mitte zwischen dem Kreuzungspunkt der Tangenten, dem Schnittpunkt der Sehne und des Durchmessers. Mit andern Worten: auch in Bezug auf einen Durchmesser und dessen beigeordnete Sehnen ist die Subtangente gleich der doppelten Abscisse.

378. Es ergeben sich aus dem Bisherigen folgende lineare Konstruktionen bezüglich der Parabel, zu deren jeder der Leser eine Figur skizziren mag.

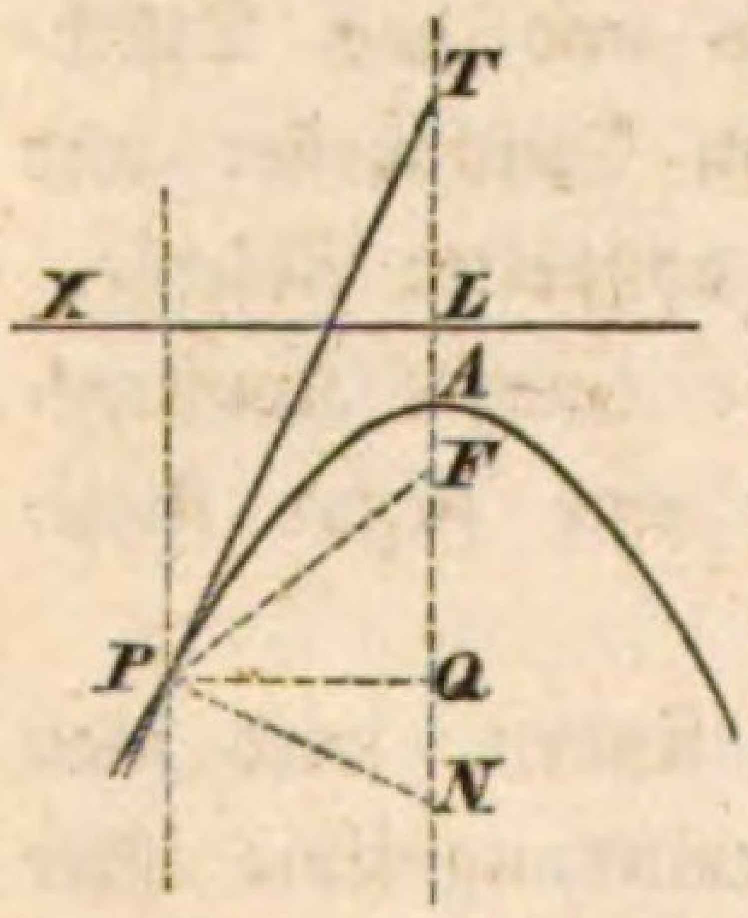
Die Achse einer punktweise gezeichneten Parabel zu finden, wird man zwei parallele Sehnen halbiren und man hat in der Verbindungslinie ihrer Mitten einen Durchmesser der Linie. Die Achse der Kurve ist jene Parallele des Durchmessers, welche eine auf ihm senkrecht stehende Sehne halbirt.

Zur Konstruktion der Tangente an einem gegebenen Punkte P der Kurve sind folgende Mittel geboten: erstlich wenn, wie in Fig. *247*, der Brennpunkt F und die Leitlinien gegeben sind, so ist die Halbirungslinie des Winkels FPQ Tangente in P; dies folgt aus dem Gesagten §. 68. — Kennt man zweitens nur einen Durchmesser der Linie, so zieht man parallel zu ihm in P den Durchmesser D dieses Punktes und in beiderseits gleichen Abständen noch zwei Parallelen mit demselben. Jene Sehne, welche die Begegnungspunkte der Parabel mit den beiden Parallelen verbindet, muß der Konstruktion zu Folge von D halbirt werden, ist also eine ihm beigeordnete Sehne und ihr parallel muß die Tangente in P sein. — Ist drittens die Achse bekannt, oder ein Durchmesser und die Richtung seiner konjugirten Sehnen, so benutzt man zur Konstruktion der Tangente die Eigenthümlichkeit der Subtangente; man zieht nämlich durch P eine Parallele zu den Sehnen, markirt den Begegnungspunkt Q der Parallelen und des Durchmessers; den Abstand des Punktes Q vom Scheitelpunkt des Durchmessers trägt man von dort aus auf den verlängerten Durchmesser, wo er bis T reichen soll; so ist QT die Subtangente und PT die verlangte Tangente.

Anmerkung. Die Eigenthümlichkeit der Subtangente leitet auch auf die punktweise Verzeichnung der Parabel, wenn die Achse AN Fig. *257* (*a*) der Scheitel A und ein Punkt P der Kurve gegeben sind. Man fälle die Senkrechte PQ und es ist AQ die Abscisse des Punktes P; man trage AQ nach AT, so ist TQ die Subtangente und TP die Tangente des Punktes P. Liegt PX parallel zur Achse, so muß die Tangente den Winkel halbiren, welchen PX und der Fahrstrahl des Punktes P unter sich

bilden; daher wiederholt man den Winkel TPX bei TPF, wodurch der Brennpunkt F abgeschnitten wird. Trägt man AF von A gegen T nach L und errichtet dort eine Senkrechte auf die Achse, so hat man die Leitlinie der Parabel, deren weitere Punkte sofort nach §. 349 „Zusatz" zu bestimmen sind.

Fig. 257 (a).



Anmerkung. Steht PN senkrecht auf der Tangente TP, so ist dies die Normale der Parabel am Punkte P. Wird NP auf die Achse nach NQ projicirt, so erscheint NQ als dasjenige, was man in der analytischen Geometrie die Subnormale der Parabel nennt. In welcher Beziehung sie zur Subtangente TQ stehe, erhellt aus einer Vergleichung der ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke NQP, TQP, welche ergeben

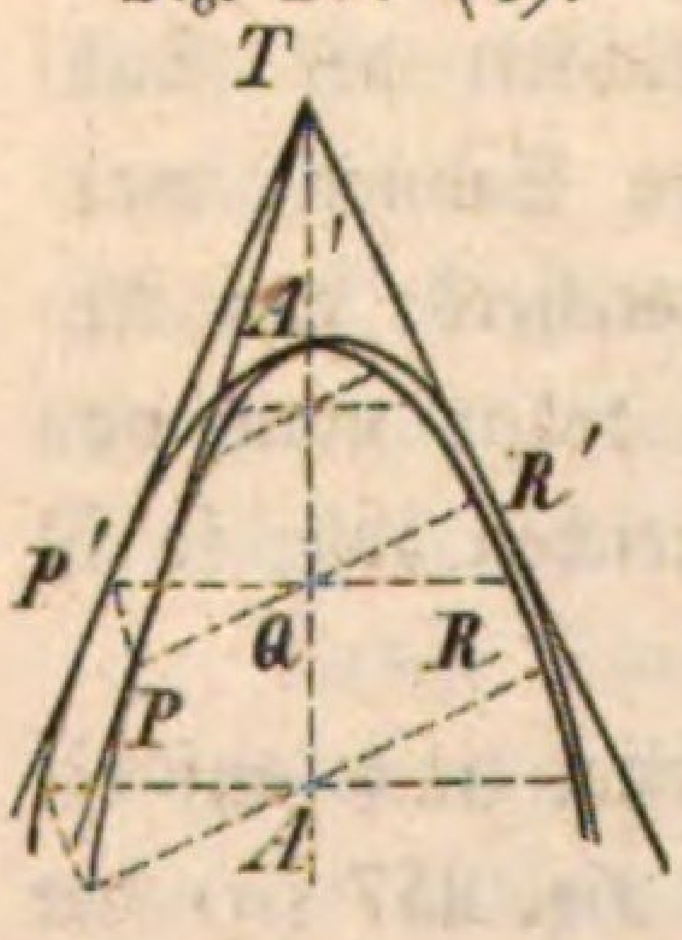
$$\mathrm{NQ : PQ = PQ : TQ = PQ : 2\,AQ},$$

$$\text{woraus } \mathrm{NO} = \frac{\overline{\mathrm{PQ}}^2}{2\,\mathrm{AQ}}.$$

Aber vermöge der Eigenthümlichkeit der Parabel ist $\overline{QP}^2 = p \times AQ$, dies in die vorige Gleichung substituirt, bringt $NP = \frac{1}{2}p$, d. h. für jeden Punkt einer Parabel ist die Subnormale gleich dem halben Parameter. Es folgt daraus $AF = \frac{1}{2}NQ$.

Andere Anmerkung. Die Konstruktion der Parabel, von welcher vorhin gesprochen worden, ließe sich auch für den Fall zur Anwendung bringen, daß Fig. 257 (b) ein Durchmesser, AA' ein Punkt P der Kurve und die Richtung PQ der diesem Durchmesser beigeordneten Sehnen gegeben wäre. Man würde $P'Q = PQ$ senkrecht auf AA' errichten, den Durchmesser als Achse betrachten und wie zuvor die Parabel $P'A'R'$ bestimmen, welche diesen Angaben entspricht. Man nimmt sodann in dieser Hilfsparabel verschiedene zu $P'Q$ parallele Sehnen an, um dieselben durch Drehung um ihre Mittelpunkte in die zu PQ parallele Lage zu bringen, wodurch entsprechende Punkte der verlangten Parabel PAR sich ergeben. Wird $A'T = A'Q$ genommen, so ist PT Tangente der verlangten und $P'T$ Tangente der Hilfsparabel; beide haben die gleiche Subtangente TQ, weil den Punkten P, P'' die gleiche Abscisse $A'Q$ entspricht. Würde man in P' die Normale der Parabel $P'A'R'$ ziehen und den Punkt, wo sie die Achse schneidet, wieder

Fig. 257 (b).



mit N bezeichnen, so wäre jedoch $P N$ weder Normale, noch $Q N$ Subnormale der Parabel $P A' R$. Denn letztere ist als eine Parallelprojektion der ersten anzusehen und die rechten Winkel sind durch die Projektion verändert worden.

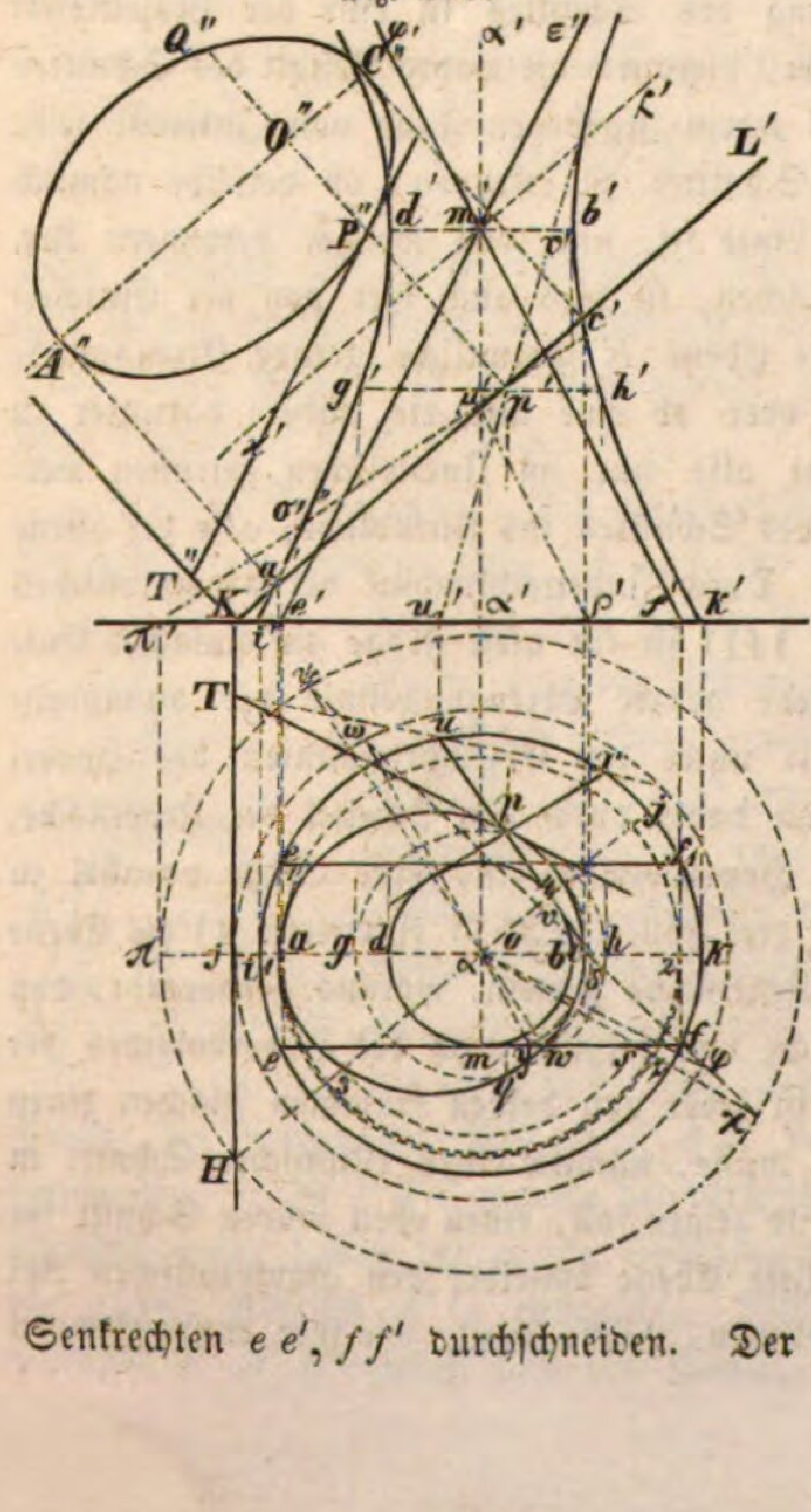
Die ebenen Schnitte des Umdrehungs-Hyperboloides.

379. Zur punktweisen Konstruktion des Schnittes bieten sich wiederum dar: die Begegnungsorte der schneidenden Ebene E und erstlich der geraden Erzeugungslinien, oder zweitens der Parallelkreise des Hyperboloides. Die Tangente an irgend einem Punkte P des Schnittes liegt im Durchschnitte der Ebene E und der tangirenden Ebene des Hyperboloides an dem Punkte P, und die Konstruktion dieser tangirenden Ebene ist in §. 118 u. f. ausführlich gelehrt worden. Eben so wenig wird uns etwas Besonderes zu sagen erübrigen in Betreff der Umlegung des Schnittes in eine der Projektionsebenen oder in parallele Lage zu ihr, hierdurch die wahre Gestalt des Schnittes zu erhalten. Dagegen wird es in jedem gegebenen Falle von Interesse sein, gleich im Voraus die Natur des Schnittes zu erkennen, ob derselbe nämlich eine geschlossene oder eine offene Linie sei, und von welcher besondern Art. Gleichwie bei allen scheitrechten Flächen, ist dies auch hier von der Entscheidung der Frage abhängig, ob die Ebene E sämmtliche gerade Erzeugungslinien des Hyperboloides schneide oder ob eine und die andere darunter zu E parallel liege, von dieser Ebene also nur im Unendlichen getroffen werden könnte, was die Ausdehnung des Schnittes ins Unendliche, also die offene Gestalt desselben bedingen würde. Durch Inbetrachtnahme der asymptotischen Kegelfläche des Hyperboloides (§. 141) ist für diese Frage ein einfaches Entscheidungsmittel gegeben. Eine jede gerade Erzeugungslinie der asymptotischen Kegelfläche hat ihre Parallele unter den Erzeugungslinien des Hyperboloides und umgekehrt. Legt man daher durch den Scheitel der Kegelfläche, welches auch der Mittelpunkt des Hyperboloides ist, eine Ebene parallel zu E, so kann wiederum nur einer der drei Fälle (§. 357) eintreten: 1) die Ebene hat lediglich den Scheitel mit der Kegelfläche gemein, woraus hervorgeht, daß keine Erzeugungslinie der Kegelfläche und folglich auch des Hyperboloides der Ebene E parallel liege, diese also in jeder von beiden krummen Flächen einen geschlossenen Schnitt hervorbringen müsse, nämlich einen elliptischen Schnitt in der Kegelfläche und, wie sich alsobald zeigen soll, einen eben solchen Schnitt im Hyperboloid. 2) Die zu E parallele Ebene schneidet den asymptotischen Kegel nach zwei geraden Erzeugungslinien, welche somit, wie ihre entsprechenden

Geraden des Hyperboloides, der Ebene E parallel liegen. Diese Ebene wird also in dem asymptotischen Kegel einen hyperbolischen Schnitt erzeugen und einen offenen Schnitt in dem Hyperboloide, von dem sich für jetzt so viel behaupten läßt, daß es vier Punkte im Unendlichen haben müsse. 3) Die zu E parallele Ebene berührt den asymptotischen Kegel nach einer seiner geraden Erzeugungslinien, welche gleich ihren entsprechenden Geraden des Hyperboloides zu E parallel liegt. Diese Ebene schneidet somit die Kegelfläche nach einer Parabel und das Hyperboloid nach einer Linie, von welcher ein Punkt im Unendlichen liegt.

Als singulärer Fall bleibt hervorzuheben, daß E durch eine gerade Erzeugungslinie des Hyperboloides gehe. Alsdann schneidet die Ebene das Hyperboloid auch nach einer zweiten Geraden und tangirt die Fläche in dem Kreuzungspunkt der zwei Geraden. Diese werden unter sich parallel sein, im Falle E zugleich den asymptotischen Kegel berührte.

Fig. 258.



380. **Beispiel.** Fig. 258 (α, $\alpha' \alpha'$) die Rotationsachse, ($e f$, $e' \varepsilon'$) eine gerade Erzeugungslinie des Hyperboloides. Sie ward angenommen in paralleler Stellung zur Hauptmeridianebene $i\,k$, und ihre Horizontalprojektion galt zugleich für die Darstellung einer Erzeugungslinie des zweiten Systemes, als deren Vertikalprojektion die Gerade $f' \varphi'$ auftritt. $e' m' \varepsilon'$ und $f' m' \varphi'$ gelten auch als die Asymptoten des Hauptmeridianes ($i\,k$, $i' g' d' \ldots k' h' b' \ldots$) (§. 107). Die Geraden $e' \varepsilon' f' g$ stellen außerdem noch die Projektionen der zwei Erzeugungslinien des asymptotischen Kegels dar, welche in der Hauptmeridianebene liegen und deshalb die Horizontalebene in $1'$ $2'$ auf den Senkrechten $e\,e'$, $f\,f'$ durchschneiden. Der Kreis vom Durchmesser $1\ a\ 2$ ist

darum die Basis dieser Kegelfläche, $H K' L'$ die schneidende Ebene. Die Parallele $\varkappa' \lambda'$ zu $K' L'$, welche durch m' gezogen worden, gilt als Vertikalprojektion einer zu $K' L'$ parallelen Ebene und giebt durch ihre Lage zu erkennen, daß auf der asymptotischen Kegelfläche wie auf dem Hyperboloid keine Erzeugungslinien vorhanden sind, welche der schneidenden Ebene parallel wären. Sonach ist der Durchschnitt des Hyperboloides und der Ebene $H K' L'$ eine geschlossene Linie $(a' c', a p c q)$, von welcher $(a' c', a c)$ vorerst als Symmetrieachse erscheint. — $(u v, u' v')$ eine gerade Erzeugungslinie des Hyperboloides; ihre Horizontalprojektion erscheint als Tangente des Kehlkreises $d m b$ und berührt denselben in v, welcher Punkt auf $d' b'$ nach v' zu projiciren ist, um die Vertikalprojektion $u' v'$ zu erhalten. Die also bestimmte Gerade durchschneidet $H K' L'$ in (p', p). In ähnlicher Weise bestimmen sich weitere Punkte der gesuchten Durchschnittslinie. Vermittelst der Parallelkreise solche Punkte festzusetzen, wird einer derselben $(g' h', g q h)$ beliebig angenommen und der Kreuzungspunkt p' von $g' h'$ und $K' L'$ herab nach p oder q projicirt.

381. Man könnte die Punkte des Schnittes verlangen, welche in einer bestimmten Meridianebene $J \alpha H$ liegen. Diese Ebene und die $H K L'$ schneiden sich nach einer Geraden $(J H, K' L')$; die Ebene und das Hyperboloid schneiden sich nach einem Meridiane und die Kreuzungspunkte von beiden Schnitten sind die verlangten. Dieselben zu erhalten, ohne zuvor die Vertikalprojektion des Meridianschnittes zu konstruiren, drehe man die Durchschnittslinie der Ebenen $J H$ und $H K L'$ um die Rotationsachse bis in die Hauptmeridianebene, wo sie nach $(\alpha \pi, \mu' \pi')$ fällt und den Hauptmeridian in σ' nebst einem zweiten Punkte rechts von $\alpha' \alpha'$ schneidet. Diese zwei Punkte bestimmen die Parallelkreise, auf denen die gesuchten Punkte liegen, und welche sich nach 3 und 4 projiciren.

Punkte in einer bestimmten Meridianebene, z. B. in $J H$, könnte man aber auch durch eine direkte Konstruktion, d. h. lediglich mit Zuhilfeziehen der Rotationsachse, nebst einer geraden Erzeugungslinie und der schneidenden Ebene, ohne Rückgriff auf einen Meridian des Hyperboloides, nach folgender Vorstellung gewinnen. $H K L'$ und die Meridianebene $J H$ schneiden sich nach einer Geraden, auf welcher die verlangten Punkte liegen, und es handelt sich darum, die Parallelkreise dieser Punkte zu finden. Denkt man sich die genannte Durchschnittslinie, sowie die gerade Erzeugungslinie, in rotirender Bewegung um die Achse geführt, so beschreibt letztere das Hyperboloid und erstere eine gerade Kegelfläche, als deren Basis der Kreis vom Halbmesser αH genommen worden. Die Kegelfläche und das Hyperboloid, weil

sie eine gemeinsame Achse haben, werden sich nach zwei Parallelkreisen durchschneiden, und diesen gehören die verlangten Punkte an. Die Kreise aber sind bestimmt, sobald nur ein Punkt eines jeden bekannt ist, und dazu genügt es, den Durchschnittspunkt der Erzeugungslinie $(f e, f' \varphi')$ und der von $(\alpha H, \mu' K)$ erzeugten Kegelfläche zu bestimmen. (α, μ') ist der Scheitel der Kegelfläche; durch denselben führe ich eine Parallele $(\mu' \varrho', \alpha \varrho)$ zu $(f e, f' \varphi')$ und lege durch beide eine Ebene, deren Horizontalriß die Gerade $f \varrho$. Die Ebene schneidet den Kegel nach den zwei geraden Erzeugungslinien, welche sich mit $(f e, f' \varphi')$ in den gesuchten Punkten kreuzen. Aber die in Rede stehenden Erzeugungslinien der Kegelfläche gehen durch die Punkte ψ und χ, wo $f \varrho$ und der Kreis $H \pi \psi$ sich kreuzen; ihre Horizontalprojektionen sind deshalb $\alpha \psi$ und $\alpha \chi$, welche Geraden auf $f e$ die Punkte s, w abschneiden. Die beiden mit αs, und αw beschriebenen Kreise markiren auf $J H$ die gesuchten Punkte 3, 4.

In gleicher Weise die Punkte (a, a'), (c, c') festzusetzen, welche der Hauptmeridianebene $i k$ angehören, lasse man $(\alpha j, \mu' K')$ als Durchschnittslinie der Ebenen $i k$ und $H K' L'$ um die Achse rotiren, eine Kegelfläche zu erzeugen, deren Basis der Kreis vom Radius αj sein wird. Man bestimme die Durchschnittspunkte dieser Kegelfläche und der Erzeugungslinie $(f e, f' \varphi')$. Nun hat eine Ebene, welche durch diese Gerade und den Scheitel (α, μ') gelegt wird, wiederum die Gerade $f \varrho$ als Horizontalriß. Diese Ebene schneidet die Kegelfläche nach zwei Geraden, deren Horizontalprojektion $\alpha \varphi$, $\alpha \omega$ sein müssen. z und y, wo $\alpha \varphi$ und $\alpha \omega$ sich mit $f e$ kreuzen, sind die Projektionen der zwei Punkte, in denen $(f e, f, \varphi')$ durch die Kegelfläche dringt. Daher endlich werden die zwei mit den Radien αz, αy beschriebenen Kreise auf $i k$ die Punkte a, c abscheiden, welche auf $K L'$ nach a', c' zu projiciren bleiben.

382. An irgend einem Punkte (p, p') der Durchschnittslinie $(a' c', a p q c)$ die Tangente zu konstruiren, beziehungsweise an diesem Punkte die tangirende Ebene des Hyperboloides festzusetzen, deren Schnitt mit $H K L'$ die verlangte Tangente ist, können zwei Wege eingeschlagen werden. Man könnte nämlich das Hyperboloid einfach als Rotationsfläche behandeln und die Ebene festsetzen, welche durch die Meridiantangente und die Parallelkreistangente des Punktes (p, p') geht. Oder zweitens, man könnte — und das scheint das Einfachere — die doppelte Erzeugung des Hyperboloides benutzen, und die zwei geraden Erzeugungslinien festsetzen, welche durch (p, p') gehen und welche zusammen die tangirende Ebene bestimmen. Diese Erzeugungslinien haben

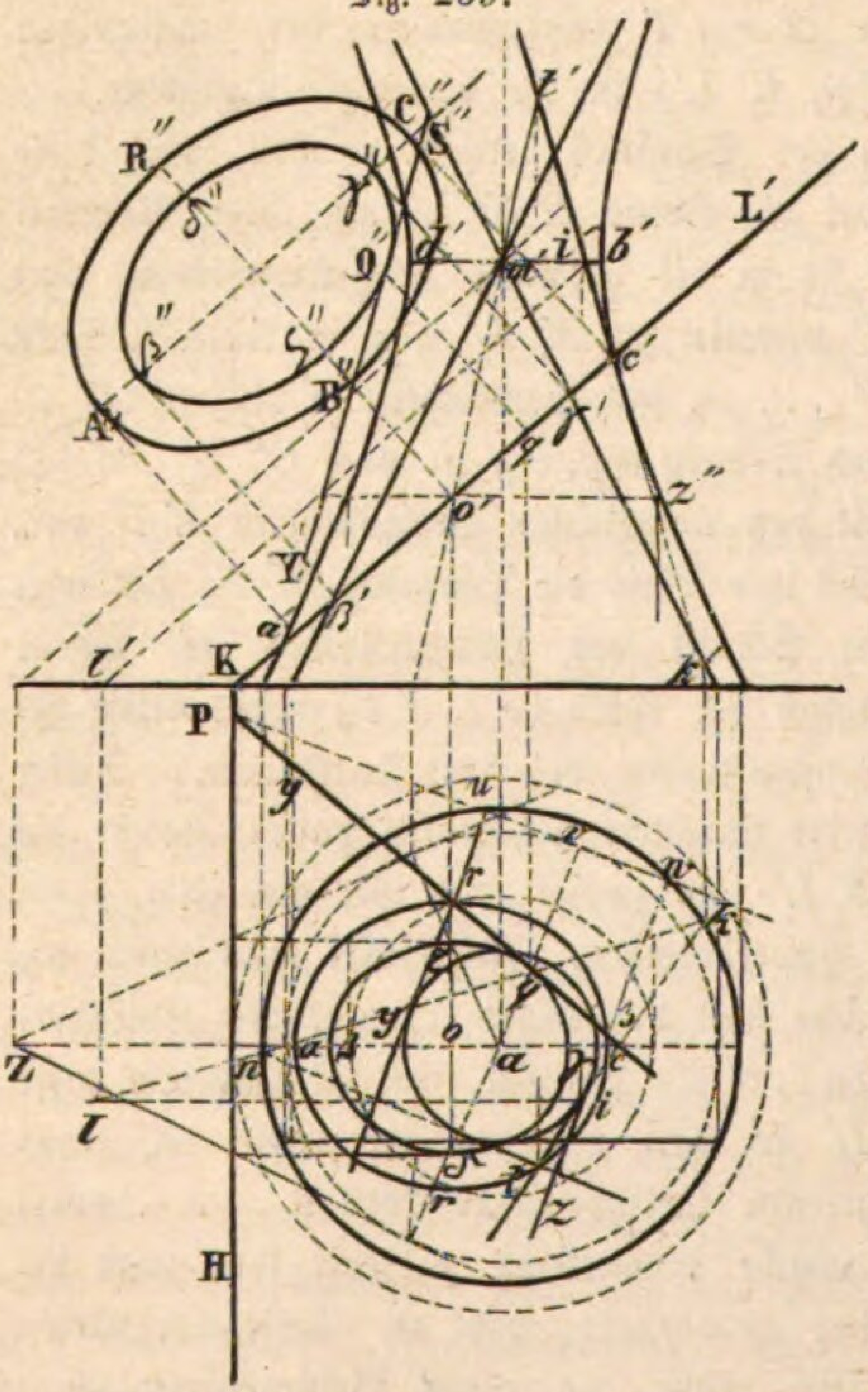
als Horizontalprojektionen die Tangenten, welche aus p an die Projektion des Kehlkreises gezogen werden können, nämlich die Geraden $p\,r, p\,u$. Diese Erzeugungslinien können die Horizontalebene nur auf dem Kreise $i\,e\,k$, also in r und u durchschneiden. Daher ist $r\,u\,T$ Horizontalriß der tangirenden Ebene am Punkte (p, p'), und $(T\,p, K'\,L')$ ist die verlangte Tangente.

Was schließlich die Umlegung des Schnittes betrifft, so sieht man diese bei $A''\,P''\,C''\,Q''$ ausgeführt, wobei die Ebene $H\,K'\,L'$ um ihren Vertikalriß als Charnier gedreht worden, sie in die vertikale Projektionsebene umzulegen. Hier fiel die Achse $A''\,C''$ parallel zu $K'\,L'$ und in einen Abstand gleich $K'\,j$. Nachdem aus $a', p', c' \ldots$ ꝛc. die Senkrechten $a'\,A'', p'\,O''$ ꝛc. gezogen waren, trug man die halben Sehnen $a\,p, o\,g$ ꝛc. nach $O''\,P''$ $O''\,Q''$ u. s. f. Die Senkrechte $K''\,T''$ stellt den umgelegten Horizontalriß $K\,H$ vor, auf welchem der Punkt T nach T'' fiel und somit die Tangente $P''\,T''$ festsetzte.

383. **Fortsetzung.** Daß der Schnitt des Hyperboloides der Ebene $H\,K'\,L'$ eine geschlossene und bezüglich der Achse $(a\,c, a'\,c')$ symmetrisch gebildete Linie sei, haben unsere Konstruktionen bis jetzt dargethan. Dieser Schnitt muß demnach zwei seiner Achse parallele Tangenten haben, welche die Durchschnitte bilden der Ebene $H\,K\,L'$ und zweier, der Geraden $(a\,c, a'\,c')$ parallelen tangirenden Ebenen des Hyperboloides. Konstruirt man daher die Berührungslinie der Umdrehungsfläche mit derjenigen tangirenden Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien zu $(a\,c, a'\,c')$ parallel sind, so schneidet diese Berührungslinie die Ebene $H\,K\,L'$ in den Berührungspunkten der fraglichen Tangenten. Aber die tangirende Cylinderfläche berührt das Hyperboloid nach einer ebenen Linie, welche symmetrisch gebildet sein muß bezüglich der Vertikalebene $i\,k$, woraus hervorgeht, daß die Vertikalprojektion dieser Linie eine gerade Linie sein müsse, zu deren Bestimmung zwei Punkte genügen, §. 298. Nun aber ist m' ein erster Punkt dieser Projektion, weil die vertikale, zu $a\,c$ parallele Ebene $e\,f$ das Hyperboloid in (m, m') berührt. Einen zweiten Punkt t' zu gewinnen, wende man sich nach Fig. *259*, welche vorerst nur als eine Wiederholung der Vorhergehenden betrachtet werden wolle; hier also t' zu erhalten, nahm man irgend eine gerade Erzeugungslinie $(k\,i, k'\,i')$ des Hyperboloides an ($i\,k$ tangirt die Projektion des Kehlkreises in i, welches sich nach i' projicirt, sowie k nach k') und legte durch einen beliebigen Punkt (i, i') auf ihr eine Parallele $(i\,l, i'\,l')$ zu $(a\,c, a'\,c')$; eine Ebene, durch die Erzeugungslinie und die Parallele gedacht, hat $k\,l$ als Horizontalriß und schneidet das Hyperboloid nach einer Erzeugungslinie des zweiten Systemes, deren Horizontalprojektion durch n

geht und den kleinsten Kreis der Fläche tangirt. Die Projektionen der beiden Erzeugungslinien kreuzen sich in t, welches nach t' projicirt wird, §. 129.

Fig. 259.



Ist somit die Gerade $t'\,m'$ als Vertikalprojektion der Berührungslinie des Hyperboloides und der tangirenden Cylinderfläche gefunden, so folgt daraus o' als Projektion der fraglichen Berührungspunkte. Damit ist auch der Parallelkreis dieser Punkte festgesetzt, woraus schließlich ihre Horizontalprojektionen r, r folgen.

Dem Schnitte des Umdrehungshyperboloides und der Ebene HKL' haben wir in Fig. 259 nach dem Schnitt derselben Ebene und des asymptotischen Kegels ($\beta\,\delta\,\gamma\,\xi$, $\beta'\,\gamma'$) beigefügt, und die Achsen sowie das Centrum (o, o') bestimmt (siehe: elliptische Schnitte der Kegelfläche). — An irgend einem Punkte des Kegelschnittes, wovon q die Projektion, verzeichnet man die Tangente ($P\,q$, $K\,c$) als den Durchschnitt der Ebene HKL' mit der tangirenden Ebene des Berührungspunktes. Diese letztere hat als Horizontalriß die Tangente des Grundkreises der Kegelfläche in dem Punkte v, nämlich die Gerade $v\,P$. Diese Gerade nun schneidet den Grundkreis des Hyperboloides in u und w und die hiermit bestimmten Parallelen $u\,y$, $w\,z$ zu $a\,q\,v$ sind die Projektionen der zwei geraden Erzeugungslinien dieser letzteren Fläche, nach welchen sie durch die tangirende Ebene $s\,v\,P$ der asymptotischen Kegelfläche geschnitten wird. Diese parallelen Erzeugungslinien treffen die Ebene HKL' und deren Schnitt des Hyperboloides in zwei Punkten, deren Projektionen r, s, und welche der Konstruktion zufolge vom Berührungspunkte ($q.\,q'$) gleich weit entfernt sind. Durch die Umlegung auf die Vertikalebene fiel der Kegelschnitt nach $\beta'\,\delta''\,\gamma''\,\zeta''$, die fragliche Tangente nach $Q''\,Y''$ und deren Begegnungspunkte mit dem hyper-

boloidischen Schnitte nach R'', S''. Wir folgern aus dem Allen, daß die Schnitte des Hyperboloides und seiner asymptotischen Kegelfläche durch eine Ebene, welche alle Erzeugungslinien beider Flächen trifft, zwei koncentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen seien; denn zwei koncentrische Kreise oder zwei solche Ellipsen, welche immer als die Projektionen der Kreise betrachtet werden dürfen, besitzen die Eigenthümlichkeit, daß sämmtliche Tangenten der innern Linie von der äußern in je zwei Punkten geschnitten werden, welche gleich weit abstehen vom Berührungspunkte. Da ferner der Kegelschnitt als Ellipse erkannt ist, muß auch der hyperboloidische Schnitt eine solche Linie sein. — (o, o') ist das gemeinsame Centrum beider Schnitte.

Alle zu KL' parallelen Schnitte der asymptotischen Kegelfläche sind ähnliche Ellipsen, weswegen auch alle solche Schnitte des Hyperboloides einander ähnlich sein müssen. Auf der Geraden $(\alpha\, o, m'\, o')$ liegen die Mittelpunkte dieser Schnitte.

Man hat $a'\,\beta' = c'\,\gamma'$ gefunden, was bekanntlich (§. 368) bei der Hyperbel stattfinden muß. Dies Ergebniß könnte auch als Argument zum Beweise dienen, daß die Meridianschnitte der windischen Umdrehungsfläche Hyperbeln seien, was in §. 118 aus allgemeineren Gründen nachgewiesen worden.

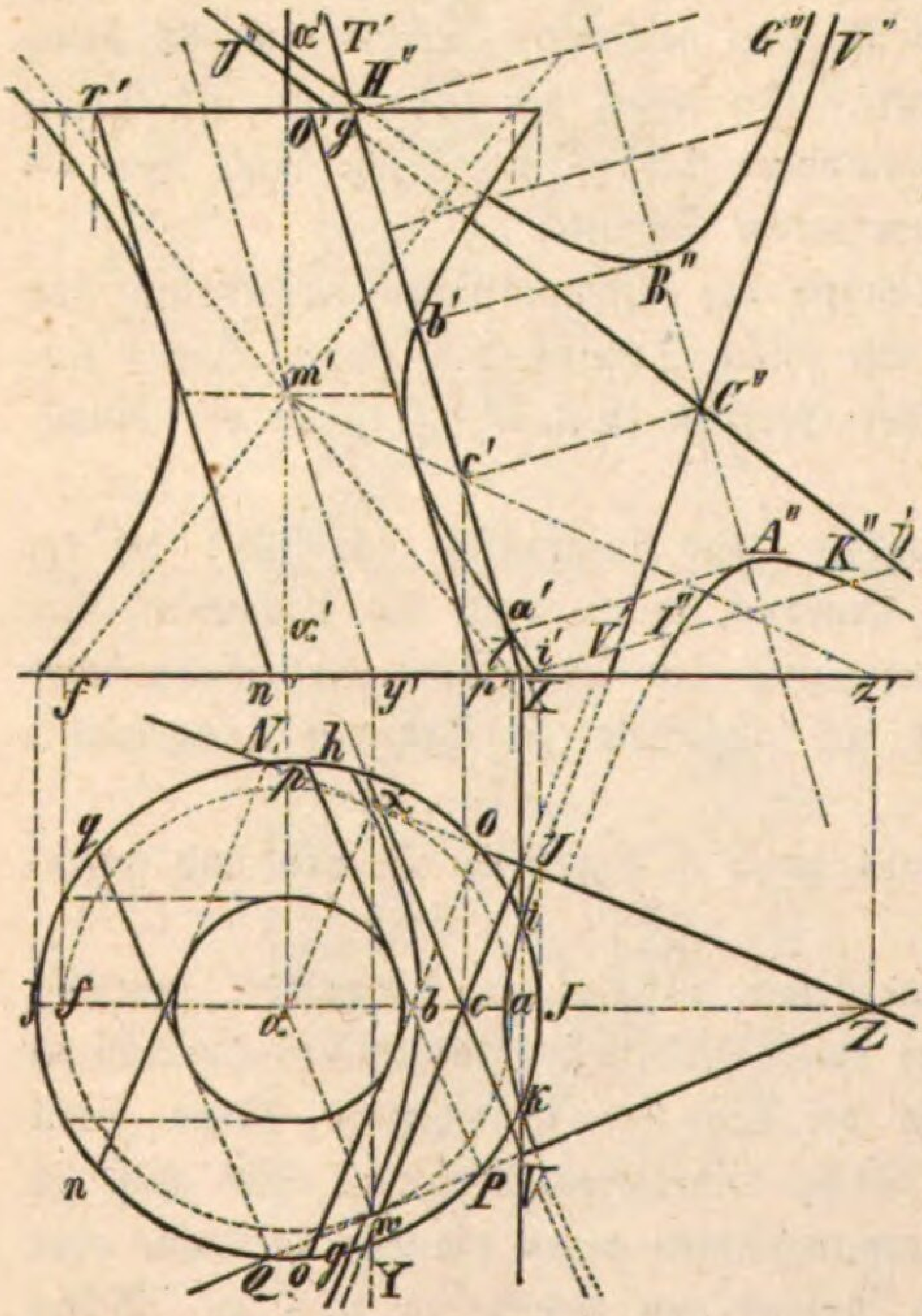
Der Durchmesser $m'\,o'$ und alle zu $a'\,c'$ parallelen Sehnen sind gegenseitig konjugirt.

384. *Fortsetzung.* Von vornherein ist wol zu vermuthen gewesen, daß die Natur der ebenen Schnitte eines windischen Umdrehungs-Hyperboloides nur abhängig sein könne von der Lage der schneidenden Ebene gegen die geraden Erzeugungslinien der Fläche, keineswegs aber von einer größeren oder minderen Neigung dieser Erzeugungslinien gegen die Rotationsachse oder von einem größeren oder kleineren Radius des Kehlkreises u. s. w. Bildet man sich nun die Vorstellung, daß die schneidende Ebene und die Rotationsachse unveränderlich bleiben, desgleichen die Neigung der Erzeugungslinien gegen die Achse oder gegen die Horizontalebene, währenddem der Radius des Kehlkreises stets abnimmt, um zuletzt Null zu werden, womit das Hyperboloid mit seiner asymptotischen Kegelfläche in Eins zusammenfällt, so ist in diesem Augenblick auch der Schnitt des Hyperboloides zum Kegelschnitt geworden, dessen Charakter ihm vorher schon zu eigen gewesen sein mußte. Das Vorhergehende führte uns zum strengen Beweise dieses Satzes für den Fall elliptischer Schnitte. Alsobald werden wir den nöthigen Nachweis beibringen, daß auch die offenen Schnitte des Hyperboloides und einer Ebene gleicher

Natur mit den entsprechenden Kegelschnitten seien, wollen aber deswegen den Fortgang unserer Konstruktionen nicht weiter unterbrechen.

385. **Der hyperbolische Schnitt des Rotations-Hyperboloides**, Fig. *260*. Die Fläche ist wie bisher bezüglich der Projektionsebenen angeordnet. $(N n,\ n' r')$ eine ihrer geraden Erzeugungslinien; αf der Radius des Grundkreises ihrer asymptotischen Kegelfläche; $f' m' l'$ deren Hauptmeridianschnitt; $(\alpha,\ m')$ ihr Scheitel oder Centrum. $V X T'$ die schneidende Ebene. $Y y' m'$ eine zu ihr parallele Ebene, durch den Scheitel der Kegelfläche gehend; sie muß die Kegelfläche nach zwei geraden Erzeugungslinien schneiden, damit $V X' T'$ einen hyperbolischen Schnitt hervorbringe. Dies ist die Grundbedingung. $\alpha\, w,\ \alpha\, x$ sind die Horizontalprojektionen dieser Erzeugungslinien. Ueber die punktweise Konstruktion dieses Schnittes, dessen Horizontalprojektion die Linie $i\, a\, k \,..\, g\, b\, h \,...$, verbleibt uns nichts weiter zu erläutern, eben so wenig bezüglich der Umlegung desselben nach $I'' A'' K'' \,..\, G'' B'' H''$ auf eine zur vertikalen Projektionsebene parallele Ebene.

Fig. *260*.

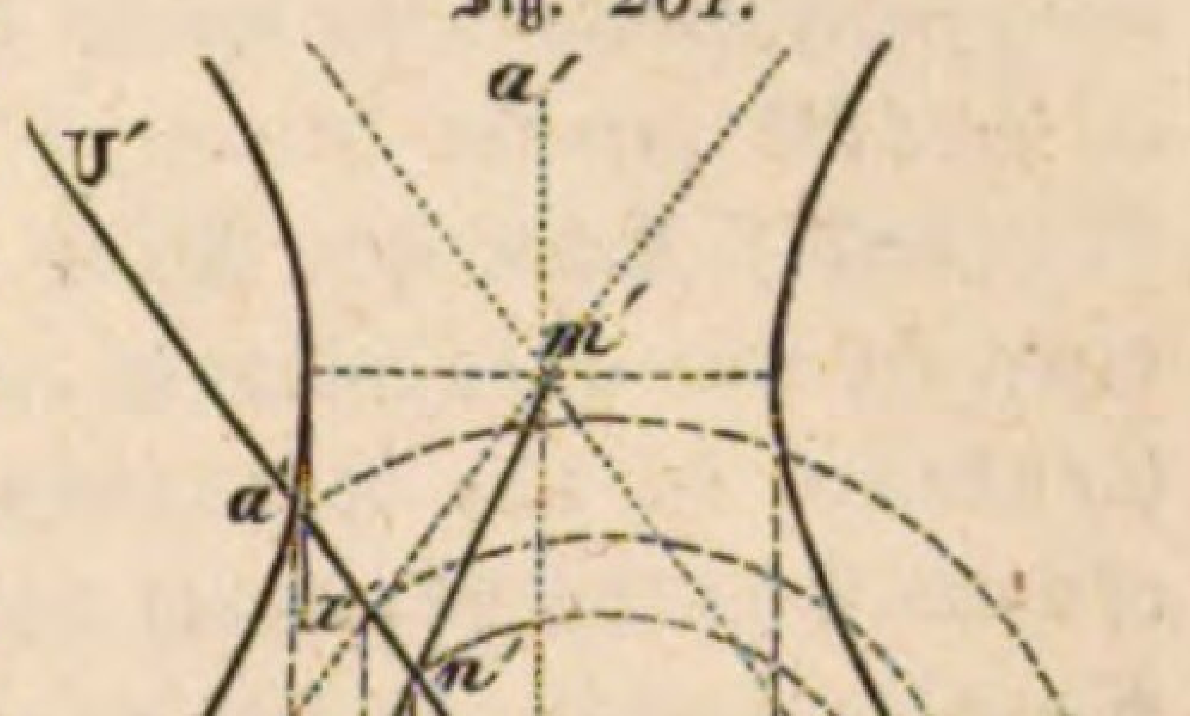


Asymptoten des Schnittes sind die Durchschnitte der Ebene $V X T'$ mit zwei von jenen tangirenden Ebenen des Hyperboloides, welche dasselbe im Unendlichen berühren, welche also auch tangirende Ebenen des asymptotischen Kegels sein müssen, und zwar diejenigen, welche ihn nach den beiden Geraden $(s\, w,\ m'\, y')$, $(s\, x,\ m'\, y')$ berühren und deren Horizontalrisse die Tangenten $w\, Z,\ x\, Z$ sind. Denn eine jede von diesen Ebenen schneidet das Hyperboloid nach zwei, unter sich und mit der bezüglichen Berührungslinie des Kegels parallelen Geraden, welche demzufolge auch der schneidenden Ebene parallel liegen und sie im Unendlichen erreichen. Der ersten tangirenden Ebene

gehören die zwei zu (αx, $m' x'$) parallelen Geraden (Pp, $p' o'$), (Qq, $n' r'$); in der zweiten liegen die zu (αx, $m' y'$) parallelen Geraden (Oo, $p' o'$) (Nn, $n' r'$). Die erste Asymptote oder der Durchschnitt der Ebene VXT' und der ersten tangirenden Ebene geht durch den Punkt V und hat als Horizontalprojektion die zu αw parallele Gerade Vc; die zweite Asymptote Uc geht durch U und ihre Projektion liegt zu αx parallel. Beide Asymptoten kreuzen sich in dem Mittelpunkte (c, c') des hyperbolischen Schnittes, welcher zugleich der Mittelpunkt des Schnittes der asymptotischen Kegelfläche und der Ebene VXT' wäre. In der Umlegung des Schnittes sind die Asymptoten nach $V'' C''$, $U'' C''$ gefallen.

386. Fig. 261. Der parabolische Schnitt des Umdrehungshyperboloides. Da die schneidende Ebene $TX'U'$ unveränderlich senkrecht stehen soll auf der vertikalen Projektionsebene, da sie ferner, einen parabolischen Schnitt des Umdrehungshyperboloides zu erzeugen, parallel stehen muß zu einer tangirenden Ebene des asymptotischen Kegels, so darf der Vertikalriß keine andere Lage haben als parallel zu einer der Asymptoten des Hauptmeridianschnittes $m' l'$ oder $m' f'$. Ersteres ist in unserer Figur der Fall. VaW ist die Horizontalprojektion des Schnittes und $VA''W$ dessen Umlegung in die Horizontalebene durch Drehung seiner Ebene um ihren Horizontalriß TX'. Dem Schnitte des Hyperboloides und der Ebene $TX'U'$ sieht man in unserer Figur noch den Schnitt derselben Ebene und der asymptotischen Kegelfläche beigefügt; er projicirt sich auf die Horizontalebene nach vxw.. und kommt durch Umlegung in dieselbe Ebene nach $vX''w$. (p, p') ist ein Punkt dieses Schnittes, welcher einer beliebigen geraden Erzeugungslinie (αO, $m' o'$) der Kegelfläche angehört. Die tangirende

Fig. 261.



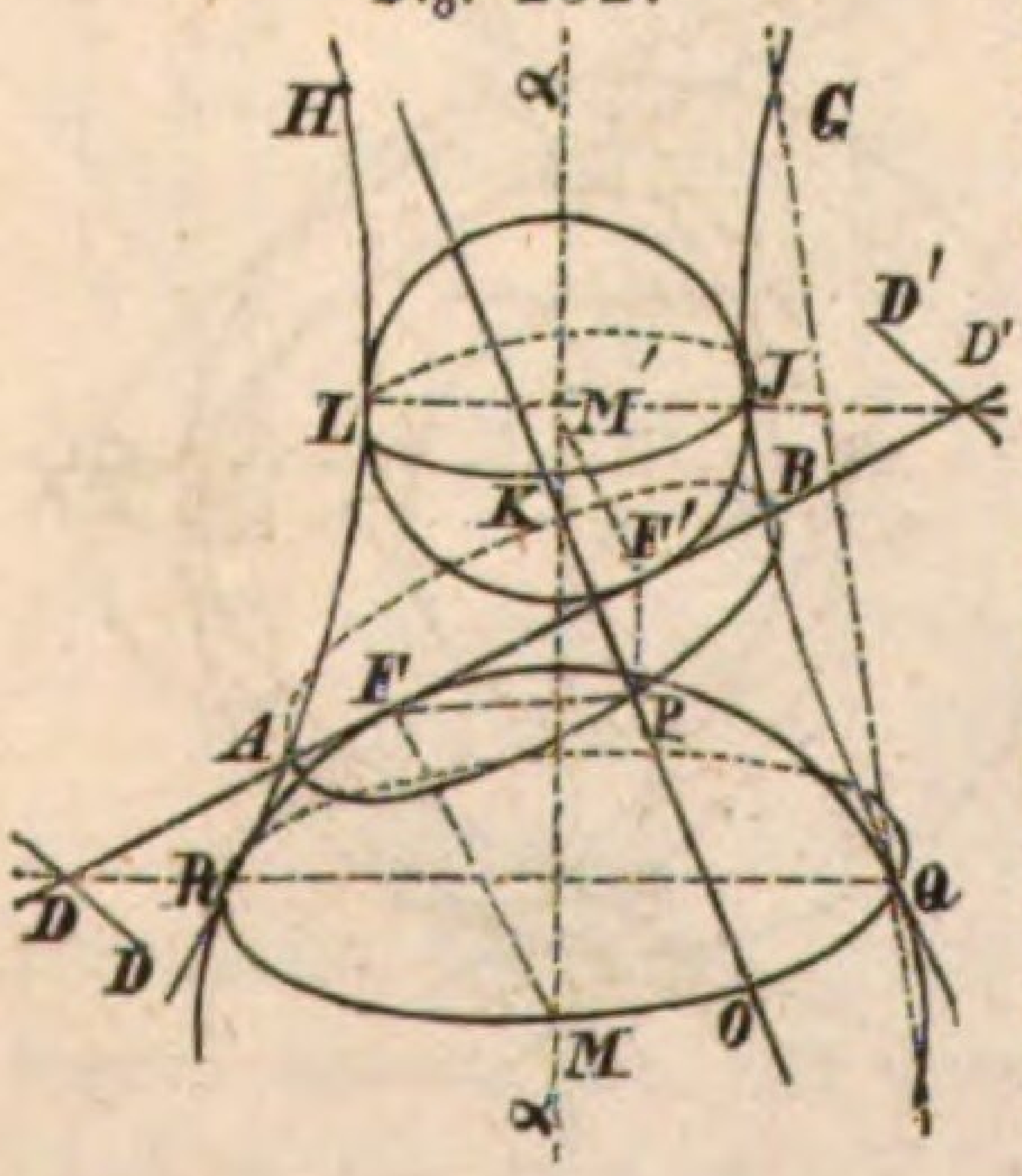
Ebene der Kegelfläche längs dieser Erzeugungslinie hat die Kreistangente OT als Horizontalriß und schneidet die Ebene $TX'U'$ nach der Tangente (Tp, $X'p'$) des parabolischen Schnittes der Kegelfläche. Diese Tangente zeigt sich in der Umlegung als die Gerade TP''. Durch die tangirende Ebene der asym-

ptotischen Kegelfläche wird das Hyperboloid nach zwei seiner geraden Erzeugungslinien geschnitten, welche der Berührungslinie ($\alpha\, O,\ m'\, o'$) parallel sind, und deren Horizontalprojektionen als die zwei durch Q, R gehenden Parallelen zu $\alpha\, O$ auftreten. Diese Geraden treffen den parabolischen Schnitt des Hyperboloides in zwei Punkten, deren Projektionen y, z sind und welche durch Umlegung nach Y'', Z'' zu liegen kommen. Weil die drei Parallelen, welche durch Q, O, R gehen, gleich entfernt unter sich sind, mußte auch $Z''\, P'' = Y''\, P''$ erhalten werden. Dies Ergebniß kann zeigen, was man sich unter koncentrisch und ähnlich liegenden Parabeln zu denken habe, denn solches müssen die Schnitte des Hyperboloides und seiner asymptotischen Kegelfläche sein, wenn die schneidende Ebene wie hier einer tangirenden Ebene der Kegelfläche parallel ist.

Wäre diese Konstruktion bezüglich des hyperbolischen Schnittes Fig. 260 ausgeführt worden, so würde das Ergebniß dem von Fig. 261 ähnlich und entsprechend gewesen sein.

387. Lehrsatz. Wird ein Umdrehungs-Hyperboloid durch eine Ebene geschnitten, und man bestimmt eine Kugel, deren Centrum in der Rotationsachse liegt, und welche die Ebene in einem Punkte berührt, das Hyperboloid aber nach einem seiner Parallelkreise, so ist jener Berührungspunkt zugleich ein Brennpunkt des Schnittes. — Die Fig. 262, welche gleichwie Fig. 244, §. 360 behandelt ist, stellt bei $R\, A\, H, \ldots Q\, B\, G$ den Hauptmeridianschnitt der Fläche dar, deren Rotationsachse $\alpha\, \alpha$ in der Zeichnungsebene liegt. Eine Ebene, welche auf der Hauptmeridianebene senkrecht steht, aber schräg gegen die Achse, schneidet diese Ebene nach einer Geraden $A\, B$, das Hyperboloid aber nach einer Ellipse $A\, P\, B$, von welcher $A\, B$ die große Achse. Man denke sich in der Hauptmeridianebene einen ersten Kreis gezeichnet, dessen Centrum M auf der Achse liegt, welcher $A\, B$ in einem Punkte F berührt und zugleich den hyperbolischen Meridian in zwei Punkten R, Q.

Fig. 262.



Desgleichen denke man sich auf der andern Seite von $A\, B$ unter gleichen Bedingungen noch einen zweiten Kreis, welcher $A\, B$ im Punkte F' berührt und den Meridian in zwei Punkten L, J, wobei begreiflicherweise die Berührungspunkte R, Q und L, J paarweise symmetrisch

gegen $\alpha\,\alpha$ liegen müssen. Durch Rotation des Meridianes und der beiden Kreise erzeugt ersterer das Hyperboloid, jeder der letzteren eine Kugel und F, F' sind die Berührungspunkte der Kugeln mit der schneidenden Ebene; sie sollen als Brennpunkte des Schnittes nachgewiesen werden. R und Q sowie L und J erzeugen bei der Rotation je einen Parallelkreis des Hyperboloides, nach welchem dasselbe auch von der betreffenden Kugel tangirt wird. Nun sei $O\,K$ eine gerade Erzeugungslinie des Hyperboloides, welche den ersten Parallelkreis in O kreuzt, den zweiten in K und den elliptischen Schnitt in P. Man ziehe die Geraden $P\,F, P\,F'$, so ist $P\,O = P\,F$ als zwei von einem Punkte P ausgehende Tangenten einer Kugel; aus demselben Grunde wird $P\,F' = P\,K$ geworden sei, also auch $P\,F + P\,F' = O\,K$. Aber für einen veränderten Punkt P hat die gerade Erzeugungslinie des Hyperboloides, so weit sie zwischen den beiden Parallelkreisen liegt, eine gleiche Länge mit $O\,K$, woraus zu schließen, daß für jeden Punkt P der Ellipse $P\,F + P\,F'$ eine beständige Größe, jene Punkte F, F' also die Brennpunkte der Linie seien.

Nach ganz ähnlicher Argumentation, wie in §. 360, wird nachzuweisen sein, daß die Ellipsebene durch die Ebenen der Parallelkreise nach den Leitlinien $D\,D, D'\,D'$ der Ellipse geschnitten werden.

Hätte $A\,B$ eine Lage wie $G\,Q$, so würde, unter gleicher Voraussetzung wie oben, ein hyperbolischer Schnitt entstehen und die beiden berührenden Kugeln lägen auf einer Seite der schneidenden Ebene. Man beweise dann nach gleichem Verfahren die unveränderliche Differenz der zwei Fahrstrahlen. — Bei einem parabolischen Schnitt müßte $A\,B$ parallel liegen zu einer der Asymptoten des Hauptmeridianes, in welchem sich alsdann nur ein einziger, ihn selbst und $A\,B$ berührender Kreis umschreiben, im Uebrigen die Beweisführung von §. 362 anwenden ließe, um den Berührungspunkt als Brennpunkt zu kennzeichnen.

Wie sich mit Hilfe dieser letzten Ergebnisse überhaupt der Beweis führen lasse, daß die ebenen Schnitte des windischen Umdrehungshyperboloides Linien zweiter Ordnung seien, liegt auf der Hand.

388. Zu einiger Umschau und mehrerem Ueberblick geben wir in den Figuren *263* bis *266* einige Darstellungen scheitrechter Umdrehungsflächen mittelst ebener Schnitte derselben. Die drei ersten zeigen parabolische und hyperbolische Schnitte des Kegels und Hyperboloides, durch Ebenen, welche einer oder der andern Projektionsebene parallel laufen. Die vierte Figur zeigt das Hyperboloid geschnitten durch Ebenen, welche sämmtlich durch jenen Diameter

Fig. 263.

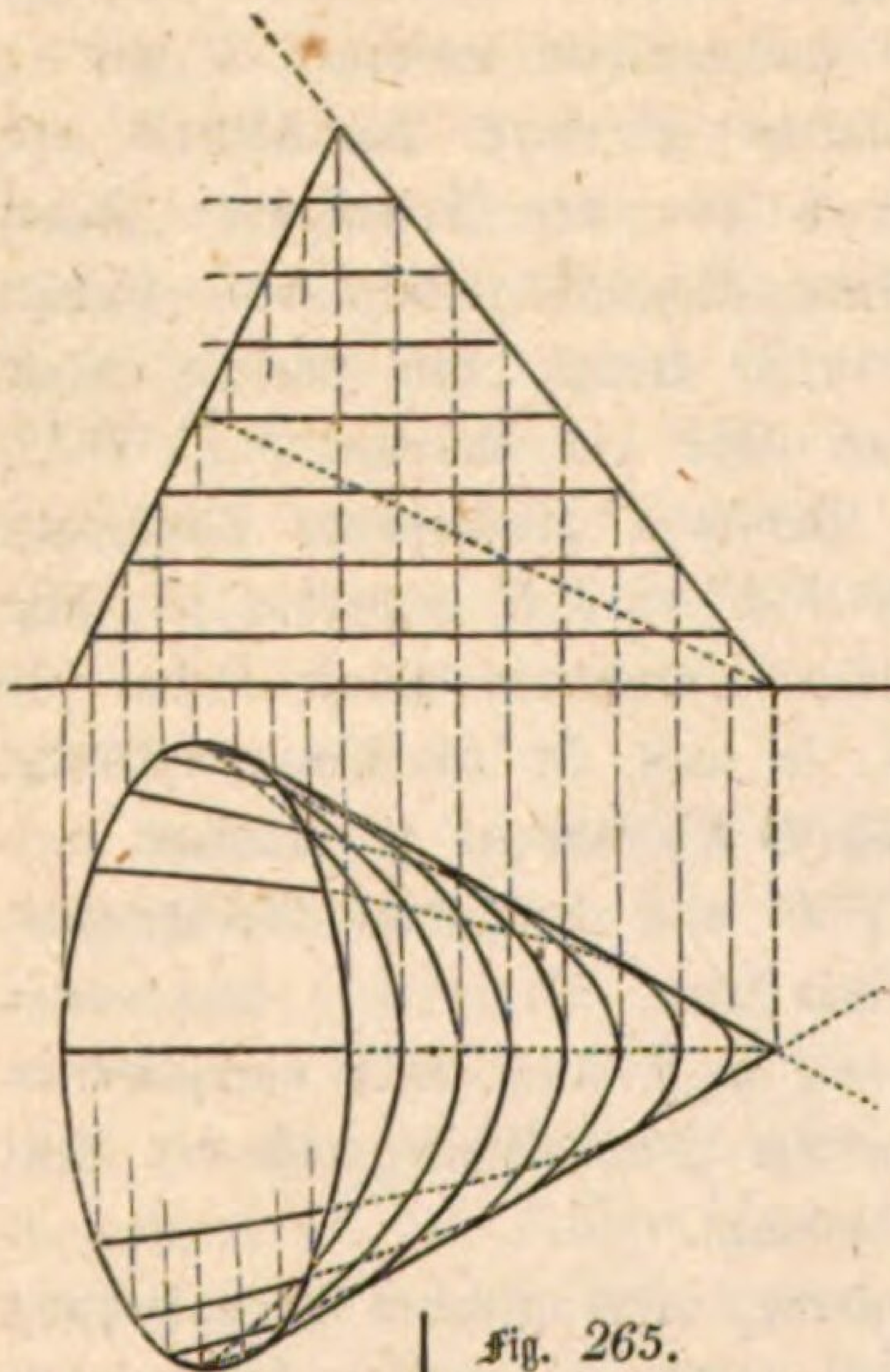


Fig. 264.

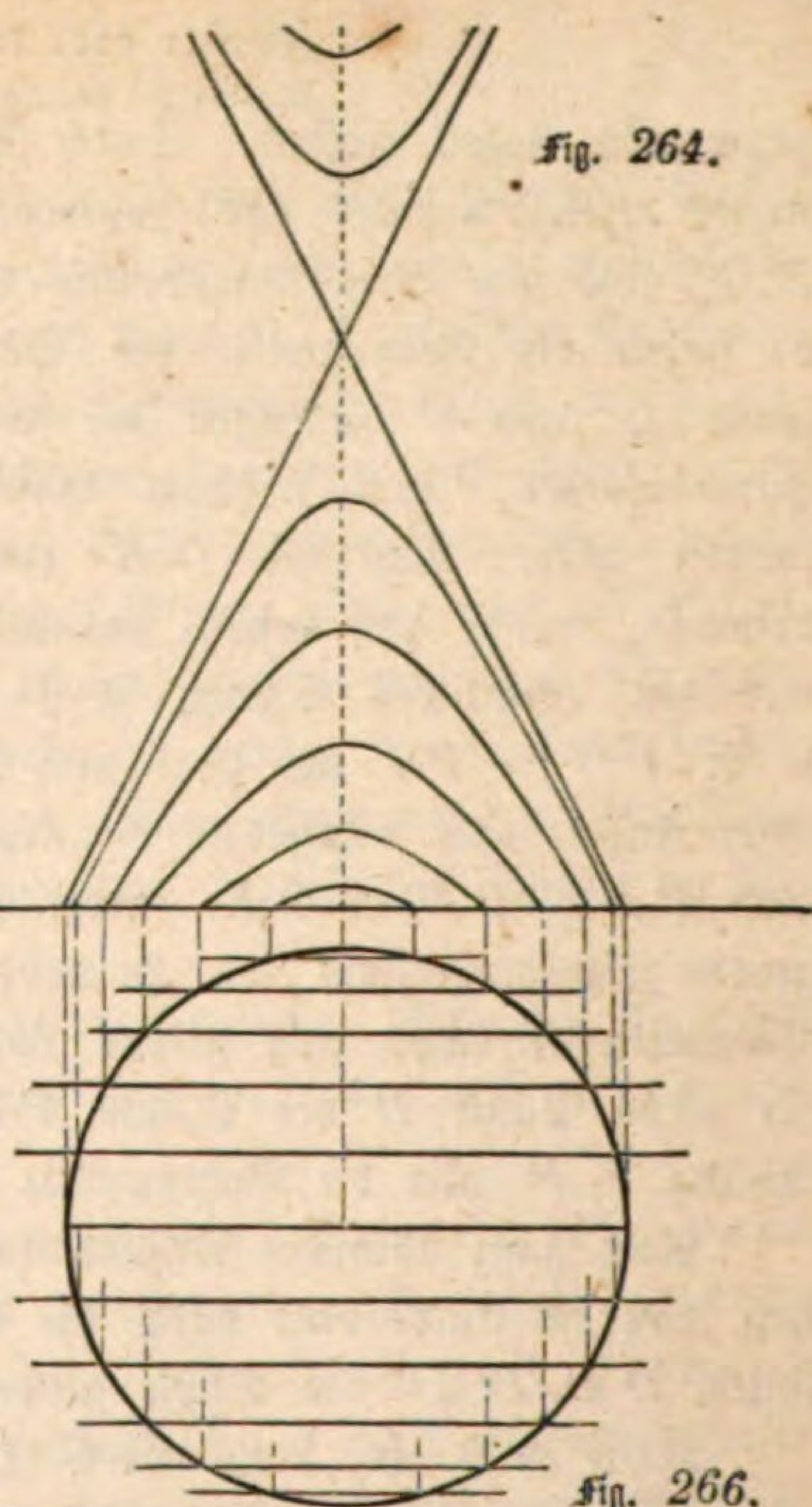


Fig. 265.

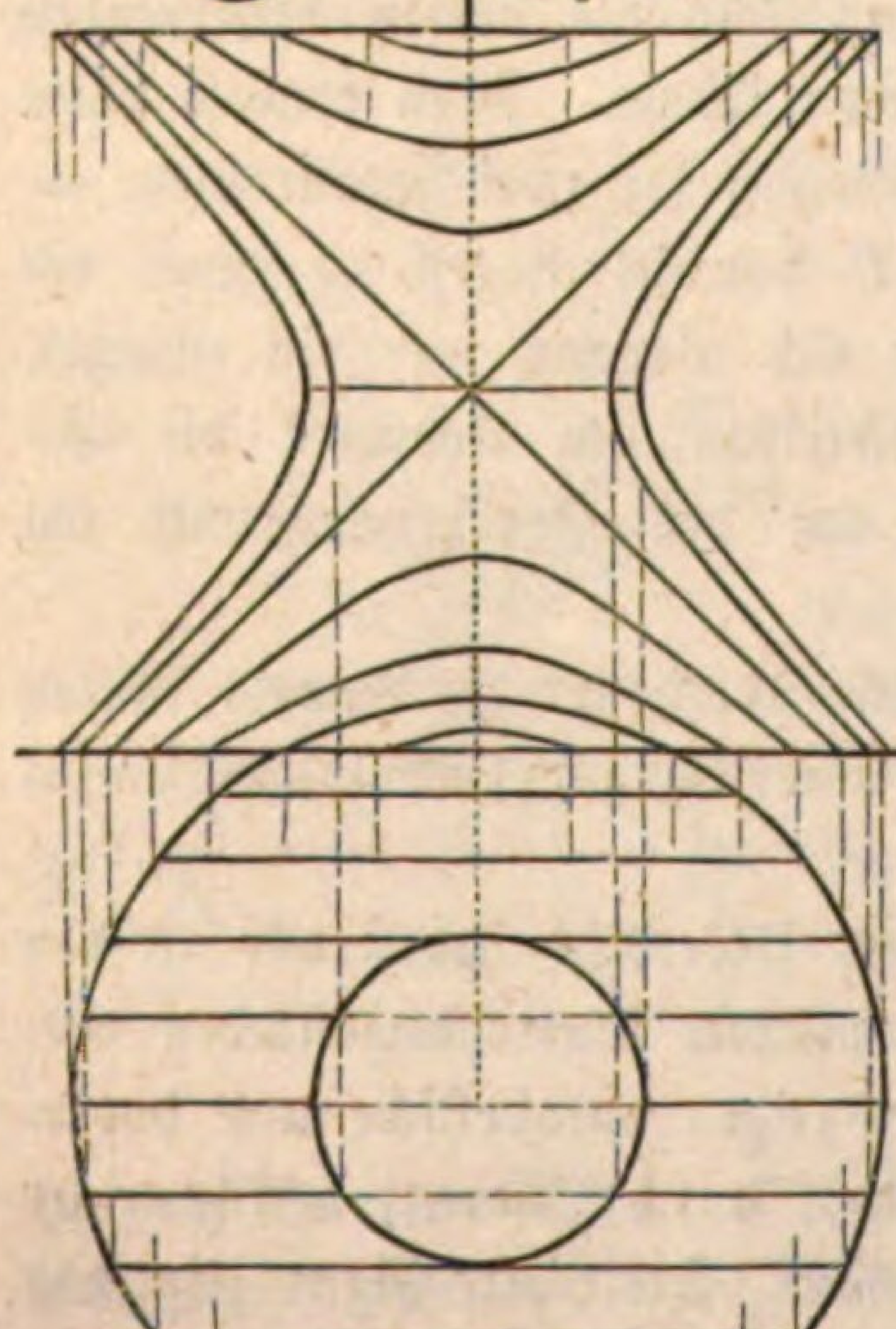
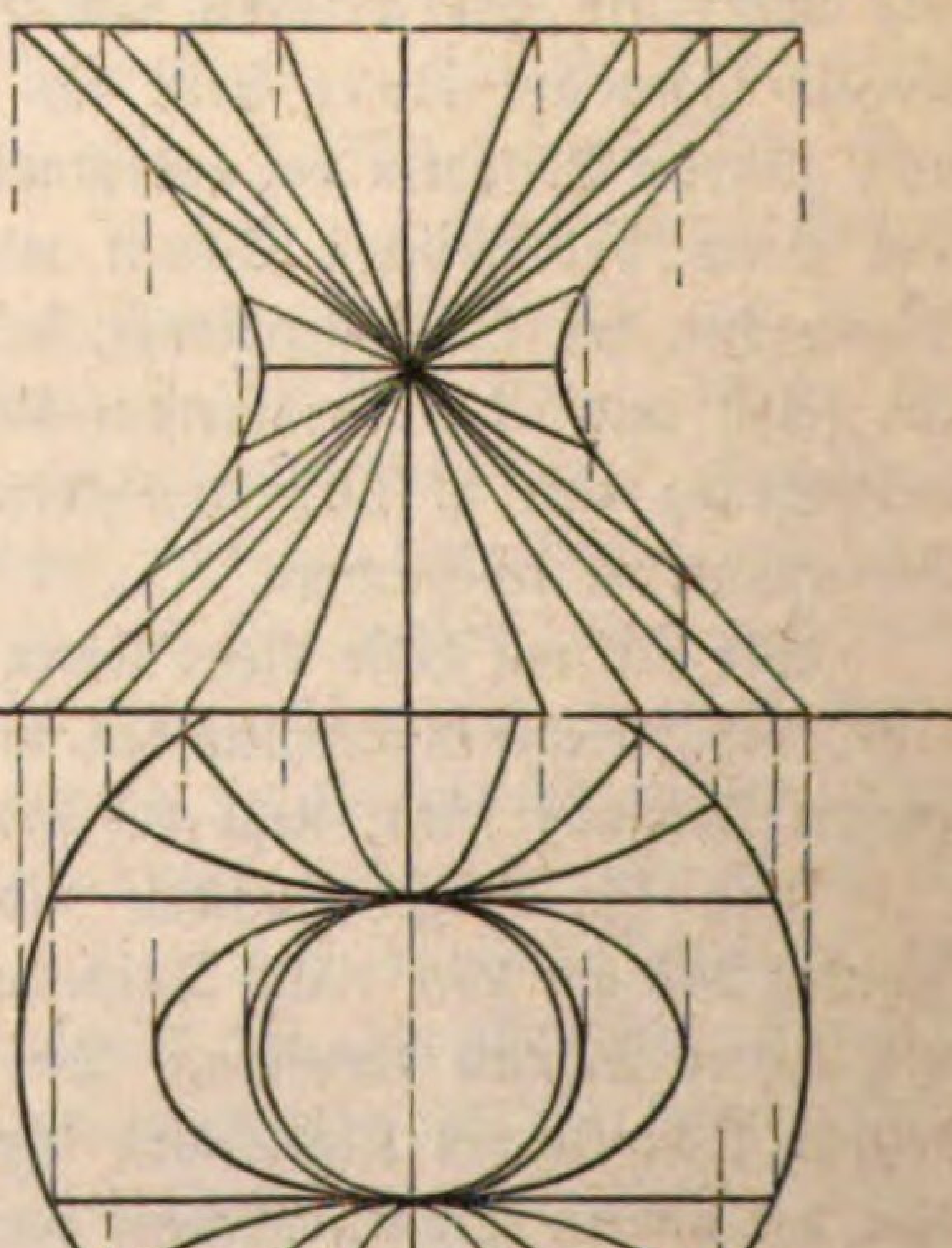


Fig. 266.



des Kehlkreises gehen, der zur Vertikalebene senkrecht steht; die Schnitte sind hyperbolisch oder elliptisch und den Uebergang von einer Art zur andern bilden die geradlinigen Schnitte des Hyperboloides durch jene zwei tangirenden Ebenen seiner asymptotischen Kegelfläche, welche auf der Vertikalebene senkrecht stehen.

Schnitte der Umdrehungsflächen im Allgemeinen.

389. Ob die Fläche ursprünglich bestimmt worden durch die Rotation eines ihrer Meridiane oder irgend einer andern Linie, immerhin ist man im Stande, beliebige Parallelkreise derselben geben oder annehmen zu können und Punkte des Schnittes zu suchen, indem man die Bewegungsorte der einzelnen Kreise und der schneidenden Ebene festsetzt.

Es sei in Fig. *267* die Linie $a'\,c'\,b'\,d'$ gegeben als Hauptmeridian einer Umdrehungsfläche, dessen Ebene CD als vertikale Projektionsebene dient.

Fig. *268*.

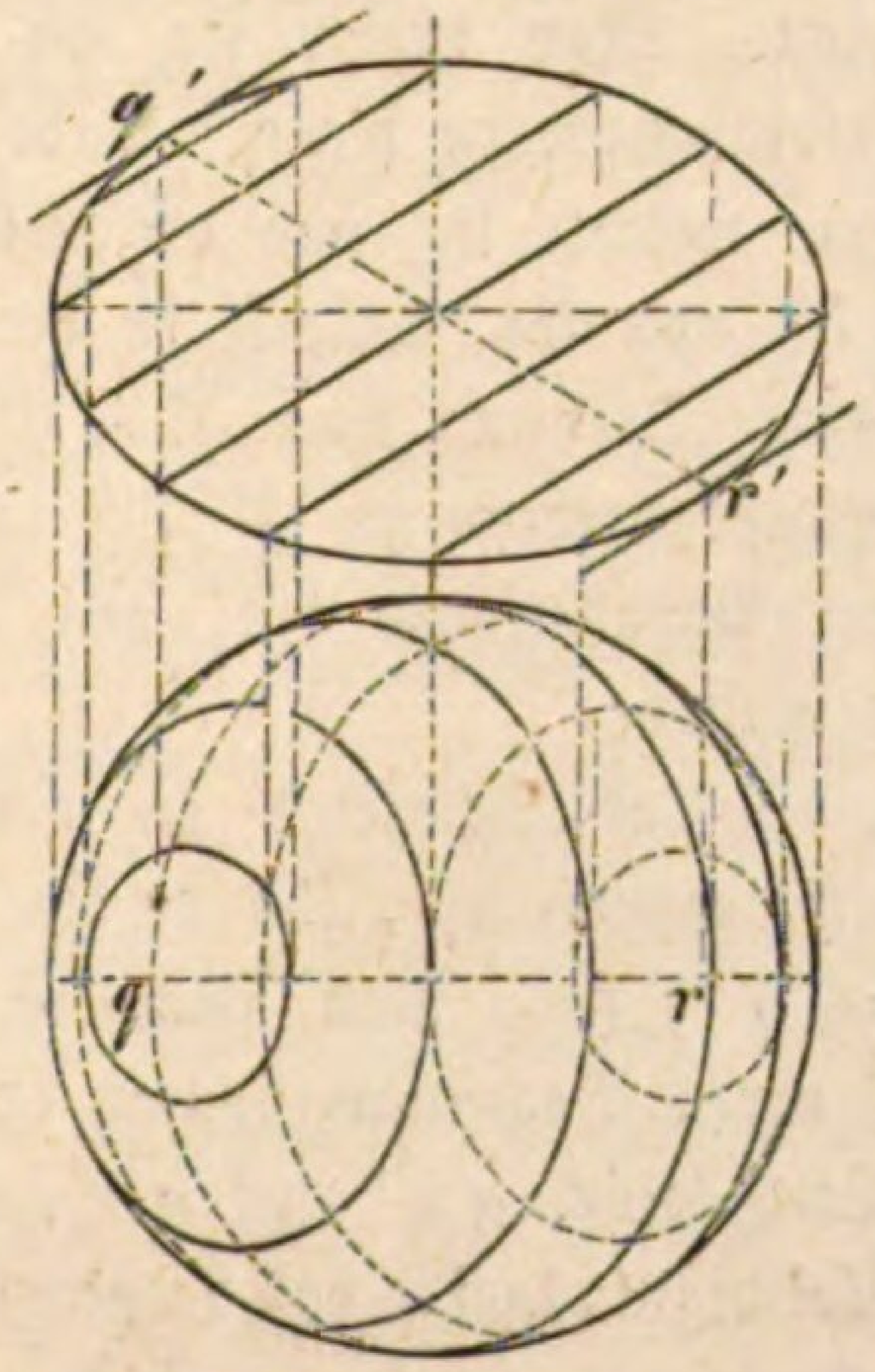
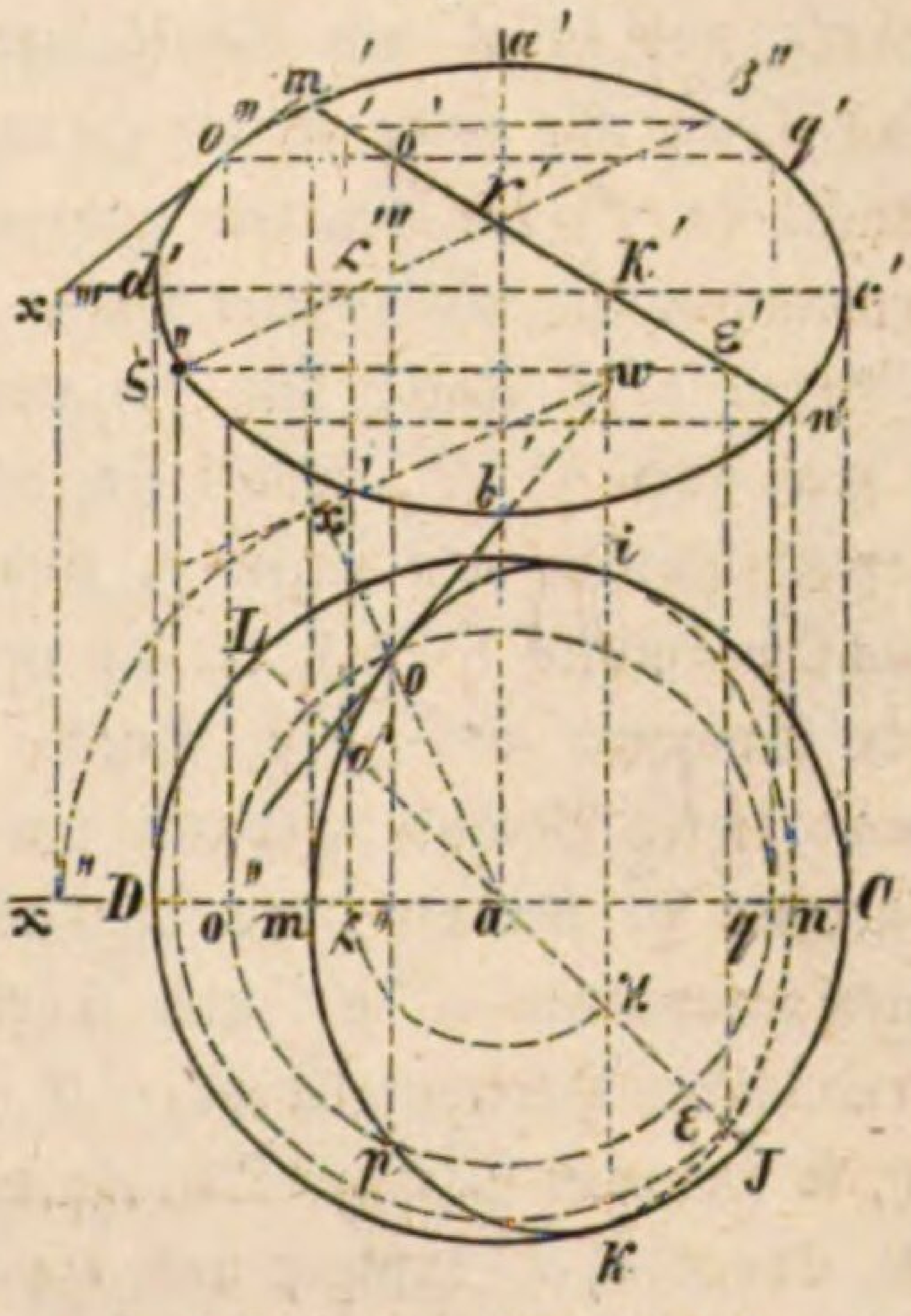


Fig. *267*.



Nun wird zwar in diesem Hauptmeridiane sogleich eine Ellipse erkannt werden, doch wolle man diesem Umstande vorerst keine andere Bedeutung beilegen, als daß $a'\,c'\,b'\,d'$ eine geschlossene, symmetrisch gegen die Rotationsachse $(a, b'\,a')$ gebildete Linie sei, und daß der ebene Schnitt der durch die Rotation genannter Linie erzeugten Fläche konstruirt werden soll. Hier wird man immer wieder die Projektionsebene so anordnen, daß eine derselben, die vertikale z. B., senkrecht steht auf der schneidenden Ebene, wobei diese letztere

durch ihre Vertikalprojektion $m' n'$ vollkommen bestimmt ist. Irgend eine Horizontalebene $o''' p'$ schneidet die Umdrehungsfläche nach einem Parallelkreise ($o''' q'$, $o p q$) und die Ebene $m' n'$ nach einer auf der Vertikalebene senkrecht stehenden Geraden (o', $o p$), durch deren beiderseitiges Begegnen zwei Punkte (o', p), (o', o) des gesuchten Schnittes ($m o i n p$, $m' n'$) sich ergeben.

Besondere Punkte finden sich auf den größten oder kleinsten Parallelkreisen der Rotationsfläche, wovon nur einer, nämlich ein größter Kreis ($d' c'$, $C i D k$), in unserer Figur vorkommt, und auf ihm die zwei Punkte (k', k), (k', i) des Schnittes, wovon die Horizontalprojektionen i, k zugleich die Berührungspunkte sind des Umrisses $C J D L$ und der Projektion $m k n o i$.

Der Hauptmeridianebene gehören die Punkte ($n' n$), ($m' m$) an. Verlangte man Punkte des Schnittes in irgend einer andern Meridianebene, in $J L$ z. B., so sind diese zu betrachten als die Begegnungspunkte des Meridianes der Ebene $J L$ mit der geraden Durchschnittslinie dieser und der schneidenden Ebene. Die gerade Durchschnittslinie aber hat $L J$ als Horizontal- und $m' n'$ als Vertikalprojektion. Man drehte sie mit sammt der Ebene $L J$, um beide in die Hauptmeridianebene zu legen. Dabei bleibt jener Punkt (α, γ') der Geraden unverändert, welcher ihr und der Rotationsachse gemeinsam ist; ein zweiter Punkt ($\varkappa' k'$) von ihr, welcher in der wagerechten Ebene $c' d'$ liegt, kam bei vollendeter Drehung nach (λ'', λ'''), die Gerade also nach $\gamma' \lambda'''$, wobei sie den Hauptmeridian in β'', ζ'' schneidet. Diese letzten Punkte nun setzen je einen der Parallelkreise fest, auf welchen die gesuchten Punkte ($\delta' \delta'$), ($\varepsilon, \varepsilon'$) liegen müssen.

Die Tangente an einem Punkte (o, o') des Schnittes zu gewinnen, drehte man diesen Berührungspunkt um die Rotationsachse, ihn in die Hauptmeridianebene zu bringen, wo er nach ($o'' o'''$) fiel; man zeichnete in o''' die Meridiantangente $o''' x'''$ und markirte deren Begegnungspunkt (x''', x'') mit irgend einer Horizontalebene $c' d'$. Wird sofort $a x''$ auf $a o$ nach $a x$ getragen, so hat man in x den Ort, wo die Meridiantangente des Punktes (o, o') durch die Ebene $c' d'$ dringt, und die Senkrechte $x w$ auf $a x$ ist der Durchschnitt der tangirenden Ebene in (o, o') mit der Horizontalebene $c' d'$. Dieselbe Ebene und $m' n'$ aber schneiden sich nach der Geraden (k', $i k$), welche sich in w mit $x w$ kreuzt, und dadurch einen zweiten Punkt für die Tangente ($w o$, $k' o'$) liefert.

Die Durchschnittslinie der Umdrehungsfläche in der Ebene $m' n'$ ist unter allen Umständen symmetrisch gebildet bezüglich der auf ihr senkrechten Meridianebene $C D$ und muß diese Ebene bei (m, m'), (n, n') rechtwinklig durch-

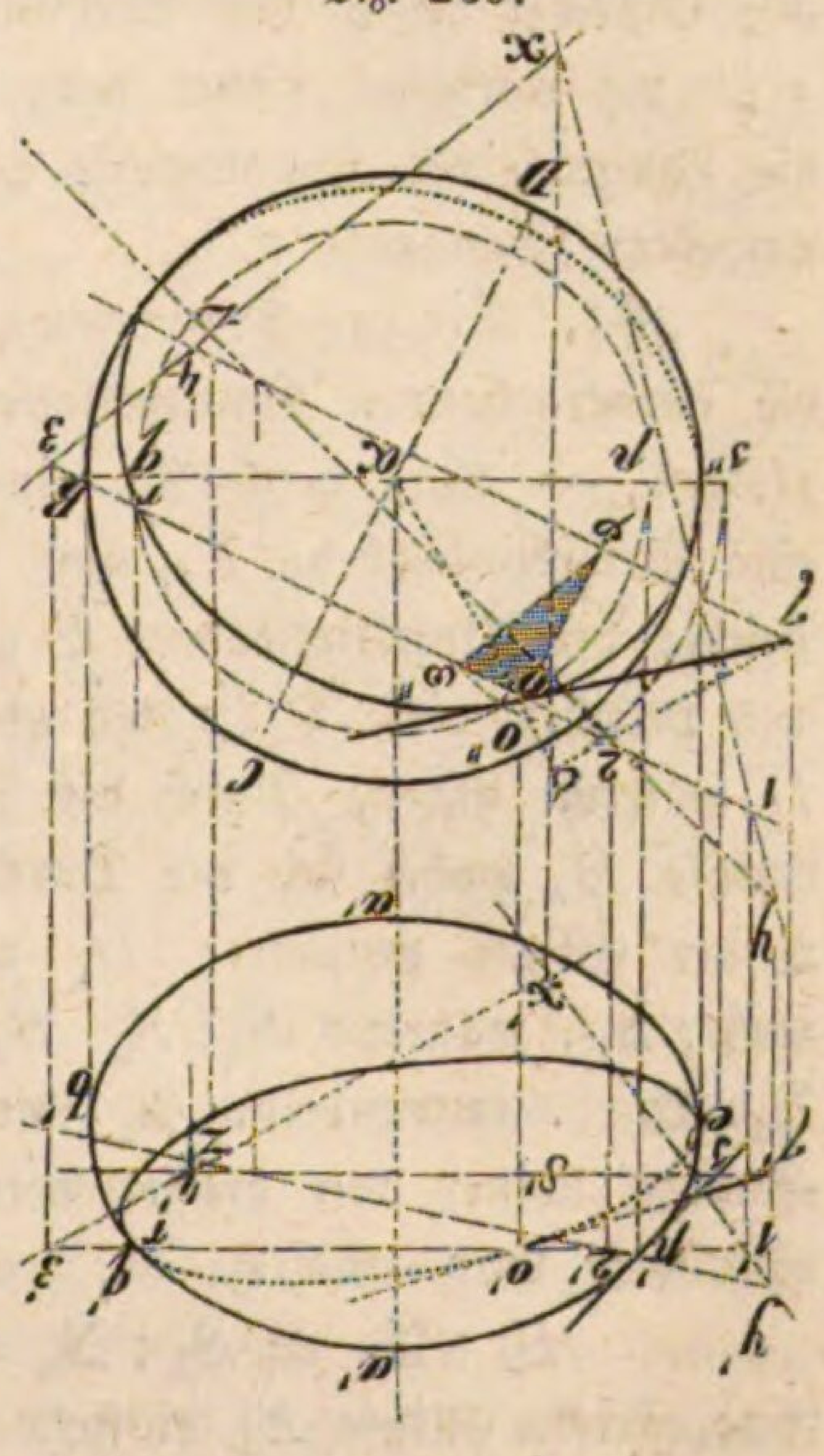
schneiden, es seien denn beide, oder einer davon, singuläre Punkte, wie in einem nächstfolgenden Beispiele.

Was die Umlegung des Schnittes anlangt, indem man seine Ebene etwa um die Gerade $(k', i\,k)$ als Charnier bis in die wagerechte Lage dreht, so werden die dahinführenden Konstruktionen einer nochmaligen Erläuterung nicht bedürfen.

In Fig. *268* haben wir dieselbe Fläche geschnitten durch eine Reihe paralleler Ebenen, welche auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehen. Die Gränzen aller schneidenden Ebenen bilden jene zwei, welche die Rotationsfläche in (r, r'), (q, q') tangiren.

390. Wie unsere seitherigen Konstruktionen der ebenen Schnitte von Rotationsflächen in dem Falle zu modificiren seien, wenn die schneidende Ebene in schräger Lage gegen beide Projektionsebenen gegeben ist, soll durch Fig. *269* nachgewiesen werden. Die Rotationsfläche ist durch ihre Achse und ihren Hauptmeridian gegeben, die schneidende Ebene durch das Dreieck $(x\,y\,z,\ x'\,y'\,z')$. Eine wagerechte Hilfsebene schneidet in $(1', 1)$, $(2', 2)$, $(3', 3)$ die Seiten des Dreieckes, dessen Ebene also nach der Geraden $(1\,3,\ 1'\,3')$; dieselbe Hilfsebene schneidet die Rotationsfläche nach dem Parallelkreise $(p'\,q',\ p\,o\,q)$, welcher sich mit $(1\,3,\ 1'\,3')$ in zwei Punkten (o, o'), (r, r') des gesuchten Durchschnittes kreuzt.

Fig. *269*.



Ein mittelst verschiedener anderer wagerechter Hilfsebenen wiederholtes gleiches Verfahren liefert die nöthige Zahl von Punkten zur Verzeichnung der Projektionen des Durchschnittes. Die auf *1 3* senkrechte Gerade $C\,\alpha\,D$ erweist sich als die Projektion derjenigen Meridianebene, welche auf der schneidenden Ebene senkrecht steht und welche die Symmetrie-Ebene des Schnittes ist. Die Punkte in ihr, an welchen die Tangenten wagerecht sein müssen, also parallel zu *1 3*, bestimmen sich in ganz entsprechender Weise, wie solches bezüglich der Punkte in der Meridianebene $L\,J$ Fig. *267* erklärt worden.

Ebenso wird es genügen, bezüglich des Verzeichnens der Tangente an irgend einem Punkte (o, o') des Schnittes nur die Reihenfolge der linearen Konstruktionen aufzuzählen. Vorerst blieb noch eine wagerechte Hilfsebene einzuführen; man legte sie durch einen Punkt $(4, 4')$ auf $(x z, x' z')$ und sie machte in der Dreiecksebene einen zu $(3 1, 3' 1')$ parallelen Schnitt $(4 \varphi, 4' \rho')$. Durch Umlegung in die Hauptmeridianebene fiel (o, o) nach (p, p'). Die Meridiantangente in (p, p') schneidet $4' \rho'$ in $(s''' s'')$; man trug $\alpha s''$ nach $\alpha o \sigma$ und errichtete hier eine Senkrechte auf αo, nämlich die Gerade $\sigma \tau$. Diese schneidet auf 4φ den Punkt τ ab, welcher nach τ' auf $4' \rho'$ projicirt wird, und $(\tau o, \tau' o')$ ist die begehrte Tangente.

Sollte die Durchschnittskurve durch Drehen um die Gerade $(4 \tau, 4 \tau')$ in wagerechte Lage gebracht werden, so fände sich der Ort O'' des umgelegten Kurvenpunktes (o, o') in folgender Weise: ein Perpendikel aus o auf 4τ schneidet in φ den Drehungsmittelpunkt von (o, o') ab; mit $o \varphi$ und $o' \rho'$ als Katheten bildet man das rechtwinklige Dreieck $\varphi o \omega''$ und trägt die Länge seiner Hypothenuse $\varphi \omega''$ nach $\varphi O''$ u. s. w. $\tau O''$ wäre die mitumgelegte Tangente u. s. f.

391. Einige Erörterungen über die Ellipsoide, veranlaßt durch die vorhergehenden Konstruktionen der ebenen Schnitte eines Rotations-Ellipsoides. — Man denke sich einen Kreis K, dessen Ebene schief steht gegen eine Projektionsebene P, und in dem Kreise erstlich einen Durchmesser D, welcher der Projektionsebene P parallel liegt, zweitens einen Durchmesser D_1 und beliebig viele Ordinaten oder halbe Sehnen $S_1, S_2, S_3 \ldots.,$ welche auf D senkrecht stehen. Durch die Parallelprojektion des Kreises K entsteht eine Ellipse E, wobei sich der Durchmesser D in gleicher Größe als Durchmesser Δ der Ellipse projicirt; D_1 aber wird ein demselben konjugirter Durchmesser Δ_1, während $S_1, S_2, S_3 \ldots$ sich in zu Δ_1 parallele Ordinaten Σ_1, $\Sigma_2, \Sigma_3 \ldots$ umwandeln. Δ_1 wird kleiner als Δ bei rechtwinkliger Projektion, es kann kleiner oder größer werden bei schräger Projektion, in allen Fällen aber wird man erhalten

$$S_1 : \Sigma_1 = S_2 : \Sigma_2 = S_3 : \Sigma_3 = \Delta : \Delta_1 = \text{konstant.}$$

Eine gleiche Ellipse E_1 entsteht aber auch dadurch, daß man alle Ordinaten des Kreises in dem Verhältniß $\Delta : \Delta_1$ proportional verändert. Obgleich hier nur eine Umwandlung in einer Ebene vorgegangen, so kann doch noch, in erweiterter Anschauung, E_1 als eine Parallelprojektion von K betrachtet werden.

Nach entsprechender Vorstellung verwandelt sich eine Kugelfläche durch Parallelprojektion in ein Umdrehungsellipsoid. In der That denke man sich

die Kugelfläche geschnitten durch zwei unter sich rechtwinklige Diametralebenen, wovon die eine horizontal, die andere aber vertikal sein mag. Es entstehen dadurch zwei größte Kreise der Kugel, ein horizontaler und ein vertikaler. Den letztern verwandle man durch Parallelprojektion in eine Ellipse E, deren horizontale Achse unverändert dem Kugeldurchmesser D gleich geblieben, während ihre vertikale Achse die Größe Δ angenommen. Durch die Rotation von E um die Achse Δ entsteht ein Umdrehungsellipsoid Υ und zwar ein längliches oder überhobenes, wenn das Verhältniß $\frac{\Delta}{D} > 1$; und es entsteht ein abgeplattetes Ellipsoid, wenn $\frac{\Delta}{D} < 1$. Denkt man sich jetzt beliebig viele zu D parallele Ordinaten oder halbe Sehnen der Kugel und eine jede nach dem konstanten Verhältniß $\frac{\Delta}{D}$ verlängert oder verkürzt, so müssen die neuen Endpunkte dieser Ordinaten wiederum der Fläche Υ angehören, weil die Stelle einer jeden umgewandelten Kugelordinate einmal von einer gleich großen Ordinate der rotirenden Ellipse E eingenommen gewesen sein mußte.

Weiter angenommen, die Kugel sei durch eine gerade Linie L in zwei Punkten O, P geschnitten worden, deren Ordinaten S_1 und S_2 seien. L wird dabei die Ebene des größten Horizontalkreises H in einem Punkte Q schneiden, welcher außerhalb der Kugel liegt, wenn O und P sich auf einerlei Seite von H befinden, während Q zwischen S_1 und S_2 liegen muß, wenn von O und P eines der oberen, das andere der unteren Kugelhälfte angehört. Durch die Projektion nimmt O auf dem Ellipsoid die Stelle Ω, und P die Stelle Π, S_1 wandelt sich um in Σ_1, und S_2 in Σ_2. Weil aber wiederum

$$\Sigma_1 : S_1 = S_2 : \Sigma_2 = \Delta : D = \text{konstant},$$

so folgt hieraus, daß Ω, Π und Q immer noch in einer geraden Linie L_1 liegen.

Das Rotationsellipsoid kann darum von einer geraden Linie nur in zwei Punkten geschnitten werden und gehört zu den krummen Flächen zweiter Ordnung oder zweiten Grades. Wolle zugleich im Auge behalten werden, daß bei der Projektionsart, wovon hier die Rede ist, gleichwie die Projektion L_1 einer geraden Linie L, welche die Projektionsebene in einem Punkte Q schneidet, diese Projektion, sage ich, wiederum eine durch Q gehende gerade Linie ist, so auch die Projektion K_1 einer ebenen Fläche K, welche die Projektionsebene nach einer Geraden G schneidet, wiederum eine

Ebene sein müsse, welche die Projektionsebene gemeinschaftlich mit K nach der Geraden G schneidet.

Dies zu Grunde gelegt, sei L irgend ein Kreis der Kugel, dessen Ebene F die Horizontalebene H nach einer Geraden G schneidet; L werde durch Parallelen zu Δ auf das Ellipsoid projicirt und zeichne dort eine krumme Linie Λ. Weil nun die projicirenden Geraden eine schiefe Cylinderfläche bilden, und weil andererseits die Kreisebene F durch die Projektion in eine andere Ebene Φ umgewandelt wird, welche immer noch durch G geht, so ist Λ die Durchschnittslinie des Ellipsoides und der Ebene Φ und zugleich eine Ellipse, weil die schiefe Projektion des Kreises L.

Die ebenen Schnitte eines Umdrehungsellipsoides sind demzufolge Ellipsen, und nur in dem Falle Kreise, wenn die schneidende Ebene rechtwinklig gegen die Achse steht. Die Sehnen des elliptischen Schnittes sind die Projektionen von solchen Sehnen des entsprechenden Kugelkreises L, welche mit diesen die Ebene H in dem gleichen Punkte Q durchschneiden. Die Tangenten des Kreises L projiciren sich in die Fläche Φ wiederum als Tangenten der Ellipse Λ.

Eine tangirende Ebene T der Kugel, deren Berührungspunkt B heißt und welche die Ebene H nach einer Geraden Γ schneidet, wird durch die Parallelprojektion zur tangirenden Ebene des Ellipsoides; ihr Berührungspunkt B_1 ist die Projektion von B und sie geht abermals durch den Schnitt Γ.

Wird die Kugel durch eine Reihe paralleler Ebenen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ nach Kreisen $L_1, L_2, L_3 \ldots$ geschnitten, so gehören deren Mittelpunkte einem Durchmesser X, an dessen Endpunkten die tangirenden Ebenen parallel zu F_1 sind, und eine der ersten Reihe zugehörige Diametralebene F halbirt alle zu X parallelen Kugelsehnen. Durch die projektive Umformung werden die Ebenen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ zu parallelen Ebenen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \ldots$, die Kreise $L_1, L_2 \ldots$ zu ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen, $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \ldots$ (als den Projektionen paralleler Kreise in parallele Ebenen), X wird zu einem Durchmesser Ξ des Ellipsoides (weil durch das gemeinsame Centrum der Kugel und des Ellipsoides gehend), welcher die Mittelpunkte der elliptischen Schnitte verbindet und an dessen Enden die tangirenden Ebenen des Ellipsoides wieder zu Φ parallel sind; endlich werden alle zu X parallelen Kugelsehnen zu Sehnen des Ellipsoides und von der Diametralebene Φ halbirt.

Allgemein also sind alle parallelen ebenen Schnitte eines Rotations-Ellipsoides ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, deren Mittelpunkte einem Durchmesser angehören, an dessen

Enden die tangirenden Ebenen parallel sind den schneidenden. Alle diesem Durchmesser parallelen Sehnen des Ellipsoides werden halbirt durch eine den schneidenden Ebenen parallele Diametralebene.

Der Durchmesser, seine parallelen Sehnen, die parallelen schneidenden und tangirenden Ebenen sind gegenseitig konjugirt. (Vergleiche die Fig. *268*.) Wird die Kugel von einer Kegelfläche k, deren Spitze s heiße, nach einem ihrer kleinen Kreise l tangirt, so liegen der Scheitel s, der Mittelpunkt m des Berührungskreises und das Centrum c der Kugel in gerader Linie. Durch die projektive Umformung wird k zum tangirenden Kegel $\varkappa$ des Ellipsoides; der Scheitel σ liegt auf der Ordinate von s, der Berührungskreis l wird zur Berührungsellipse λ, sein Mittelpunkt m zum Mittelpunkt μ dieser Ellipse und σ, μ, c liegen abermals in gerader Linie.

Allgemein also gesprochen: hat man einen ebenen, somit elliptischen Schnitt λ eines Umdrehungsellipsoides und man läßt eine Ebene der Art tangirend auf der Fläche hingleiten, daß der Berührungspunkt die Kurve λ durchläuft, so ist die Umhüllung des von der tangirenden Ebene durchlaufenen Raumes eine Kegelfläche, und umgekehrt.

Läßt man aus einem Punkte σ außerhalb eines Umdrehungs-Ellipsoides eine Ebene tangirend um die Fläche gleiten, eine tangirende Kegelfläche des Ellipsoides zu erzeugen, so ist die Berührungslinie eine ebene Kurve, also eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Scheitel des Kegels und dem Mittelpunkte der Fläche in gerader Linie liegt.

Wird die Kugel durch irgend eine Diametralebene c nach einem ihrer größten Kreise l geschnitten, und man errichtet einen Durchmesser x senkrecht auf die Kreisebene, so ist der Kreisumfang zugleich die Berührungslinie der Kugel mit einer tangirenden Cylinderfläche, deren gerade Erzeugungslinien parallel sind zu x. Verwandelt sich nun durch Parallelprojektion die Kugel in ein Rotationsellipsoid, so wird zugleich c zu einer Diametralebene des Ellipsoides, der Kreis l zur Ellipse λ von gleichem Mittelpunkt c wie das Ellipsoid, und x wird zum konjugirten Durchmesser ξ der Ellipse λ. Die tangirende Cylinderfläche der Kugel wird zur tangirenden Cylinderfläche des Ellipsoides, deren gerade Erzeugungslinien parallel sind zu ξ.

Wir begnügen uns, durch Umkehrung die allgemeine Folgerung zu ziehen:

Hat man ein Umdrehungs-Ellipsoid nebst einer geraden Linie C, und man läßt eine Ebene dergestalt tangirend um die Fläche gleiten, daß sie stets zu C parallel bleibt, so erzeugt sie eine das Ellipsoid tangirende Cylinderfläche; die Berührungslinie beider Flächen liegt in einer Ebene, welche durch das Centrum der Fläche geht, ist also eine diametrale Ellipse, und beigeordnet dem zu C parallelen Durchmesser der Fläche.

392. *Fortsetzung.* Vermittelst einer ganz ähnlichen Argumentation lassen sich von dem Umdrehungsellipsoid auf entsprechende Eigenthümlichkeiten des allgemeinen oder dreiachsigen Ellipsoides Schlüsse ableiten.

Die rotirende Ellipse E habe wie bisher immer eine vertikale Achse Δ, welche zugleich Rotationsachse war, und eine horizontale Achse D, welche bei der Rotation den größten Kreis K der Fläche beschrieb. Der auf E senkrechte Diameter dieses Kreises werde mit D_1 bezeichnet. Man gebe ihm jetzt eine Größe Θ, welche von D und Δ verschieden ist, und verwandle den Kreis K in eine Ellipse E_1, von welcher D und Θ die Achsen. Denkt man sich sofort beliebige Ordinaten $O_1, O_2, O_3 \ldots$ des Umdrehungsellipsoides, welche mit D parallel liegen, und verwandelt sie sämmtlich nach dem Verhältniß $\Theta : D$, so gehören die neuen Endpunkte der Ordinaten dem allgemeinen Ellipsoid an, von welchem Δ, D und Θ die drei unter sich senkrecht stehenden Achsen.

Hiervon ausgehend läßt sich in ähnlicher Weise wie zuvor folgern:

daß das allgemeine Ellipsoid von einer geraden Linie nur in zwei Punkten geschnitten werden könne;

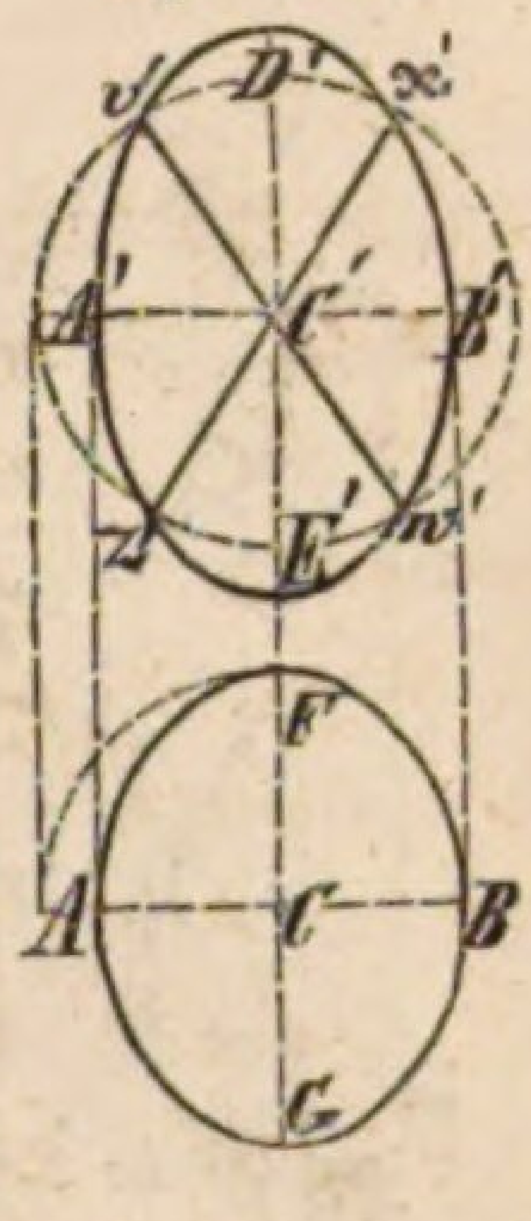
daß die Schnitte der Fläche durch parallele Ebenen ähnliche, und ähnlich liegende Ellipsen seien, deren Mittelpunkte nebst dem Mittelpunkt der Fläche einem Durchmesser derselben angehören, an dessen Enden die tangirenden Ebenen den schneidenden Ebenen parallel sind;

daß die Berührungslinien dieses Ellipsoides mit tangirenden Kegel- oder Cylinderflächen ebene Linien, also Ellipsen seien, und zwar diametrale Ellipsen bei den tangirenden Cylinderflächen, wobei der zu den geraden Ergänzungslinien dieser letztern parallele Durchmesser des Ellipsoides konjugirt ist der diametralen Berührungsellipse.

In der Horizontalebene $A' B'$ *Fig. 270* liegen zwei gegen einander senkrechte und sich gegenseitig halbirende Geraden $A B$, $F C$, welche mit der durch ihren Kreuzungspunkt (C, C') gehenden Senkrechten (C, $D' E'$) die drei Achsen eines allgemeinen Ellipsoides bilden. Die vertikale Projektionsebene

steht parallel mit $A\,B$, als der kleinsten von ihnen. Die Ellipsen über $A\,B$ und $F\,G$ als Achsen, über $A\,B$ oder $A'\,B'$ und $D'\,E'$, und drittens über $F\,G$ und $(D'\,E', C)$ sind die Hauptschnitte dieses Ellipsoides. Man hat in der Ellipse $A'\,D'\,B'\,E'$ aus C'' mit einem Radius gleich $C\,F$ einen Kreis beschrieben und seine vier Durchschnittspunkte mit der Ellipse durch die zwei Geraden $v'\,w'$, $x'\,z'$ verbunden, welche sich in C' kreuzen und symmetrisch stehen gegen die Achse $D'\,E'$. Betrachtet man diese Geraden $v'w'$, $x'\,z'$ als die Projektionen von schneidenden Ebenen, dann wird einleuchten, daß die hervorgebrachten Schnitte Kreise sein müssen oder Ellipsen von gleichen Achsen $F\,G$ und $v'\,w'$ oder $F\,G$ und $x'\,z'$. Alle zu $v'\,w'$ oder $x'\,z'$ parallelen Schnitte sind demnach wiederum Kreise. Wir schließen daraus, daß das dreiachsige Ellipsoid durch zwei Systeme paralleler Ebenen nach Kreisen geschnitten werden könne. Die zu diesen Systemen gehörigen Diametralebenen gehen durch die mittlere Achse des Ellipsoides und stehen symmetrisch gegen die Ebene der mittleren und größten Achse.

Fig. 270.



Auch hiermit schlösse der Bereich unserer Anschauungen nicht ab und es würde unschwer zu ermessen sein, wie man, durch sie geleitet, von dem ein- und doppelnetzigen Umdrehungs-Hyperboloid zu dem ein- und doppelnetzigen allgemeinen Hyperboloid mit elliptischem Querschnitt, von dem Umdrehungsparaboloid zu dem elliptischen Paraboloid, letztere stets als Parallelprojektionen der ersteren genommen, übergehen könnte, um nachzuweisen, daß diese Flächenarten

von einer geraden Linie nur in zwei Punkten geschnitten werden können, daß ihre Schnitte durch parallele Ebenen ähnliche und ähnlich liegende Linien der zweiten Ordnung seien, deren Mittelpunkt auf einem Durchmesser der Fläche liegen u. s. w.;

daß ihre Berührungskurven mit tangirenden Kegel- und Cylinderflächen ebene Linien, also Kegelschnitte seien u. s. f. Doch liegt ein näheres Eingehen auf diese Einzelheiten zu weit außerhalb des Weges, den wir uns hier vorgezeichnet und auch wohl erwogen haben.

393. Anderes Beispiel der ebenen Schnitte einer Umdrehungsfläche. Fig. 271 Schnitte einer kreisrunden Ringfläche. In der Hauptmeridianebene $M\,L$ liegt der Erzeugungskreis $i'\,k'\,l'$ und die Rotationsachse α. Eine schneidende Ebene steht senkrecht auf beiden Projektionsebenen und projicirt sich als die gerade Linie $P\,Q\,s'$, womit auch die Projektionen des Schnittes fest-

gesetzt sind. Seine wahre Gestalt durch die Umlegung nach $P\sigma'' Q o'' s'' \ldots$ zu erhalten dienten Parallelkreise, deren einer, $r''' t'$, z. B. die Ebene PQ in (γ, o') schneidet. Der Punkt kam durch die Umlegung nach o'', indem man die Ordinate $\tau' o'$ nach $\gamma o''$ trug u. s. f. Zur Verzeichnung der Tangente an

Fig. 271.

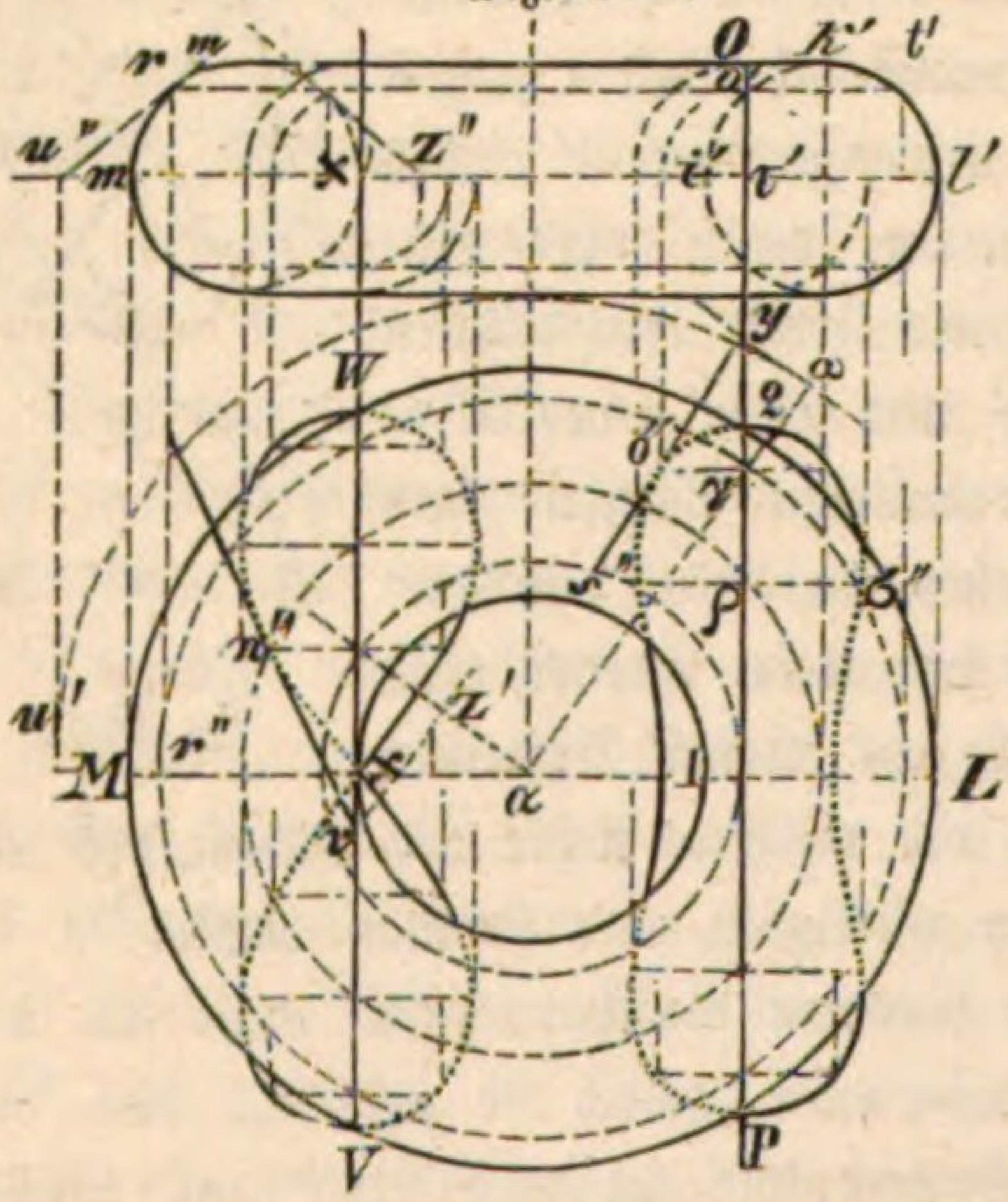
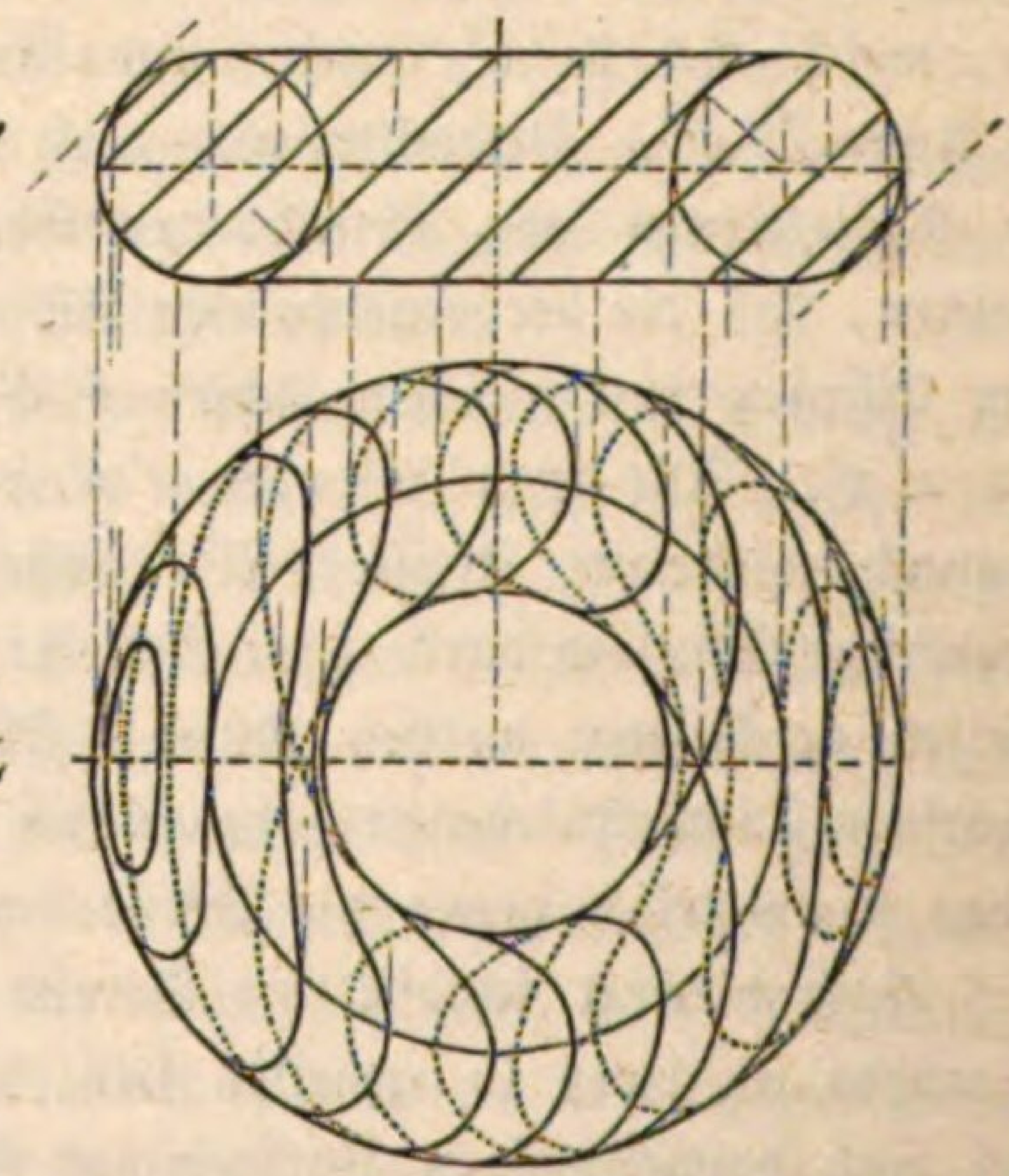


Fig. 272.



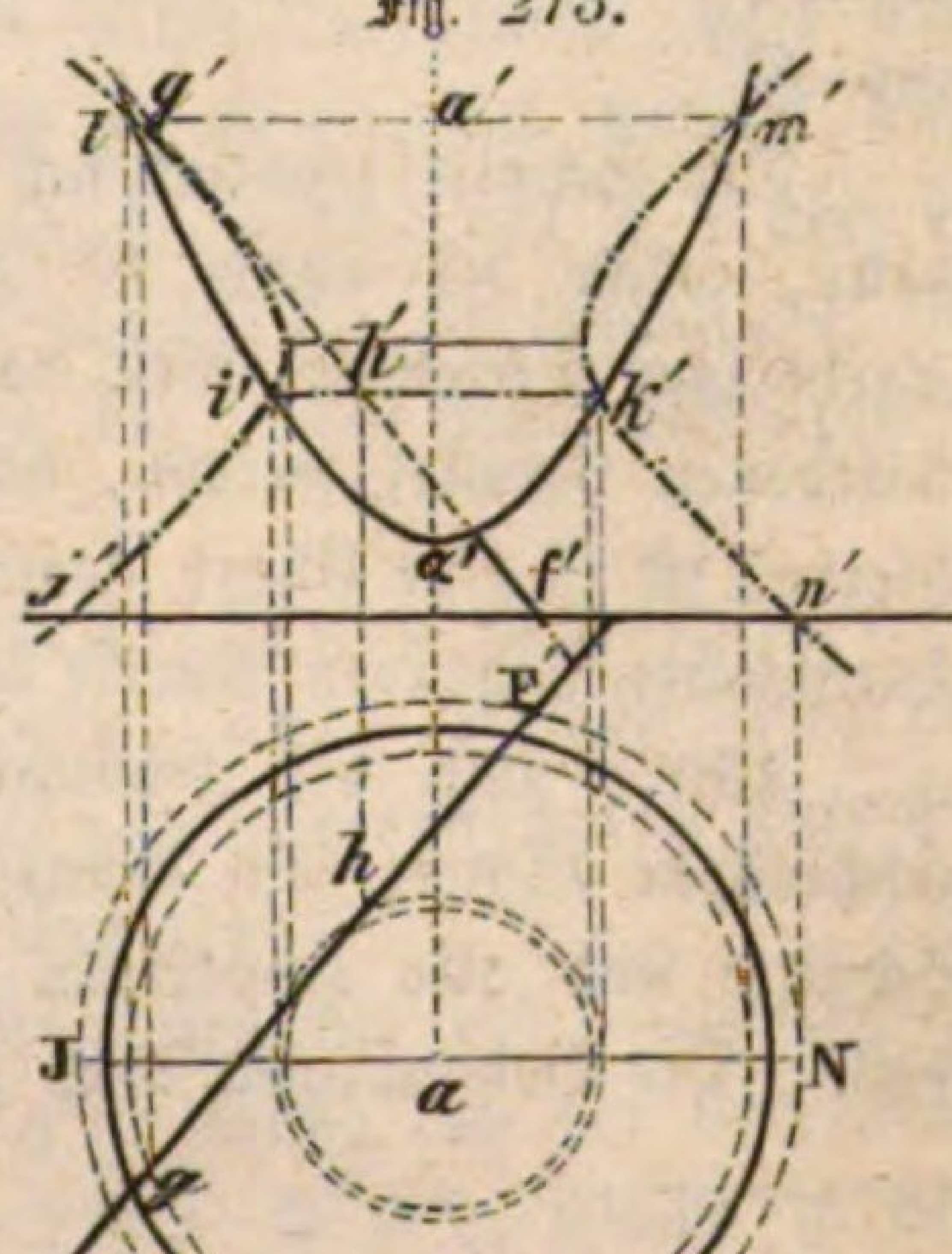
o'' brachte man den Punkt (γ, o') durch Drehung um die Rotationsachse in die Hauptmeridianebene nach (r'', r''') und arbeitete sodann buchstäblich, wie es für die Tangente $w\,o$ Fig. 267 in §. 389 angegeben worden. Die umgelegte Kurve mußte sich symmetrisch gestalten, nicht nur bezüglich der auf ihrer Ebene senkrecht stehenden Hauptmeridianebene LM, sondern auch bezüglich der Geraden PQ.

Würde die schneidende Ebene parallel zu PQ innerhalb des kleinsten Parallelkreises der Ringfläche liegen, so ergäbe sich ein Schnitt, aus zwei getrennten Aesten bestehend. Den Uebergang von einer zur andern Art bildet der Schnitt des Ringes durch eine Ebene, welche wie VW den Ring zugleich in einem Punkte (x, x') tangirt. Er besteht aus einem einzigen Aste mit einem doppelten Punkte (punctum duplex) bei (x, x'). Es ward bereits angeführt, daß diese Art von Linien „Bandschleife" (linea lemniscata) genannt wird. An einem Punkte w'' ihrer Umlegung hat man die Tangente $o\,w''$ nach gewöhnlicher Konstruktion verzeichnet. Diese Konstruktion zeigt sich jedoch für den doppelten Punkt nicht anwendbar, weil hier die schneidende wie die tangirende Ebene in Eins zusammenfallen.

In Fig. 272 zeigt sich die Ringfläche geschnitten durch eine Reihe von parallelen Ebenen, welche schief gegen die Rotationsachse und senkrecht gegen die vertikale Projektionsebene stehen. All' diese Ebenen liegen zwischen zwei ihnen parallelen tangirenden Ebenen der Ringfläche.

394. **Aufgabe.** Es sollen die Durchschnittspunkte einer geraden Linie und einer Umdrehungsfläche konstruirt werden. Im Allgemeinen ist die Lösung dieser Aufgabe dadurch ermöglicht, daß man den Schnitt konstruirt, welcher eine durch die gegebene Gerade gehende Ebene in der krummen Fläche hervorbringt. Wenn dieser Schnitt und die Gerade sich kreuzen, so geschieht dies in den gesuchten Punkten. Für die Umdrehungsflächen jedoch bietet sich ein mehr unmittelbarer Weg dar. — Durch jeden Punkt nämlich, in welchem die gerade Linie die Fläche durchdringt, geht ein Parallelkreis derselben, welcher bestimmt ist, sobald man nur einen einzigen Punkt seines Umfanges kennt. Nun setze man die Gerade in Rotation, um der Drehungsachse ein Umdrehungs-Hyperboloid zu erzeugen. Dieses und die gegebene Fläche würden sich gegenseitig nach einem oder nach einigen Parallelkreisen durchschneiden, auf welchen nothwendig die gesuchten Punkte liegen müssen. Es sei die Parabel $l'\,i'\,a'\,k'\,m'$ Fig. 273, welche als in der Hauptmeridianebene $J\,N$ liegend zu betrachten ist, die Erzeugungslinie einer Rotationsfläche, und $(F\,g,\,f'\,g')$ sei eine Gerade, deren Durchschnittspunkte $(g,\,g')$, $(h,\,h')$ mit dem entstandenen Paraboloid bestimmt werden sollen. Man konstruire (nach §. 107) den Hauptmeridianschnitt $l'\,i'\,j'\,\ldots\,m'\,k'\,n'\,\ldots$ des durch die Rotation von $(F\,g,\,f'\,g')$ hervorgebrachten Hyperboloides. Die beiden Meridiane schneiden sich in vier Punkten l', m', i', k', welche paarweise symmetrisch gegen die Achse $a'\,\alpha'$ liegen müssen. Durch jedes Paar dieser Punkte ist ein Parallelkreis festgesetzt, nach welchem Paraboloid und Hyperboloid sich schneiden, und da alle Kreise dieses letzteren die gegebene Gerade durchkreuzen, so werden auf dieser durch die genannten Kreise die Punkte $(g,\,g')$ und $(h,\,h')$ abgeschnitten.

Fig. 273.



Ebene Schnitte windischer Flächen.

Schnitte des hyperbolischen Paraboloides.

395. Zur Wiederholung. Von einer Geraden G kann das hyperbolische oder windische Paraboloid Π nur in zwei Punkten geschnitten werden. Denn durchdringt G die Fläche in einem Punkte P', so kreuzt sie sich hier mit zwei geraden Erzeugungslinien von Π; durch eine derselben, E', und durch G werde eine Ebene gedacht, so schneidet diese das Paraboloid Π noch in einer Geraden E'' des zweiten Systemes, mit welcher abermals G in einem Punkte P'' sich kreuzt. P' und P'' sind die beiden Durchschnittspunkte von G und Π, denn hätten beide noch einen dritten Punkt gemein, so läge G ganz in der Fläche Π.

Als Folgerung hieraus ergiebt sich, daß die ebenen Schnitte des Paraboloides mit einer Geraden nur zwei Punkte gemein haben können, daß diese Schnitte also Linien zweiter Ordnung oder Kegelschnitte sein müssen. Zu diesen gehört auch das System zweier geraden Linien, welche als Schnitt des Paraboloides zum Vorschein kommen, sobald, wie so eben gesagt, die schneidende Ebene H durch eine gerade Ergänzungslinie E' geht, weil sie dann die Fläche noch in einer zweiten Geraden E'' schneidet, zugleich auch zur berührenden Ebene wird in dem Kreuzungspunkt von E' und E''.

Der Schnitt reducirt sich auf eine einzige Gerade E' in dem besondern Falle, wenn die durch E' gehende Ebene H zugleich parallel ist mit der zugehörigen Leitebene, weil das vorige E'' jetzt der Durchschnittslinie beider Leitebenen parallel werden, darum aber ganz ins Unendliche übergehen muß. Hierbei ist H eine Ebene geworden, welche die Fläche Π an dem auf E' im Unendlichen liegenden Punkte tangirt, also eine asymptotische Ebene (§. 196).*)

396. Daß die krummlinigen Schnitte S des Paraboloides niemals geschlossene Linien sein können, ist bereits §. 197 dargethan worden; diese Schnitte sind also Hyperbeln oder Parabeln; das erstere ist der allgemeinere Fall. Die Behauptung wird gerechtfertigt sein durch den Nachweis, daß der

---

*) In dem Text des §. 197 Seite 273 hat sich ein Fehler eingeschlichen, welcher verbessert werden wolle, indem man Zeile 19 und 20 liest: „schneidet sie das Paraboloid nach einer seiner Erzeugungslinien, welche zwei Punkte im Unendlichen hat."

Und Seite 274 Zeile 5 werde beigefügt: aber stets liegt diese Gerade mit allen ihren Punkten im Unendlichen.

krummlinige Schnitt im Allgemeinen zwei Asymptoten habe. Nun kreuzen sich in jedem Punkte P des Schnittes S der Fläche Π und der Ebene H zwei gerade Ergänzungslinien E' und E'' der Fläche; eine Ebene T, durch E' und E'' gelegt, ist die tangirende Ebene in P und ihr Durchschnitt mit H ist die Tangente von S in demselben Punkte P. Weil aber H nicht parallel sein darf zu einer oder der andern Leitebene, indem nur in solchem Falle S ein krummliniger Schnitt sein kann, so wird H die eine Leitebene nach einer Geraden g schneiden, die andere Leitebene nach einer Geraden k und nach §. 197 wird immer eine zu g parallele Erzeugungslinie G des Paraboloides zu konstruiren sein, sowie auch eine zweite zu k parallele Erzeugungslinie K; diese beiden Geraden G, K liegen der Ebene H parallel, und die vier diesen Geraden entsprechenden Punkte des Schnittes S müssen als dem Unendlichen angehörig betrachtet werden. Wenn man durch G eine Ebene legt, parallel zur zugehörigen Leitebene, desgleichen durch k eine zweite Ebene parallel der zweiten Leitebene, so werden diese zwei asymptotischen Ebenen und die Ebene H sich nach zwei, eine mit G, die andere mit K parallelen Geraden durchschneiden, welches die Asymptoten des hyperbolischen Schnittes S sind.

Als besonderer Fall wird es zu nehmen sein, wenn die schneidende Ebene H parallel liegt der Durchschnittslinie Θ beider Leitebenen. Hier nun müssen die obigen zwei Geraden g, k gleichfalls zu Θ parallel werden und es giebt nur eine einzige Ergänzungslinie G oder K, welche mit g, k oder Θ parallel ist, und diese Ergänzungslinie ist ins Unendliche übergegangen, so daß der Schnitt S zwei Punkte im Unendlichen hat, aber keine Asymptote, wodurch er sich als Parabel kundgiebt.

Wir schließen somit: die krummlinigen ebenen Schnitte des windischen Paraboloides sind Hyperbeln, und in den Fällen Parabeln, wenn die schneidende Ebene H der gemeinsamen Durchschnittslinie Θ beider Leitebenen parallel liegt.

397. **Beispiel.** Folgendes sind die Erzeugungselemente des Paraboloides Fig. *274*, Leitlinien: 1. die Gerade $(A\,B, A')$, welche auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht steht; 2. die Gerade $(D\,F, D'\,F')$, welche in der Horizontalebene liegt; Leitebene: die vertikale Projektionsebene. Somit sind die Horizontalprojektionen der Ergänzungslinien des 1. Systemes $F\,B$, $r\,x$, $s\,y$ parallel zur Grundlinie, und die Vertikalprojektionen $F'\,A'$, $r'\,A'$, $s'\,A'$ konkurriren im Punkte A'. Jene Erzeugungslinie, deren Projektion durch C geht, den Schnittpunkt von $A\,B$ und $D\,F$, nämlich die Gerade $(C, E'\,G')$,

Fig. 274.

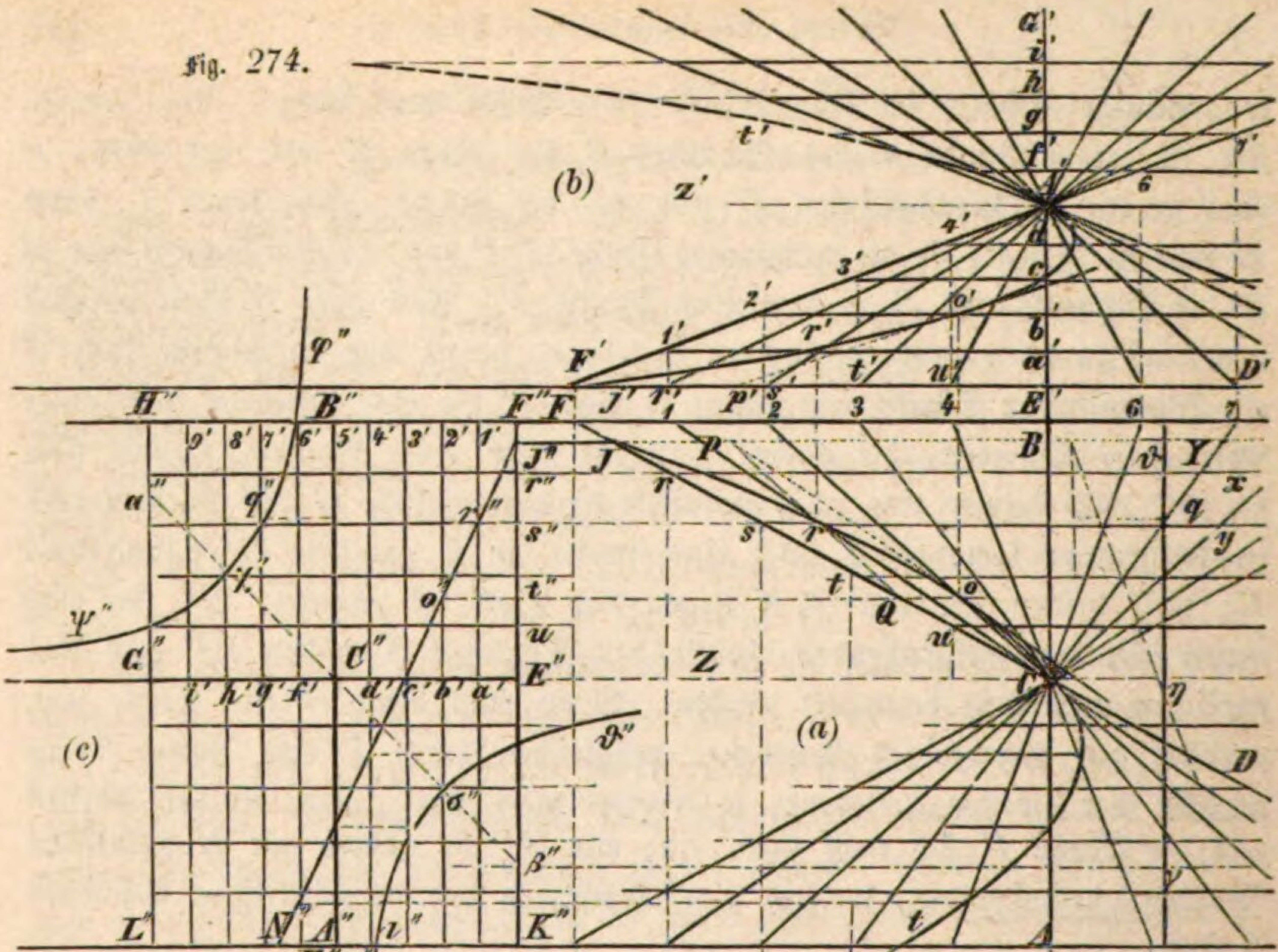
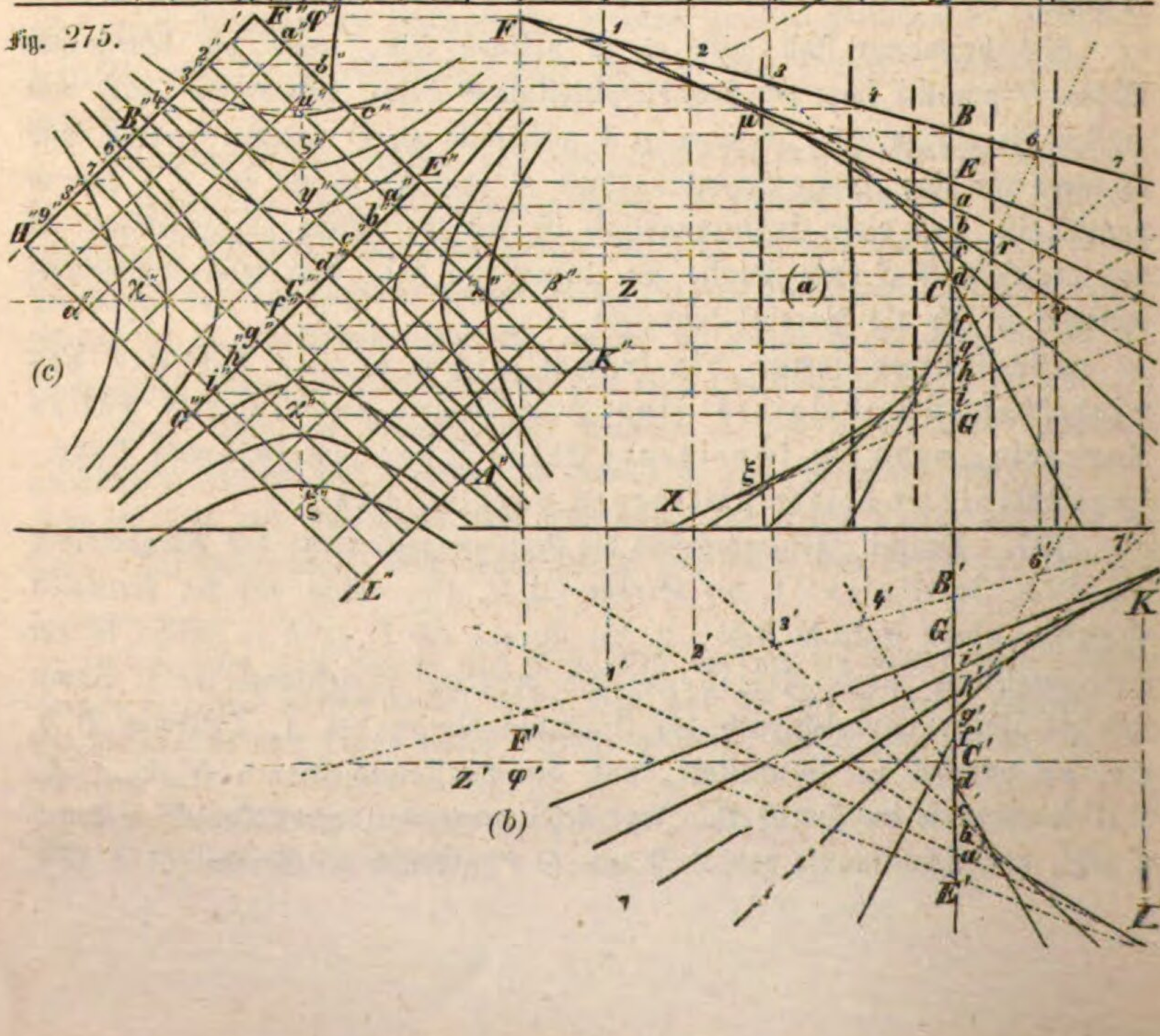


Fig. 275.



steht vertikal. Zweites Ergänzungssystem. 1. Leitebene: die horizontale Projektionsebene. 2. Leitlinien: zwei Gerade des 1. Systems; wir wählen darunter die Geraden ($F B$, $F' A'$) und (C, $E' G'$). Demzufolge sind die Vertikalprojektionen der Erzeugungslinien dieses zweiten Systemes Horizontale wie $F' E'$, $1' a'$, $2' b'$ ... und ihre Horizontalprojektionen $F C$, $1 C$, $2 C$ .... konkurriren in C. Das hierdurch dargestellte Paraboloid hat zwei unter sich rechtwinklige Leitebenen und gehört zu der Species, welche rechtwinkliges Paraboloid genannt wird. Der Durchschnittslinie beider Leitebenen, also hier der Grundlinie, ist die Achse der Fläche parallel und die Schnitte der Fläche durch Ebenen, welche zur Grundlinie ($F B$, $F' D'$) oder zur Achse der Fläche parallel liegen, sind Parabeln, alle übrigen Hyperbeln. — $J Y$ parallel zu $F B$ sei der Riß einer zu dem ersten gehörigen schneidenden Ebene. Ihr Vertikalriß müßte gleichfalls zu $F B$ parallel sein, was die auszuführenden Konstruktionen etwas vervielfältigte. Theils aus diesem Grunde und noch zu weiteren Zwecken haben wir bei (c) eine Seitenprojektion angeordnet, deren Ebene $F'' K''$ senkrecht steht auf dem Horizontalriß $F B$. $J'' N''$ ist in dieser Projektion Vertikalriß der schneidenden Ebene. $1' a'$, $2' b'$, $3' c'$ ... sind die Projektionen von Horizontalebenen in gleichen Höhen wie $1' a'$, $2' b'$ ... in der Projektion (b). Eine dieser Horizontalebenen $2' b'$ z. B. schneidet das Paraboloid nach einer Erzeugungslinie ($2' b'$, $2 C$), sie schneidet die Ebene $Y J'' N''$ nach der Waagrechten (o'', $t'' o$), welche mit der Erzeugungslinie in einem Punkte (o, o') des parabolischen Schnittes ($J r o C t$, $j' r' A' t'$) zusammentrifft u. s. w. Die Tangente ($o P$, $o' p'$) des Schnittes an einem seiner Punkte (o, o') zu erhalten, muß der Horizontalriß $Q P$ der tangirenden Ebene des Berührungspunktes bestimmt werden; dieser Riß aber ist zur Erzeugungslinie ($C o 2$, $b' 2'$) parallel, und Q ist derjenige Punkt, in welchem die Horizontalebene und zugleich die Gerade $C F$ getroffen wird von der durch (o, o') gehenden Erzeugungslinie des zweiten Systemes, deren Projektion $o Q$ zu $B F$ parallel sein muß.

398. Einen hyperbolischen Schnitt liefert die Vertikalebene $\gamma \zeta$, welche auf $F B$ senkrecht steht. Die Punkte dieses Schnittes sind durch die Projektionen der Erzeugungslinien direkt bestimmt. $\gamma \zeta$ kreuzt sich z. B. in q mit der Erzeugungslinie, deren Horizontalprojektion $7 C$ ist. Dies q projicirt sich in der Darstellung (c) nach q'' auf die Waagrechte $7' g'$. Auf diese Weise bildete sich die Projektion $\rho'' \sigma'' \vartheta'' \ldots \varphi'' \chi'' \psi''$, womit zugleich die wahre Gestalt des Schnittes ausgedrückt ist. — Eine Tangente dieses Schnittes erfordert die entsprechenden Konstruktionen, wie sie bei dem parabolischen

Schnitte angegeben worden. — Was die Asymptoten des Schnittes betrifft, so beruht deren Konstruktion in dem vorliegenden Falle auf sehr einfachen Beziehungen. Die Ebene $\gamma\,\zeta$ und die erste Leitebene, nämlich die vertikale Projektionsebene, schneiden, sich nach einer vertikalen Linie, und man erkennt sogleich die Gerade $(C, E'\,G')$ als die zu genanntem Schnitte parallele Erzeugungslinie. $\gamma\,\zeta$ und die zweite Leitebene, nämlich die Horizontalebene, schneiden sich nach einer Geraden, zu welcher die Ergänzungslinie $(A\,B, A')$ parallel liegt. Eine Ebene, durch $(C, E'\,G')$ parallel zur ersten Leitebene gelegt, schneidet die Ebene $\gamma\,\zeta$ nach der Senkrechten $(\eta, E''\,G'')$, welches die erste Asymptote ist. Eine Ebene durch $(A\,B, A')$ parallel zur zweiten Leitebene schneidet die Ebene $\gamma\,\zeta$ nach der zweiten Asymptote $(\gamma\,\zeta, A''\,B'')$; beide Asymptoten $A''\,B''$, $E''\,G''$ stehen unter sich rechtwinklig und $(\varrho''\,\sigma''\,\vartheta''\ldots\varphi''\,\chi''\,\psi''\ldots)$ ist eine gleichseitige Hyperbel. — Für parallele Schnitte zu $\gamma\,\zeta$ bleiben die Geraden $(A\,B, A')$ und $(C, E'\,G')$ unveränderlich und in der Projektion (c) bleiben $A''\,B''$, $E''\,G''$ die gemeinsamen Asymptoten all' dieser Schnitte, welches folglich ähnliche Hyperbeln sein müßten. Man wird entnehmen, daß dies Ergebniß ein allgemein giltiges und keineswegs durch die rechtwinklige Stellung der Leitebenen bedingt sei. Denn welchen Winkel diese unter sich bilden mögen, so giebt es für parallele hyperbolische Schnitte des Paraboloides nur zwei Ergänzungslinien, welche den schneidenden Ebenen parallel liegen, und zu diesen müssen in jedem Schnitte die Asymptoten parallel sein. Die parallelen hyperbolischen Schnitte eines windischen Paraboloides sind also stets ähnliche Linien.

399. *Fortsetzung.* Vermöge des Gesetzes der Stätigkeit wird zu schließen sein, daß die soeben ausgesprochene Beziehung auch unter den parallelen parabolischen Schnitten statt habe. Allein da ja zwei Parabeln überhaupt schon ähnliche Linien sind, so schließt man, daß die parallelen parabolischen Schnitte eines Paraboloides gleiche Parabeln seien. Für den einzelnen Fall läßt der Satz sich unschwer beweisen. Denn konstruirt man in unserer Figur einen oder den andern zu $J''\,N''$ parallelen Schnitt in gleicher Weise wie den Schnitt $(J\,o\,C\,t,\ j'\,o'\,A'\,t')$ und betrachtet dabei $F\,B$ z. B. als Achse und $1'\,r''$, $2'\,o''\,p$ als Ordinaten der Parabelpunkte $r, o, C,$ so wird sogleich zu erkennen sein, daß für jeden neuen Schnitt Abscissen wie Ordinaten nur eine parallele Verschiebung erhalten, die Schnitte also der Gestalt nach gleich bleiben.

Die fragliche Konstruktion des parabolischen Schnittes haben wir bereits in *Fig. 167* §. 207 auf eine praktische Aufgabe angewendet und man wird

dort, nach dem jetzt Vorgetragenen, in der Linie $J\,w\,x\,E\ldots$ eine Parabel erkennen. Ueberhaupt trägt die Konstruktion darin einen allgemeinen Charakter, daß sie, rein linear betrachtet, zur einfachen Verzeichnung einer Parabel führt.

Es sei Fig. *276* und *277* $A\,B$ ein Durchmesser, A der Scheitel desselben und $C\,B\,D$ eine zugehörige Sehne einer Parabel, von welcher weitere Punkte $P'\,P''\ldots\,P_2\,P_1\ldots$ bestimmt werden sollen. $C\,B$ und $B\,D$ sind in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt, $A\,B$ in eben so viel Theile. Beide Theilungen können nach rechts und links sowie abwärts fortgesetzt werden. Man zieht $C\,1$, $C\,2\ldots D\,1'\ldots$ und durch $a, b, d\ldots$ Parallelen zu $A\,B$; die Kreuzungspunkte $P', P''\ldots$ beider Systeme von Konstruktionslinien sind die gesuchten. In der That betrachtet man die Geraden $C\,1\,P^1$, $C\,2\,P''\ldots$ ꝛc. als Projektionen von Erzeugungslinien eines Paraboloides, wie $C\,F$, $C\,1$, $C\,2$ in Fig. *274* und die Parallelen $a\,P'$, $b\,P''\ldots$ ꝛc. als die Projektionen horizontaler Linien einer das Paraboloid schneidenden und zur Achse parallelen Ebene, wie $Y\,J''\,N''$, so ist $D\,P'\,P''\ldots$ die Projektion des Schnittes, nämlich eine Parabel.

Fig. *276*.

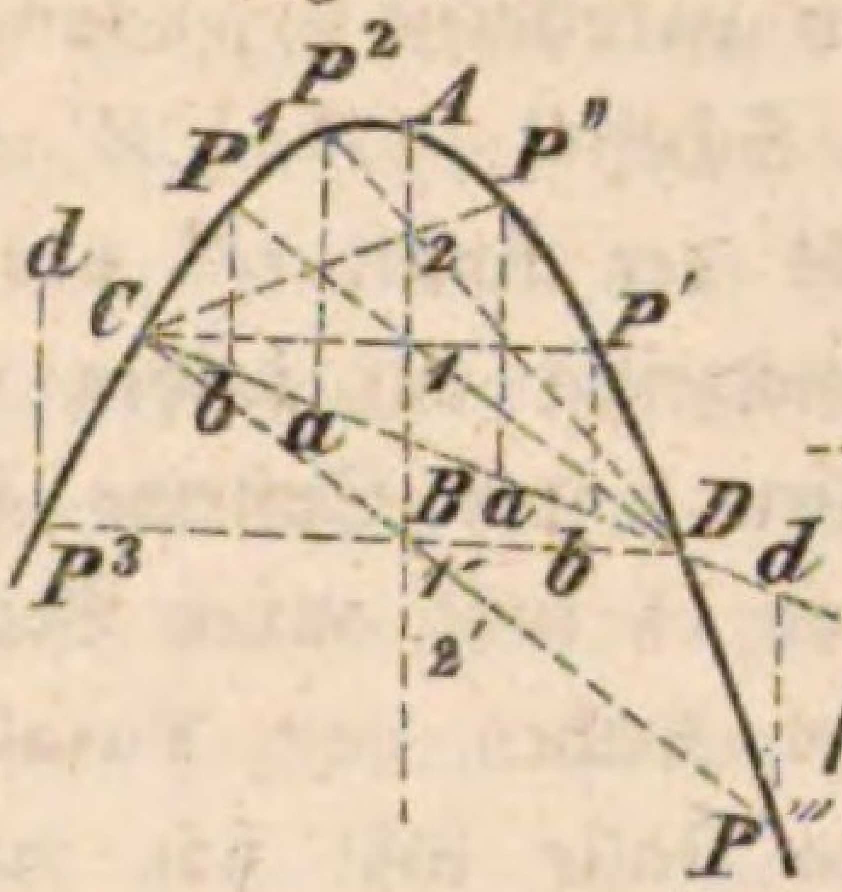
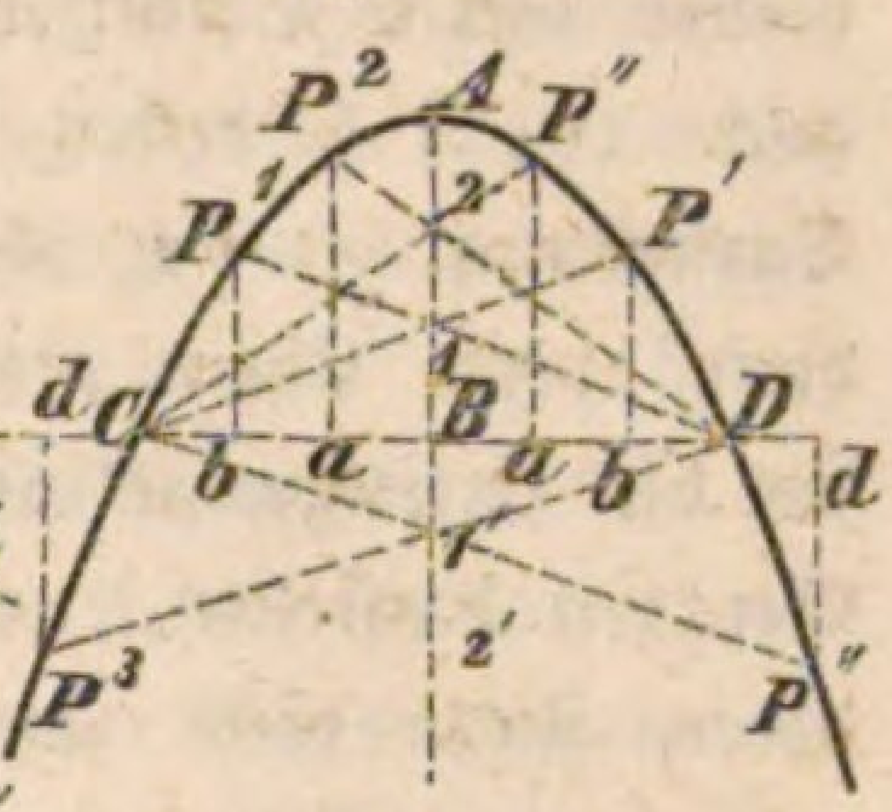


Fig. *277*.



400. Umwandlung der Projektionsebenen in Fig. *274*. In §. 204 ist die Achse eines windischen Paraboloides erklärt worden als jene Parallele zur Durchschnittslinie beider Leitebenen, welche die Fläche rechtwinklig durchschneidet, oder, was Gleiches besagt, welche die Fläche in einem solchen Punkte A (dem Scheitel der Fläche) durchschneidet, daß sie senkrecht steht auf der tangirenden Ebene dieses Punktes. Dies letztere aber schließt die Bedingung ein, daß jede der beiden Erzeugungslinien, welche sich in A kreuzen, senkrecht stehe gegen die Achse. Heißt wiederum Θ die Durchschnittslinie beider Leitebenen, so werden diese durch eine dritte, auf Θ senkrechte Ebene nach zwei Geraden g, k geschnitten, deren jede gegen Θ rechtwinklig steht, und die beiden zu g und k parallelen Erzeugungslinien G, K des Paraboloides kreuzen sich in dem Scheitel A. In Fig. *163*, Seite 272 ist $A\,a$ die Durchschnittslinie beider Leitebenen, und ihr parallel liegt die Achse des mittelst dieser Figur angedeuteten Paraboloides. Wird in der Ebene $D\,A\,a$ eine Gerade g senkrecht auf $A\,a$ gezogen, und in der Ebene $B\,A\,a$

gleichfalls eine Senkrechte k auf $A\,a$, so sind die beiden zu g und k parallelen Erzeugungslinien G, K zu konstruiren, deren Kreuzungspunkt zugleich der Scheitel des Paralleloides ist. — In Fig. 274, wo die Projektionsebenen auch die Leitebenen, haben wir bereits die Grundlinie als Parallele zur Achse erkannt; eine auf dieser senkrecht stehende Ebene schneidet die erste Leitebene nach einer vertikalen, die zweite nach einer horizontalen Linie, beide auf $(F\,B, F'\,E')$ senkrecht stehend, und $(C, E'\,G')$, $(A\,B, A')$ sind die beiden diesen Schnitten parallelen Erzeugungslinien des Paraboloides, darum auch (C, A') dessen Scheitel, $(Z\,C, Z'\,A')$ dessen Achse, welche in der Darstellung (c) sich als der Punkt C'' projicirt. In einer Darstellung wie diese, deren Ebene gleichzeitig auf beiden Leitebenen senkrecht steht, müssen sie die Erzeugungslinien beider Systeme stets als zwei Reihen paralleler Geraden darstellen, und es steht außer Bezug hierauf, daß in einem besonderen Falle diese zwei Reihen von Parallelen unter sich senkrecht gestellt erscheinen. In jedem Falle läßt sich mit Hülfe dieser Darstellung oder Projektion (c) eine Ebene bestimmen, welche durch die Achse des Paraboloides geht und welche mit beiden Leitebenen gleiche Winkel bildet. Eine solche stellt sich dar als die Gerade $\alpha''\,\beta''$, welche durch C'' geht und den Winkel $B''\,C''\,G''$ oder $A''\,C''\,E''$ halbirt; ihr Horizontalriß wäre die mit $C\,C''$ parallele Gerade $\beta''\,\gamma$. — Sofort werde zur Darstellung des Paraboloides eine erste neue Projektionsebene angeordnet, welche zur Achse parallel und auf der Ebene $\gamma\,\beta''\,\alpha''$ senkrecht steht, und eine neue zweite Projektionsebene, welche auf der Achse senkrecht steht. Betrachtet man die erste neue Projektionsebene als horizontal, die zweite darum als vertikal, so kann das praktische Ergebniß der Umwandlung kein anderes sein, als wenn, ohne die Projektionsebenen zu ändern, das ganze Paraboloid mit sammt der Ebene $\gamma\,\beta''\,\alpha''$ um $\gamma\,\beta''$ als Charnier so gedreht worden wäre, bis die Ebene $\gamma\,\beta''\,\alpha''$ vertikal steht. Dies ist in Fig. 275 ausgeführt worden, welche wiederum aus drei Darstellungen der windischen Fläche besteht. Durch die Ergebnisse dieser Bewegung konnte die Projektion (b), deren Ebene auf dem Charnier senkrecht steht, nur in so weit betroffen werden, daß die Linien, woraus sie besteht, wol ihre Stellung änderten, aber keineswegs ihre Form und gegenseitige Lage. Nachdem daher die Gerade $\alpha''\,\beta''$ in senkrechter Stellung angenommen worden, hatte man aus der oberen Figur (b) das ganze Linienschema $K''\,\beta''\,E''\,F''\,B''\,H''$ ..... ꝛc. an $\alpha''\,\beta''$ der unteren Figur zu tragen, wo man es mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet findet. Alle Punkte des Paraboloides bewegten sich in vertikalen Ebenen, welche

senkrecht auf $\gamma\beta''$ stehen und sich als Gerade wie $B\,C\,A\,B\,B'$, $F\,F'$ ꝛc. darstellen. So fiel der Punkt (F, F') hier nach F, indem er auf der Senkrechten $F'\,F$ durch die aus F'' Fig. 275 (*c*) herübergezogene Parallele mit $C\,C''$ abgeschnitten ward. B Fig. 275 (*a*) liegt auf der Senkrechten $B\,C\,B$ und auf der Parallelen $B''\,B$. Die Gerade $(B\,F,\ E'\,F')$ projicirt sich also in Fig. (*a*) nach $B\,F$ und ihre Theilpunkte nach $1, 2, 3 \ldots$ ꝛc. Von der senkrechten Geraden $(C, E'\,G')$ Fig. 274 fielen die Endpunkte nach E, G Fig. 275 (*a*), wo sie durch die Parallelen $E''\,E$, $G''\,G$ abgeschnitten waren, wie ihre Theilpunkte $a, b, c \ldots$ durch die entsprechenden Parallelen. Dadurch endlich ergaben sich $F\,E$, $1\,a$, $2\,b$, $3\,c, \ldots$ ꝛc. als die Projektionen jener Reihe von Erzeugungslinien, welche ursprünglich der Horizontalebene parallel lagen. Fig. (*b*) ist die zu (*a*) gehörige Vertikalprojektion, welche hier ausnahmsweise unter der Horizontalprojektion erscheint, $C'\,Z'$ die Projektion der Achse, (C', C) jene des Scheitels. Die von $C'\,Z'$ aus gezählten Höhen oder Tiefen waren der Seitenprojektion (*c*) zu entnehmen, z. B. für die Gerade $B'\,F'$ hatte man $C'\,B' = \zeta''\,B''$; $\varphi'\,F' = \varphi''\,F''$ ꝛc.; für die Gerade $G'\,E'$ ergab sich $C'\,G' = x''\,G''$; $C'\,E' = y''\,E''$ ꝛc.

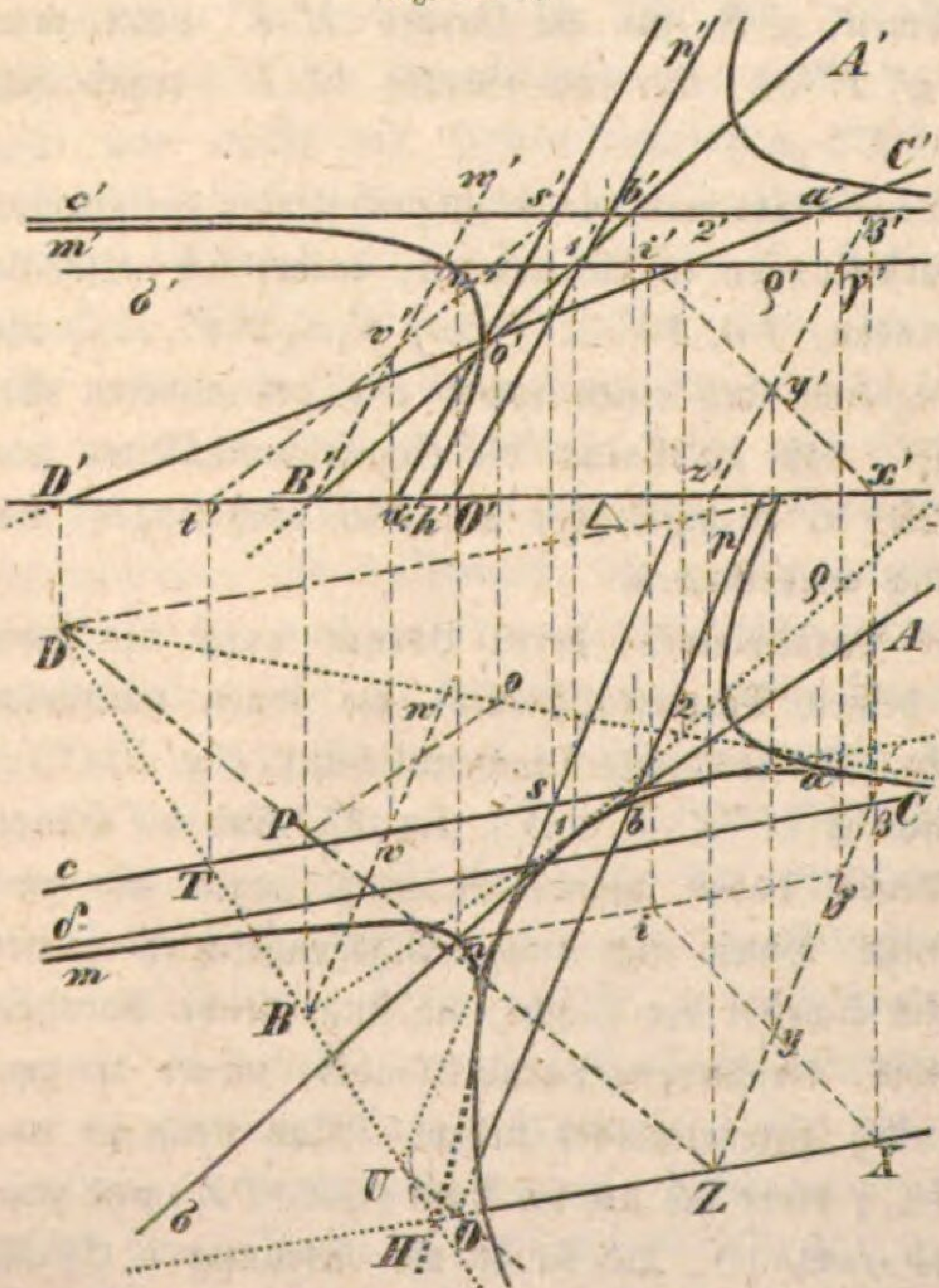
In ganz entsprechender Weise trägt man die Erzeugungslinien des zweiten Systemes aus den oberen Darstellungen in die unteren, wobei sich alsobald zeigen wird, daß jede der Geraden, $1\,a$, $2\,b \ldots.$, oder $1'\,a'$, $2'\,b' \ldots.$, als die Projektion einer Erzeugungslinie des einen sowol wie des anderen Generationssystems zu nehmen sei, daß überhaupt die Eigenthümlichkeiten des Paraboloides, wie sie in §. 201 ꝛc. bezüglich der Fig. 166 vorgetragen, sich auch in der jetzigen Darstellung wiederfinden.

401. Alle Schnitte des Paraboloides, deren Ebenen durch die Achse gehen, sind parabolisch und heißen Diametralschnitte; die ihnen parallelen Schnitte liefern gleiche Parabeln. Der senkrechte Diametralschnitt $(C\gamma,\ K'\,C'\,L')$ und der waagrechte Diametralschnitt $(C'\,Z',\ F\,C\,X)$ Fig. 275 sind die Hauptschnitte der Fläche; ihre Ebenen haben gleiche Neigung gegen die zwei Leitebenen. Beide Hauptschnitte öffnen sich nach entgegengesetzten Seiten und kreuzen sich rechtwinklig im Scheitel der Fläche, sie sind gleiche Parabeln bei dem rechtwinkligen Paraboloid, verschiedene Parabeln aber, sobald die zwei Leitebenen der Fläche schiefwinklig gegeneinander stehen. Man stelle sich vor, die vertikale Diametralebene $Z\,C\,\gamma$ drehe sich um die Achse $(C\,Z,\ C'\,Z')$ und zwar gleichzeitig nach links wie nach rechts N, bis sie in die Stellung $C\,C''\,B''$ und $C\,C''\,G''$ kommt, wo sie das Paraboloid nach zwei seiner geraden Erzeugungslinien schneiden. In allen Zwischenstellungen entstehen parabolische

Schnitte, nach rechts geöffnet, und je zwei dieser Schnitte, deren Ebenen symmetrisch gegen $Z\,C\,\gamma$ stehen, sind gleiche Parabeln. Verläßt die schneidende Ebene die Stellung $C\,C''\,B''$ oder $C\,C''\,G''$, ihre Bewegung fortzusetzen und sich der horizontalen Lage zu nähern, dann entstehen parabolische Schnitte mit nach links gekehrter Oeffnung. Je eine der Geraden ($C\,B$, $C''\,B''$), $C\,G$, $C''\,G''$) bildet den Uebergang der parabolischen Schnitte erster Art zu denen der zweiten.

Alle Ebenen, welche nicht der Achse parallel liegen, liefern hyperbolische Schnitte. In den Projektionen (a) und (c) sieht man solche Schnitte angegeben, deren Ebenen auf der Achse ($C\,Z$, C'') senkrecht stehen. Diejenigen dieser Schnitte rechts vom Scheitel (C, C') nehmen in (c) den oberen und unteren Raum ein zwischen den asymptotischen Ebenen $A''\,B''$, $E''\,G''$ und ihre Achsen $\varkappa''\,\lambda''$ 2c. sind gleich den entsprechenden Höhen $K'\,L'\,C$. Die Schnitte links vom Scheitel liegen in dem Raume rechts und links zwischen den asymptotischen Ebenen und ihre Achsen $\mu''\,\xi''\,\zeta$ sind gleich den Abständen $\mu\,\xi$ 2c.

Fig. 278.



402. **Allgemeine Behandlung der Aufgabe.** Zu einiger Vereinfachung der Konstruktionen werden wir in den nächstfolgenden Beispielen eine solche Anordnung der Projektionsebenen unterstellen, daß eine derselben parallel ist mit einer der Leitebenen, welch' gegenseitige Lage sich immer herbeiführen läßt, während die Allgemeinheit der Behandlung dadurch keine Einbuße erleidet. In Fig. 278 seien ($A\,B$, $A'\,B'$), ($C\,D$, $C'\,D'$) die Leitlinien, und die Leitebene sei horizontal. Durch einen beliebigen Punkt (o, o') auf ($C\,D$, $C'\,D'$) (zur Ersparniß einer Linie wählte man denjenigen, in dessen Vertikalprojektion o' sich $A'\,B'$ und $C'\,D'$ kreuzen), durch (o, o') sage

ich, werde zu ($A\,B$, $A'\,B'$) eine Parallele ($o\,P$, $o'\,B'$) gelegt, welche die Horizontalebene (B', P) schneidet. Eine Ebene, durch ($C\,D$, $C'\,D'$) und ($o\,P$, $o'\,B'$) gedacht, ist die Leitebene des zweiten Generationssystemes und ihr Horizontalriß $D\,P\,Z$ ist die Durchschnittslinie beider Leitebenen, zu welcher bekanntlich die Achse der Fläche parallel liegt. Soll in dem vorliegenden Paraboloide ein parabolischer Schnitt hervorgebracht werden, muß der Horizontalriß der schneidenden Ebene wiederum zu $D\,Z$ parallel sein; bei allen andern Lagen dieses Risses entstehen hyperbolische Schnitte. ($X\,y\,Z$, $x'\,y'\,z'$) sei eine solche schneidende Ebene und $X\,Z$ ihr Horizontalriß. Sie werde im Nachfolgenden einfach mit X bezeichnet.

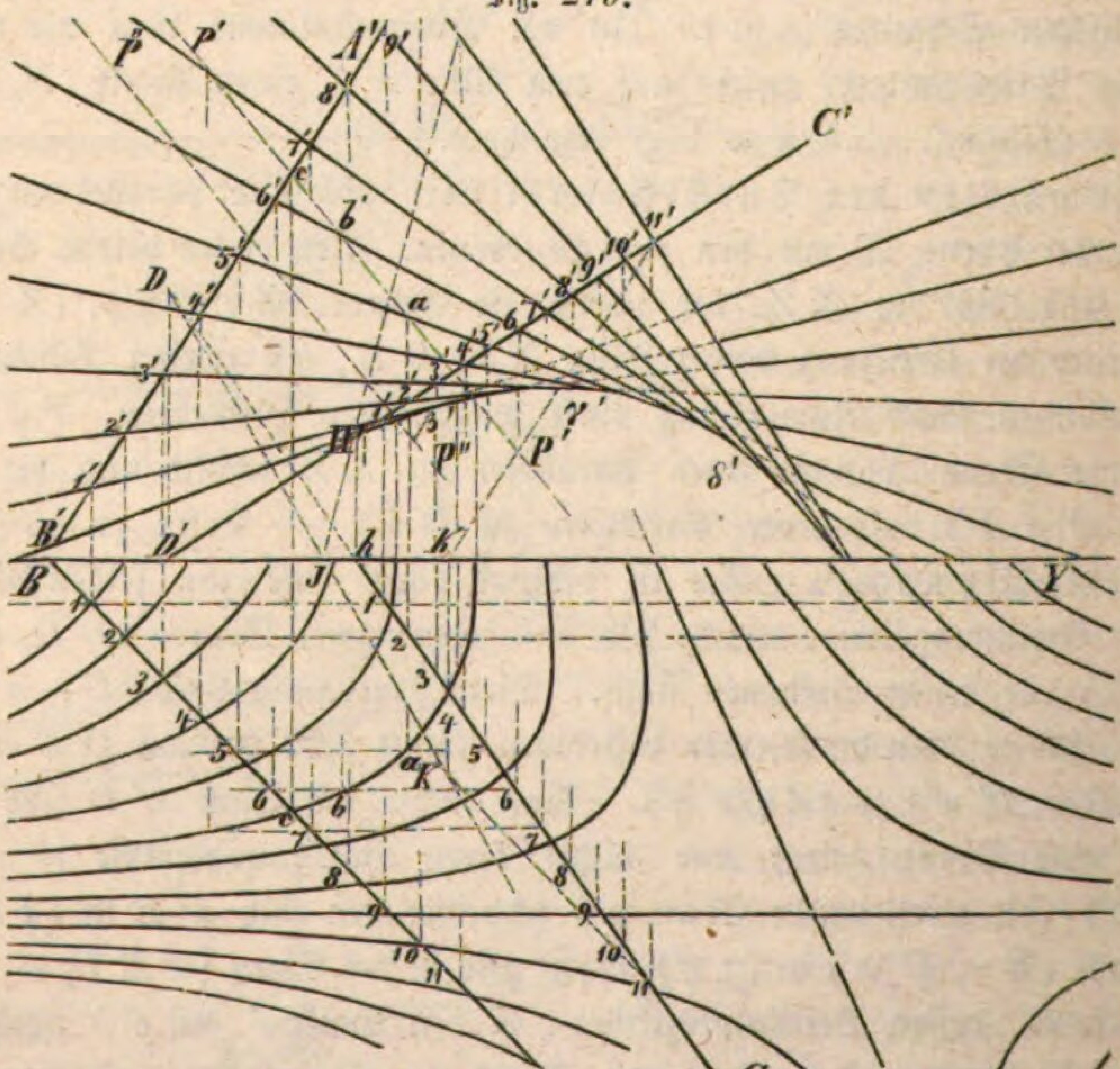
Punkte der Durchschnittslinie. Eine beliebige Horizontalebene $\sigma'\,\rho'$ schneidet das Paraboloid nach einer seiner Erzeugungslinien ($\sigma' 1' 2' \rho'$, $\sigma\,1\,2\,\rho$); sie schneidet die Ebene X nach einer Parallelen zu ihrem Risse $X\,Z$, nämlich nach der Geraden ($i'\,1'\,\sigma'$, $i\,n$), von welcher der Punkt (i', i) auf ($x'\,y'$, $X\,y$) liegt; in der Kreuzung (n, n') beider Geraden giebt sich ein Punkt des hyperbolischen Schnittes u. s. f. In der Horizontalebene liegt die Gerade $D\,B$ des Paraboloides, welche auf dem Risse $X\,Z$ einen Punkt (H, h') des Schnittes ($H\,n\,m\ldots$, $h'\,n'\,m'\ldots$) bezeichnet.

Asymptoten der Durchschnittslinie. Sie sind parallel den Durchschnitten der Ebene X mit den zwei Leitebenen. Von diesen beiden Schnitten ist der erste Riß der $X\,Z$, der zweite die Gerade ($Z\,\gamma$, $z'\,\gamma'$); (Z ist gegeben durch die Kreuzung beider Risse $X\,Z$, $D\,B$; ein zweiter Punkt (γ, γ') ward gefunden durch Anwendung einer waagrechten Hilfsebene, $\sigma'\,\rho'$ z. B., welche die Ebene X nach einer Parallelen zu $X\,Z$ schnitt und die Ebene ($D\,o\,P$, $D'\,o'\,B'$) nach einer Parallelen zu $D\,P$). — Erste zu ($Z\,\gamma$, $z\,\gamma'$) parallele Asymptote. Sie ist bedingt durch eine zur selben Geraden parallele Erzeugungslinie, welche sich auf irgend zwei Gerade ($B\,D$, $B'\,D'$), ($c\,b$, $c'\,b'$) des ersten Systemes stützt. Diese Erzeugungslinie ($U\,r$, $u'\,r'$) zu erhalten, führte man durch einen beliebigen Punkt (B', B') auf $D\,B$ eine Parallele ($B\,w$, $B'\,w'$) zu ($Z\,\gamma$, $z'\,\gamma'$). Man dachte sich durch $D\,B$ und ($B\,w$, $B'\,w'$) eine Ebene gelegt und suchte deren Begegnungspunkt (s', s) mit ($c\,b$, $c'\,b'$) (die projicirende Ebene $c\,b$ schneidet den Riß $D\,B$ in ($T\,t'$) und die Gerade ($B\,w$, $B'\,w'$) in (v, v'), macht also in der Ebene ($w\,B\,D$, $w'\,B'\,D'$) einen Schnitt, dessen Vertikalprojektion $t'\,v'$ den Punkt s' auf $c'\,b'$ abschneidet, welcher sich herab nach s projicirt. Durch (s, s') geht die gesuchte Erzeugungslinie, welche in U die Horizontalebene schneidet. Wird durch diese Erzeugungslinie eine Ebene gelegt parallel zur Leitebene, so ist $U\,O$ parallel

zu $D Z$ deren Horizontalriß und sie schneidet die Ebene X nach der ersten Asymptote $(O p, O' p')$.

Zweite zu $X Z$ parallele Asymptote. Wiederum beruht deren Konstruktion auf dem vorhergängigen Bestimmen der zu $X Z$ parallelen Erzeugungslinie des Paraboloides. Diese Erzeugungslinie $(c b, c' b')$ stützt sich auf die beiden ersten Leitlinien $(A B, A' B')$, $(C D, C' D')$. Sie zu erhalten zog man durch einen Punkt (D, D') auf $(C D, C' D')$ eine Parallele, mit $X Z$, nämlich die Gerade $D \Delta$. Man legte durch $(C D \Delta, C' D' B')$ eine Ebene, bestimmte ihren Durchschnittspunkt (a', a) mit $(A B, A' B')$ (die hierauf bezüglichen graphischen Einzelheiten sind in der Figur hinweggelassen worden) und führte endlich durch (a, a') die Gerade $(c a b, c' a' b')$ parallel zu $X Z$. In Folge der horizontalen Leitebene ist durch $(c b, c' b')$ eine waagrechte Ebene zu legen, welche die Ebene X nach der zweiten Asymptote $(\beta \delta, b' c')$ schneidet. Ein Punkt (β, β') von dieser findet sich auf der Geraden $(Z C, z' y')$.

Fig. 279.



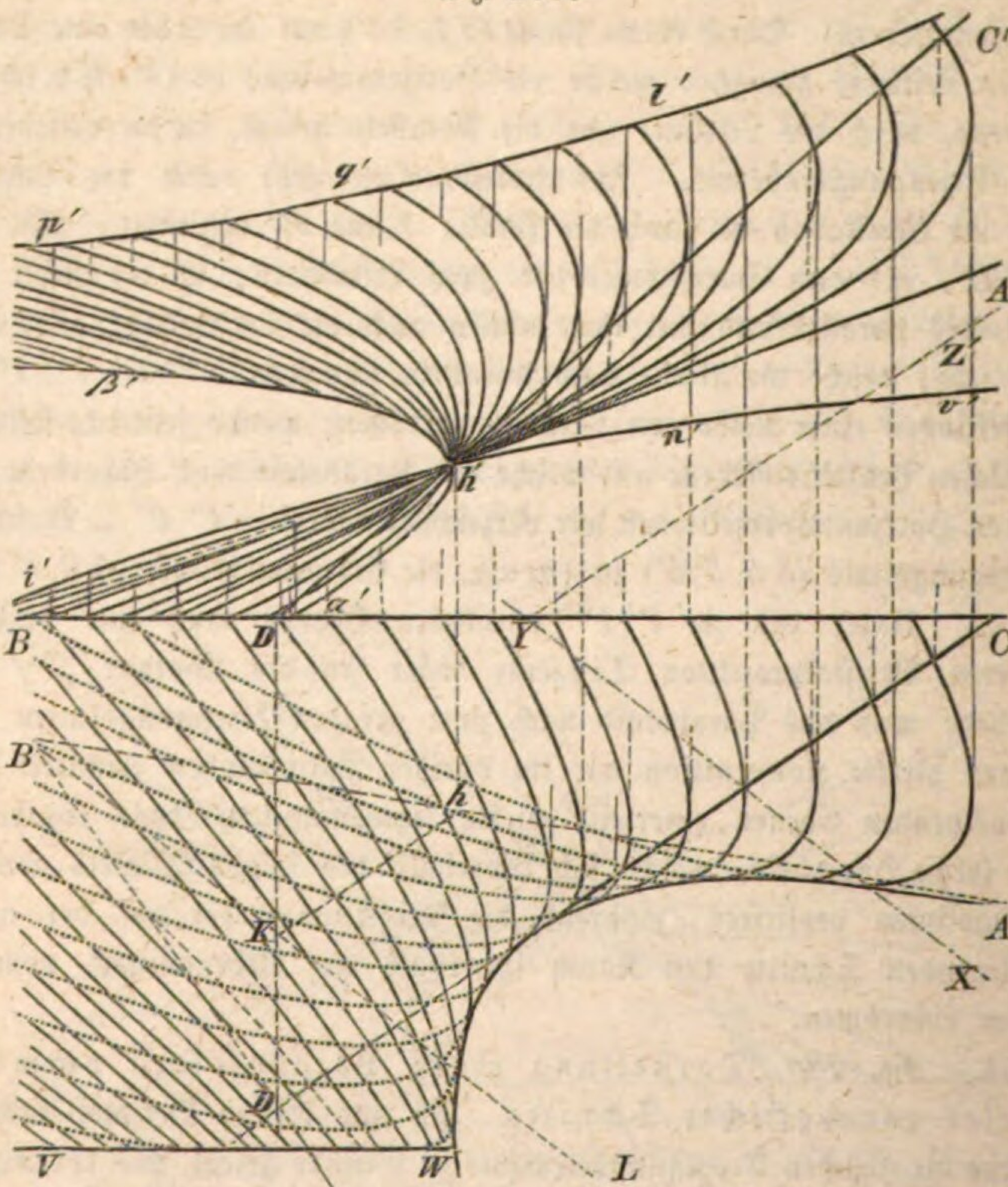
403. Fig. 279 Paraboloid, dargestellt durch parallele hyperbolische Schnitte. $(A B, A' B')$, $(C D, C' D')$ die zwei Leitlinien,

die vertikale Projektionsebene ist die zugehörige Leitebene, wonach die Horizontalprojektionen der Erzeugungslinien als Parallelen zur Grundlinie auftreten. Die zweite Leitlinie schneidet in (h, H') die Vertikalebene, in (D', D) die Horizontalebene. Durch einen Punkt $(11, 11')$ auf ihr ward eine Parallele zur ersten Leitlinie gezogen, welche die Horizontalebene in (k', K) schneidet. Eine Ebene, durch die Leitlinie und die Parallele gelegt, ist die Leitebene des zweiten Erzeugungssystemes. Ihr Horizontalriß geht durch die Punkte D und K, ihr Vertikalriß ist durch die Punkte J und H' bestimmt. Mit diesem Risse JH', als dem Durchschnitt der zwei Leitebenen, ist die Achse dieses Paraboloides parallel und mit ihm müssen auch die Vertikalrisse aller Ebenen parallel sein, welche die Fläche nach Parabeln schneiden. $P'P'$, $P''P''$ sind die Projektionen einer Reihe von parallelen Ebenen, welche senkrecht stehen auf der vertikalen Projektionsebene und welche das Paraboloid nach Hyperbeln schneiden, deren Horizontalprojektionen wir verzeichnet haben. ($P'P'$ z. B. schneidet die Erzeugungslinie $(5\,5, 5'\,5')$ in (a, a'), die Erzeugungslinie $(6\,6, 6'\,6')$ in (b, b') 2c.) Unter den zu $P'P'$ parallelen Ebenen muß eine vorhanden sein, deren Vertikalprojektion Tangente wäre an die Contour $\beta'\gamma'\delta'$ ... Diese Ebene muß das Paraboloid nach zwei geraden Erzeugungslinien schneiden, deren direkte Konstruktion wir im vorigen Paragraphen erläutert haben. Die schneidenden Ebenen einerseits dieser letztgenannten Ebene ergaben als Schnitte solche Hyperbeln, welche sich innerhalb des spitzen Winkels genannter Erzeugungslinien projiciren, während die Projektionen der auf der anderen Seite liegenden Schnitte den Raum innerhalb des Nebenwinkels vom Erstgenannten einnehmen.

404. Fig. *280*. Darstellung eines Paraboloides vermittelst paralleler parabolischer Schnitte. Es sind diesem Beispiel nach Lage und Größe die gleichen Erzeugungselemente zu Grunde gelegt, wie der Fig. *164* (Seite 275), nämlich eine horizontale Leitebene und $(AB, A'B')$, $(CD, C'D')$ als die zwei Leitlinien. Eine Ebene, durch die erste und parallel zur zweiten gelegt, ist die Leitebene des zweiten Erzeugungssystemes. Sie hat BKL als Horizontalriß. $(AB, A'B')$ schneidet die Horizontalebene in $(B'B)$; und eine Parallele zu $(CD, C'D')$ durch einen Punkt (h', h) der ersten Leitlinie gelegt trifft die Horizontalebene in (D', K). Zu LB als der Durchschnittslinie beider Leitebenen müssen die Horizontalrisse aller Ebenen parallel sein, welche als Schnitte der Fläche Parabeln hervorbringen. XYZ' ist eine solche Ebene. Parallel mit ihr hat man eine Reihe gleichentfernter Ebenen angenommen und die Projektionen oder parabolischen Durchschnittslinien verzeichnet.

Diese Schnitte sind gleiche Parabeln, zu deren punktweiser Festsetzung ein Verfahren führt, wie das oben §. 392 für den Punkt (n, n') eingehaltene.

Fig. 280.



Auch die äußeren Begränzungen des Paraboloides sind die gleichen geblieben wie in Fig. 164.

Die Schnitte des windischen oder einnetzigen Hyperboloides.

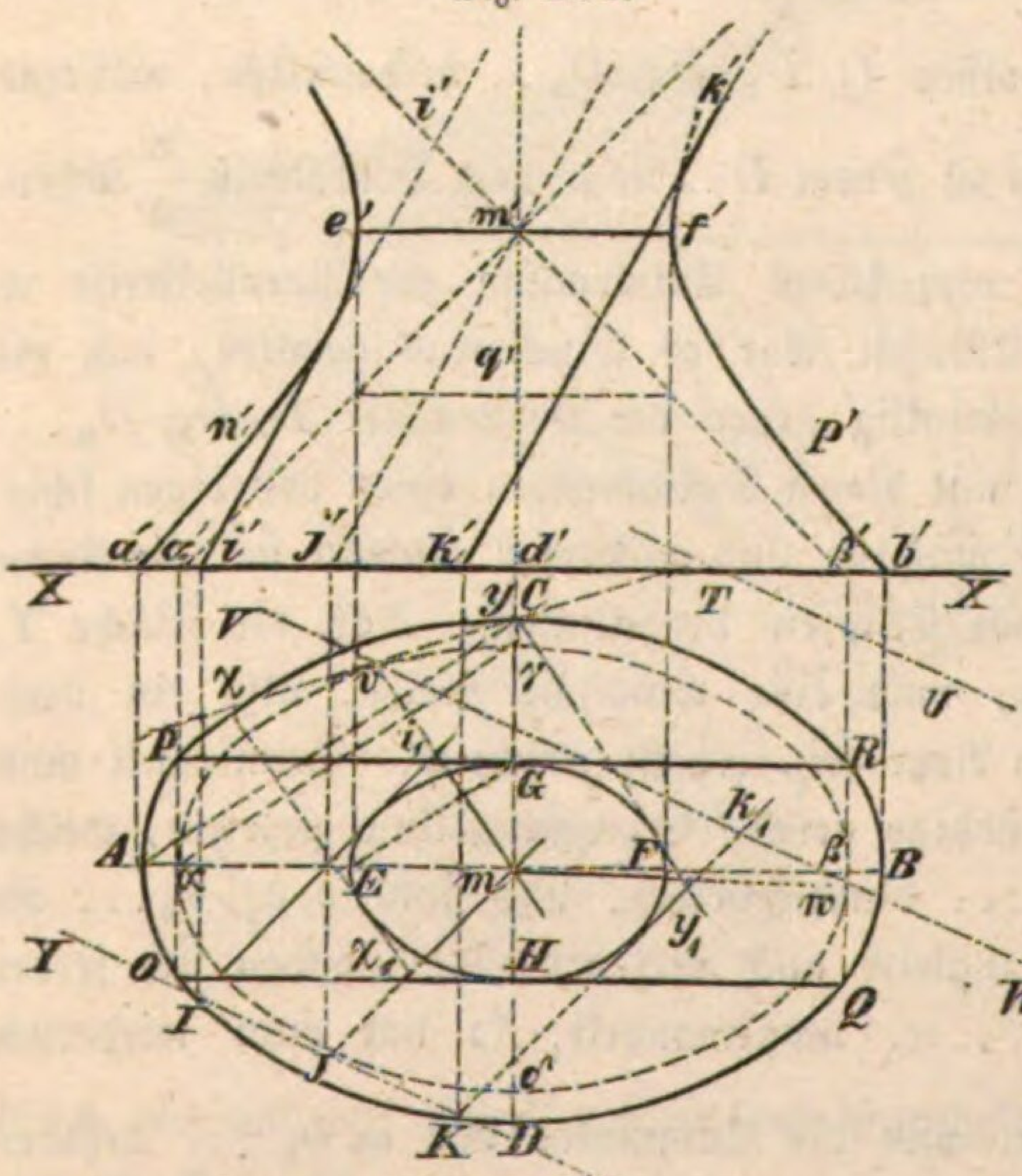
405. Wie bereits in §. 383 angedeutet worden, läßt sich mittelst eines erweiterten Begriffes von Projektion das windische Umdrehungs-Hyperboloid in ein allgemeines Hyperboloid der Art umwandeln, daß die letztgenannte Fläche als eine Art von Parallelprojektion der ersten sich kundgiebt. Vergegenwärtigen wir uns ein Umdrehungshyperboloid Y nebst seiner Achse A

und in der Fläche eine beliebige Reihe seiner Parallelkreise $K, K_1, K_2, K_3 \ldots$ ꝛc. All' diese Kreise seien durch eine Meridianebene M geschnitten, wodurch parallele Durchmesser $D, D_1, D_2, D_3 \ldots$ der Kreise entstanden; in jedem Kreise sei eine Anzahl von Ordinaten $O, O_1, O_2, O_3 \ldots$ rechtwinklig gegen den betreffenden Durchmesser gezogen. Alle Ordinaten sollen zumal in einem beliebigen, aber gleichen Verhältniß $n:m$ vergrößert oder verkleinert werden, und zu besserer Verständigung sei angenommen, es hätte eine Verkleinerung stattgefunden. $\frac{n}{m}$ bedeute demzufolge einen ächten Bruch. Sind nun $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \ldots$ die umgewandelten Ordinaten, so hat man $\Omega = \frac{n}{m} O, \Omega_1 = \frac{n}{m} O_1 \ldots$ ꝛc. und die Endpunkte der neuen Ordinaten gehören jetzt Ellipsen an, deren große Achsen die Größen $D, D_1, D_2, D_3 \ldots$ beibehielten, während die entsprechenden kleinen Achsen zu jedem $D \ldots$ ꝛc. in dem Verhältniß $\frac{n}{m}$ stehen. Bei dieser Umwandlung oder projektivem Umformung der Parallelkreise in ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen war es keineswegs geboten, daß die Ordinaten $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ rechtwinklig gegen die Durchmesser $D, D_1, D_2 \ldots$ geblieben, sie könnten jetzt alle mit diesen Durchmessern einen beliebigen schiefen, wenn nur gleichen Winkel machen; und wiederum würden sich die Kreise in ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen umgestalten. Daß die Fläche Υ, welcher die Ellipsen angehören, noch eine windische Fläche, also ein dreiachsiges Hyperboloid von einem Netze sei, erhellt unschwer. Denn denkt man sich auf der Fläche Y eine beliebige gerade Erzeugungslinie gezogen, welche die Parallelkreise in $p, p_1, p_2 \ldots$ durchschneidet, und sind $o, o_1, o_2 \ldots$ die Ordinaten dieser Punkte, also zugleich auch Kreisordinaten, haben sich ferner diese Ordinaten in $\omega, \omega_1, \omega_2 \ldots$ ꝛc. umgewandelt, so hat man wiederum $\omega = \frac{n}{m} o$; $\omega_1 = \frac{n}{m} o_1 \ldots$ ꝛc. und die Endpunkte von $\omega, \omega_1 \ldots$ gehören abermals einer geraden Linie an. Kreuzen sich zwei gerade Erzeugungslinien der Fläche Y in einem Punkte p und ist π die Projektion von p, so kreuzen sich in π die umgewandelten geraden Erzeugungslinien von Υ. Waren zwei solcher Linien auf Y unter sich parallel, so sind sie es wiederum auf Υ. Daher wird auch die asymptotische Kegelfläche von Y nach der Projektion oder Umwandlung wiederum zur asymptotischen Kegelfläche von Υ und die Kreise auf dieser Fläche haben sich in ähnliche Ellipsen umgewandelt wie

die Parallelkreise von Y. Ist Y mit einer Ebene T in Verbindung gewesen, durch welche es nach einer Linie S zweiter Ordnung geschnitten worden, und man unterwirft auch diesen Schnitt der projektiven Umwandlung, so kommen die Punkte der Ebene T in eine neue Ebene Θ zu liegen und S verwandelt sich in eine Linie Σ, welche als reine Parallelprojektion von S erkannt werden wird, also wiederum als eine Linie zweiter Ordnung und von derselben Art wie S. — Aus alledem wird zu entnehmen sein, in welcher Weise die Erörterungen des §. 383 über die Schnitte des Umdrehungshyperboloides auch bezüglich des allgemeinen Hyperboloides ihre Anwendung finden.

406. Es sei die Ellipse $A\,C\,B\,D$ Fig. 281, welche in der Horizontalebene liegt (ihre große Achse $A\,B$ parallel zur Vertikalebene), der Schnitt eines Hyperboloides durch diese Ebene, $(m, d'\,m')$ die vertikale Achse der Fläche*) und die zu ersterer ähnliche Ellipse $(E\,G\,F\,H,\ e'f')$ die Kehle derselben, $a'\,n'\,e'\ldots$ $b'\,p'\,f'\ldots$ der Umriß ihrer Vertikalprojektion. Betrachtet man die zur Grundlinie $X\,X$ parallele Gerade $O\,H\,Q$, welche die Ellipse $E\,G\,F$ in H berührt, als Horizontalprojektion einer Erzeugungslinie des Hyperboloides, wobei die entsprechende Vertikalprojektion $\alpha'\,m'$ oder $\beta'\,m'$ zugleich als Asymptote des Hauptschnittes der Ebene $A\,B$ erscheint, so ist $(m'\,\alpha',\ m\,\alpha)$ oder $(m'\,\beta',\ m\,\beta)$ eine durch den Mittelpunkt der Fläche gehende Parallele zu genannter Erzeugungslinie. Diese Parallele als eine Erzeugungslinie der asymptotischen Kegel-

Fig. 281.



*) Der Größe und Lage nach sind $(m\,E,\ m'\,e')$, $(m\,H,\ m')$ und $(m,\ m'\,q')$ die drei Halbachsen dieses Hyperboloides, und die drei Schnitte, deren Ebenen durch je zwei Achsen gehen, die Hauptschnitte, sectiones principales, desselben.

fläche genommen, durchschneidet die Horizontalebene in $(\alpha' \alpha)$ oder $(\beta' \beta)$ und bestimmt damit die große Achse der Basis des asymptotischen Kegels, weil diese Basis eine zu $A\,C\,B\,D$ ähnliche und koncentrische Ellipse $\alpha\,\gamma\,\beta\,\delta$ sein muß. Eine zu der Konstruktionslinie $A\,C$ oder $E\,G$ durch α gezogene Parallele $\alpha\,\gamma$ schneidet auf $m\,C$ den Endpunkt γ der kleinen Achse ab. $\alpha' m'$ und $\beta' m'$ bilden in der Vertikalprojektion den Umriß der fraglichen Kegelfläche. Eine tangirende Ebene derselben, von welcher sie längs der beliebigen Geraden $(m\,J, m' j')$ berührt wird, hat als Horizontalriß die Ellipstangente $I\,J\,K$ und ist eine asymptotische Ebene des Hyperboloides, denn sie schneidet diese Fläche nach zwei zur Berührungslinie parallelen Erzeugungslinien $(I\,i_1, i' i')$, $(K\,k_1, k' k')$ und tangirt dieselbe folglich an demjenigen Punkte im Unendlichen, von welchem man annehmen muß, daß er dort beiden Parallelen gemeinsam sei. Wird das Hyperboloid von einer Ebene E geschnitten, so bestimmt sich die Beschaffenheit des Schnittes S, ohne diesen vorher konstruirt zu haben, nach ähnlichen Erwägungen wie in §. 380. Man lege durch (m, m') eine Ebene parallel zu E und bestimme ihren Horizontalriß, so wird bezüglich der Lage dieses Risses von drei Fällen einer sich ergeben.

Erstens: $T\,U$ sei der Riß und liege ganz außerhalb der Ellipse $\alpha\,\gamma\,\beta\,\delta$. Dadurch ist angezeigt, daß auf dem Hyperboloide wie auf dessen asymptotischer Kegelfläche keine gerade Erzeugungslinie existire, welche der Ebene E parallel sei; daß diese also das Hyperboloid nach einer geschlossenen Linie, d. i. nach einer Ellipse, schneide.

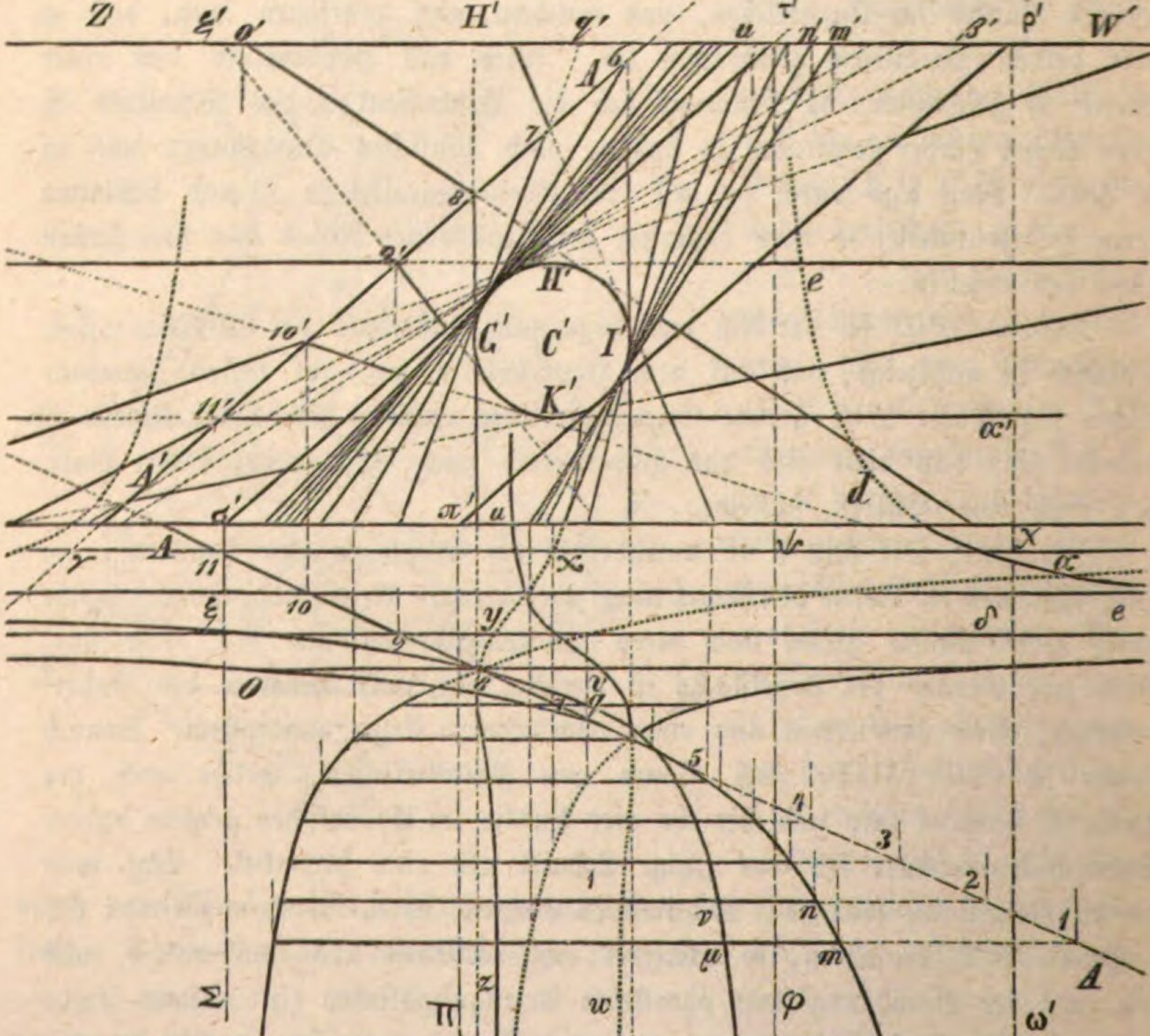
Zweitens: Der Riß $V\,W$ durchdringt die Ellipse in zwei Punkten v, w. Hier schneidet die Ebene den Kegel nach zwei geraden Erzeugungslinien, welche durch diese Punkte gehen und deren Horizontalprojektionen $m\,v$, $m\,w$ sind. Aber jede Gerade der Kegelfläche ist parallel mit zwei Geraden des Hyperboloides, einer vom ersten und einer vom andern Erzeugungssystem. Sonach liegen in dieser Fläche zwei Paare von Parallellinien, welche auch der Ebene E parallel sind und mit ihr vier Punkte im Unendlichen gemein haben. Dadurch kennzeichnet sich der jetzige Schnitt als eine Hyperbel. Legt man an die Kegelfläche jene zwei tangirenden Ebenen, deren Berührungslinien sich nach $m\,v$, $m\,w$ projiciren, so schneidet jede derselben das Hyperboloid nach den zwei der Berührungslinie parallelen Erzeugungslinien (in unserer Figur sieht man die Projektionen χ, χ_1, $y\,y_1$ des Paares angegeben, welche zu $m\,v$ parallel liegen). Jede dieser tangirenden Ebenen schneidet die Ebene E nach einer Asymptote der Hyperbel.

Drittens: Der Horizontalriß berührt die Basis $\alpha\,\gamma\,\beta\,\delta'$, wie dies z. B. $Y\,Z$ in J thut. Hier ist die Ebene zugleich eine asymptotische Ebene des Hyperboloides und schneidet diese Fläche nach zwei zur Berührungslinie $(m\,J,\,m'\,j')$ parallelen Erzeugungslinien, welche durch die Punkte I, K gehen und welche der Ebene E parallel liegen. Der Schnitt hat somit jetzt nur einen Punkt im Unendlichen und keine Asymptote, weil die asymptotische Ebene mit E parallel liegt, ist also eine Parabel.

An einem graphisch ausgeführten Beispiel eines hyperboloidischen Schnittes hätten wir weiter nichts zu erläutern.

407. Fig. 282. Schnitte einer allgemein windischen Fläche.

Fig. 282.



Unter obiger Aufschrift verstehen wir eine windische Fläche, an deren Entstehung keine besonderen Bedingungen geknüpft sind und welche namentlich

nicht zu den Flächen zweiter Ordnung gehört. Die in unserer Figur gegebene Fläche reiht sich in die Klasse der Conoide; sie hat eine gerade Leitlinie $(A\,A, A'\,A')$, eine Leitebene, hier zugleich die vertikale Projektionsebene, und als drittes Erzeugungselement eine cylindrische Leitfläche, deren Achse C' auf der Vertikalebene senkrecht steht und welche sich auf diese Ebene als ein Kreis $I'\,H'\,G'$ projicirt. Alle geraden Erzeugungslinien des Conoides sollen diese Cylinderfläche tangiren. Legt man demzufolge durch irgend einen Punkt von $(A\,A, A'\,A')$ den Punkt $(11, 11')$, z. B. erstlich zwei tangirende Ebenen an die cylindrische Leitfläche und eine dritte Ebene parallel zur Leitebene, so wird diese letztere die beiden ersteren nach den zwei geraden Erzeugungslinien des Punktes $(11, 11')$ durchschneiden. Ihre Vertikalprojektionen sind die aus $11'$ an $I'\,H'\,G'$ gezogenen Tangenten $11'\,\alpha'$, $11'\,\beta'$ und ihre gemeinsame Horizontalprojektion ist die Parallele $11\,\alpha$ zur Grundlinie $A\,X$. Die also bestimmten Erzeugungslinien theilen sich in zwei Gruppen, je nachdem sie die Cylinderfläche von einer oder der andern Seite berühren, und sie bilden in der Gesammtheit zwei Netze einer windischen Fläche, welche sich nach der geraden Leitlinie durchschneiden. In jeglicher tangirenden Ebene der Cylinderfläche liegt eine gerade Erzeugungslinie des Conoides, aber man muß annehmen, diese Erzeugungslinie sei in unendliche Entfernung übergegangen, sobald die tangirende Ebene parallel liegt zur geraden Leitlinie. Man bestimmt diese Stellung der Gränzebene durch die zwei zu $A'\,A'$ parallelen Tangenten $\pi'\,\rho'$, $\sigma'\,\tau'$. Indem die gerade Erzeugungslinie sich im Raume bewegt, das Conoid zu erzeugen, beschreibt ihr Berührungspunkt auf der leitenden Cylinderfläche eine aus zwei getrennten Aesten bestehende Kurve, deren Horizontalprojektion man bei $u\,v\,w\ldots$, $x\,y\,z\ldots$ verzeichnet sieht. Jeder der beiden Aeste entspricht einem der zwei Flächennetze des Conoides.

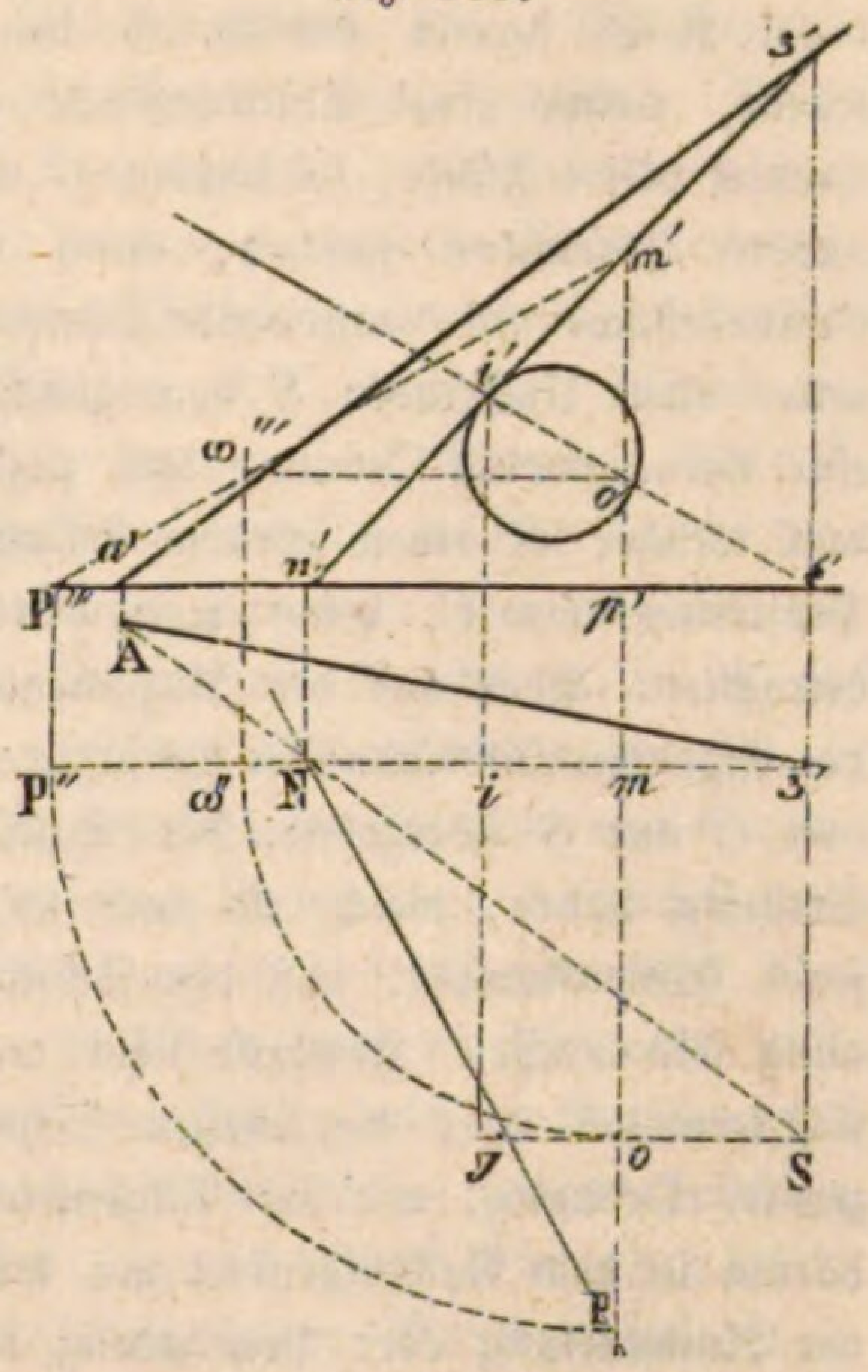
Als schneidende Ebenen in unserer Figur haben wir die horizontale Projektionsebene und eine ihr parallele Ebene $Z'\,W'$ angenommen. An sich genommen ist über die Konstruktion der herbeigeführten Schnitte kaum Etwas zu bemerken; denn wie in allen ähnlichen Fällen sind die Schnitte gebildet aus den Begegnungspunkten der einzelnen Erzeugungslinien mit den schneidenden Ebenen. Im vorliegenden Falle handelt es sich einfach darum, die Punkte der Vertikalprojektion, wie m', $n'\ldots$, herabzubringen nach m, $n\ldots$ auf die entsprechenden Parallelen $1\,m$, $2\,n$ .. 2c. Auch dann noch würden wir Besonderes nicht zu sagen wissen, wenn die schneidenden Ebenen andere wären als die Projektionsebenen. Weil aber unter den Erzeugungslinien des Conoides sich jedenfalls solche befinden, welche der Horizontalebene parallel

sind, so können die Schnitte des Conoides durch horizontale Ebenen keine geschlossenen Linien sein und sie werden sich auch in gesonderte Aeste spalten, deren Lauf und Zusammengehörigkeit ein aufmerksames Verfolgen heischt. Z. B. die Erzeugungslinien, deren Vertikalprojektionen $9' \xi'$, $8' \varkappa'$, $7' q'$ 2c. sind, liefern Punkte eines Durchschnittsastes, welcher als Horizontalprojektion die Linie $\mu\, \nu\, \xi \ldots$ 2c. hat. Die letzte in der genannten Reihe von Erzeugungslinien hat als Vertikalprojektion die Waagrechte $11' K'$. Sie ist der Ebene $W' Z'$ parallel und im Unendlichen liegt auf ihr ein Punkt des genannten Durchschnittsastes. Als Folge davon ergiebt sich, daß die Horizontalprojektion $11\, \gamma$ fraglicher Erzeugungslinie zur Asymptote der Kurve $\mu\, \nu\, \xi$ wird. Dem Laufe des Schnittes nach rechts folgend, wo $\sigma' \tau'$ die Projektion der äußersten Erzeugungslinie ist, welche selbst aber im Unendlichen in der projicirenden Ebene $\sigma' \tau'$ liegt, ergiebt sich, daß $\psi\, \varphi$, die Horizontalprojektion der Durchschnittslinie von $Z' W'$ und $\sigma' \tau'$, abermals eine Asymptote der Projektion $\mu\, \nu\, \xi \ldots$ sein müsse. Einen zweiten Ast vom Schnitte desselben Flächennetzes und der Ebene $Z' W$ liefern jene Erzeugungslinien, welche durch Punkte auf $(A\, A, A' A')$ unterhalb von $(11, 11')$ gehen. Für diesen Ast ist $\pi' \rho'$ die Projektion der äußersten Erzeugungslinie und $11\, \gamma$, $\chi\, \omega$ sind die Asymptoten seiner Horizontalprojektion, welche Projektion im Uebrigen außerhalb unserer Zeichnungsfläche liegt. Der zweite Ast des oberen Schnittes hat $m\, n\, o \ldots$ und $c\, d\, e \ldots$ als Horizontalprojektion. Von dieser ist $9\, \delta$ eine gemeinsame Asymptote; $\chi\, \omega$ ist die zweite Asymptote des ersten, $\psi\, \varphi$ jene des zweiten Astes. Die unteren Schnitte werden nach dem Vorgetragenen zu erkennen und zu verfolgen sein. Die somit konstruirten Schnitte des Conoides wie überhaupt aller Schnitte dieser Fläche durch Ebenen, welche auf der Vertikalebene senkrecht stehen, sind Kurven hyperbolischer Art, jedoch keine Hyperbeln, was schon aus der Zahl von Asymptoten unserer Projektionen hervorgeht.

408. Die gewöhnlichen Tangenten der ebenen Schnitte des Conoides ergeben sich, indem man sie behandelt als die Durchschnittslinien der schneidenden Ebene mit der tangirenden Ebene des Berührungspunktes. Diese letzte bestimmt sich mit Hilfe eines tangirenden Paraboloides, und weil das vorliegende Conoid hierin einiges Eigenthümliche an sich trägt, soll durch Fig. 283 einige Erläuterung gegeben werden. Diese Figur bezieht sich auf die vorhergehende: in $(a'. A)$ dringt die gerade Leitlinie durch die Horizontalebene, und durch den Punkt $(3, 3')$; auf ihr geht eine Erzeugungslinie $(3' n', 3\, N)$ des Conoides, welche die Cylinderfläche in (i, i') berührt und in (n', N) die Horizontalebene schneidet. An einem Punkte (m, m') der Erzeugungslinie

sei die tangirende Ebene des Conoides zu bestimmen. Nun kennt man an zwei Punkten von ($3' n', 3 N$) die tangirenden Ebenen. Am Punkte ($3, 3'$) ist sie bestimmt durch die zwei Geraden ($3' a'$, $3 A$) und ($3' n'$, $3 N$) und hat folglich die Gerade ($A N$) als Horizontalriß. Am Punkte (i, i') ist die tangirende Ebene der Cylinderfläche auch tangirend an das Conoid, weil die Gerade ($3' n' 3 N$) in ihr liegt und auch die Tangente der Berührungslinie ($I' H' G'$, $u v w$) (Fig. 282), welche zugleich auch Tangente des Conoides ist. In der Ebene $N n' 3'$ nahmen wir die Gerade (i', $i j$) als erste Leitlinie des Hilfsparaboloides, und in der Ebene ($3 N A$, $3' a' n'$) eine Gerade, deren Horizontalprojektion $3 S$ mit $i j$ parallel ist als zweite Leitlinie; diese schneidet somit in S die Horizontalebene. Als Leitebene bleibt die vertikale Projektionsebene. Für das Paraboloid eine zweite Erzeugungslinie vom ersten System zu gewinnen, legten wir durch S eine Ebene parallel zur vertikalen Projektionsebene; diese schneidet (i', $i j$) in (i', j), wodurch die zweite Gerade ($S j$, $s' i'$) sich bestimmt. Nun sind alle Geraden des zweiten Erzeugungssystemes parallel zur Vertikalebene $j i$, weshalb ($m P$, $m' p'$) als zweite Erzeugungslinie des Punktes (m, m') sich ergiebt; diese zweite Gerade schneidet die Horizontalebene in (P, p') und $N P$ ist der Horizontalriß der berührenden Ebene des Paraboloides wie des Conoides an ihrem gemeinsamen Punkte (m, m'). [Den Punkt P zu gewinnen, hat man die Gerade ($m P$, $m' p'$) mit ihrer Vertikalebene gedreht, bis letztere in $m P''$ parallel zur Vertikalebene stand; die Senkrechte m diente als Charnier; (o, o') kam durch die Drehung nach (ω'', ω''') zu liegen, die Gerade also nach ($m \omega'' P''$, $m' \omega''' P'''$), und durchschnitt in P'' die Horizontalebene, welch' letzterer Punkt P'' zurückgedreht ward nach P.]

Fig. 283.



Ebene Schnitte und Verstreckung der aufwickelbaren Flächen.

409. Insofern die aufwickelbaren Flächen überhaupt den scheitrechten angehören, konstruirt man ihre ebenen Schnitte punktweise, indem die Be-

gegnungsorte ihrer geraden Erzeugungslinien mit jeder schneidenden Ebene bestimmt werden. Zunächst treffen wir unter dieser Flächengattung wieder die Cylinder- und Kegelflächen und zwar vornehmlich jene mit Grundlinien zweiter Ordnung, insofern sie nicht zu den Rotationsflächen gehören und unter dieser Reihe bereits ausführlich behandelt worden sind. Bezeichnet C eine Kurve, welche einer Cylinderfläche als Basis dient, und ist S ein ebener Schnitt dieser Fläche, so können C und S eine als die Parallelprojektion der andern genommen werden, wenn man die geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche als projicirende Linien betrachtet. Daraus geht hervor, daß unter allen Umständen S von gleicher Art sei wie C. Nimmt man C als eine Kurve zweiter Ordnung und zugleich als die Grundlinie einer Kegelfläche, von welcher S einen ebenen Schnitt bedeutet, so ist S die perspektivische Projektion von C, wenn man den Scheitel der Kegelfläche als das Auge betrachtet. Aber aus den Argumentationen von §. 365 erhellt klärlich, wie die Eigenthümlichkeiten der konjugirten Diameter u. s. w. durch die Projektion von C auf S übergehen, der Scheitel oder das Auge mag gegen C eine Stellung haben, welche es auch sei. Mit andern Worten: es erhellt aus jenen Entwicklungen, daß der Schnitt S wiederum eine Kurve zweiter Ordnung sein müsse. Hiedurch sieht man den Weg vorgezeichnet, welcher bei Erörterungen über die ebenen Schnitte schiefer Cylinder- und Kegelflächen zweiter Ordnung, wie im Allgemeinen einzuhalten ist, und wir behandeln darum in dem Nachfolgenden nur solche Schnitte, welche in Bezug stehen mit der Aufwickelung oder Verstreckung der Fläche.

410. Ueber den Begriff von Aufwickelung einer krummen Fläche ist schon in §. 163 gesprochen und dabei entwickelt worden, wie die Möglichkeit solcher Aufwickelung oder Verstreckung auf dem Umstande beruhe, daß die Elemente der Fläche unendlich schmale, ebene Streifen seien, beiderseits begränzt durch zwei aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien der Fläche. Eine dieser Erzeugungslinien nach der andern dient als Charnier zum Drehen des von ihr bezeugten Flächenelementes, bis es mit dem Nachbarelement in einer Ebene liegt, und bis in solcher Weise endlich die ganze Fläche ohne Aufheben ihres Zusammenhanges an eine Ebene umgewandelt worden. Durch die Verlängerung eines Flächenelementes nach all' seinen Richtungen entsteht eine tangirende Ebene der aufwickelbaren Fläche, und in Folge der Verstreckung fallen alle tangirenden Ebenen zusammen in die einzige Ebene der aufgewickelten Fläche. Man denke sich in einer tangirenden Ebene die gerade Berührungslinie b gezogen und noch eine zweite Gerade g, welche die erste in einem Punkte p

und unter einem gewissen Winkel w durchkreuzt. Beide Gerade b und g seien in die aufgewickelte Fläche übertragen worden und sollen dort mit B und C bezeichnet sein, so werden diese abermals unter dem Winkel w sich kreuzen. Denn b und g schneiden sich in dem Flächenelemente, welches die tangirende Ebene mit der aufwickelbaren Fläche gemein hat. Mit diesem Flächenelement haben b wie g jegliche ein Linienelement gemein. Dies Flächenelement geht aber, mit Allem was ihm angehört, ungeändert in die Aufwickelung über und die Linienelemente von b, g werden Linienelemente von B, C; beide aber bilden unter sich den Winkel w, weshalb auch die verlängerten Linienelemente, nämlich die Geraden B, C, denselben Winkel w unter sich machen. — War g Tangente an irgend einer krummen Linie l der aufwickelbaren Fläche und p der Berührungspunkt, welcher durch die Aufwickelung nach P kommen soll; nennt man ferner L die aufgewickelte Linie l, und G die in die Aufwickelung übertragene Gerade g, so ist G abermals Tangente von L im Punkte P, weil das Linienelement, welches g mit l gemein hat, in der Aufwickelung ein gemeinsames Element von G und L geblieben. Durchkreuzen sich in p mehrere Linien der aufwickelbaren Fläche, nebst der Tangente von jeder, und wurden diese Linien nebst den Tangenten in die Aufwickelung übertragen, so bilden dort die Tangenten mit der Geraden B die gleichen Winkel wie auf der Fläche mit der Berührungslinie b, woraus schließlich hervorgeht, daß die Winkel, unter welchen sich auf einer aufwickelbaren Fläche irgend zwei Linien dieser Fläche kreuzen, durch die Aufwickelung oder Verstreckung der Fläche nicht geändert werden.

Mit der Frage des Verstreckens einer Aufwickelbaren verbinden wir in unserm Lehrgange die Aufgabe: In einer aufwickelbaren Fläche ist irgend eine krumme Linie gegeben; man soll bestimmen, welches die Form dieser Linie sei, nachdem die Fläche verstreckt worden. Oder auch die umgekehrte Aufgabe: In einer Ebene ist irgend eine Linie gegeben; man soll die Form dieser Linie bestimmen, nachdem die Ebene in eine aufwickelbare krumme Fläche umgewandelt worden. Eine geometrische Lösung der Aufgabe beruht auf dem Umstande, daß in der Fläche eine Linie vorhanden ist, deren durch die Verstreckung herbeigeführte Gestalt man im Voraus kennt. Wir wollen sie die Richtlinie der Abwicklung nennen. Denn alsdann ist man in der Lage, den Winkel zu bestimmen und in die Abwickelung zu übertragen, welchen die gerade Erzeugungslinie an irgend einem Punkt der Richtlinie mit dieser bildet.

Dadurch bestimmen sich in der Aufwickelung die Lagen der Erzeugungslinien, und mit Hilfe von diesen läßt sich ein jeder Punkt der Fläche in die Aufwickelung übertragen. Bestimmte Fälle werden dies mehr verdeutlichen.

411. *Fortsetzung.* Verstreckung der Cylinderfläche. Alle geraden Erzeugungslinien derselben sind unter sich parallel und müssen es darum auch in der Aufwickelung bleiben. Konstruirt man den geraden Schnitt der Cylinderfläche, d. h. den Schnitt, dessen Ebene gegen die Erzeugungslinien rechtwinklig steht, so kreuzt dieser Schnitt alle Erzeugungslinien rechtwinklig und muß sich durch die Verstreckung in eine gerade Linie umformen, weil nur diese eine Reihe von Parallelen rechtwinklig zu durchkreuzen vermag. Der gerade Schnitt dient somit als Richtlinie für die Verstreckung aller Cylinderflächen.

Richtlinie zur Verstreckung der Kegelflächen ist der sphärische Schnitt derselben, nämlich der Schnitt durch eine Kugel, deren Centrum der Scheitel der Fläche. Denn weil alle geraden Erzeugungslinien der Kegelfläche sich im Scheitel kreuzen, müssen sie auch nach der Verstreckung durch einen gemeinsamen Punkt S gehen. Aber die Stücke der Erzeugungslinien zwischen dem Scheitel und dem sphärischen Schnitt sind zugleich Radien der Kugel, also von gleicher Größe; daher endlich müssen die Punkte des sphärischen Schnittes nach der Aufwickelung in gleiche Entfernung von S fallen, d. i. auf einen Kreisumfang, dessen Radius gleich ist jenem der schneidenden Kugel. Dieser sphärische Schnitt dient als Richtlinie, weil er durch die Verstreckung sich immer in einen Kreis umformt.

Bei Cylinder- und Kegelflächen, welche zugleich Rotationsflächen sind, kann jeder Parallelkreis derselben als Richtlinie der Aufwickelung benutzt werden, welchen Fällen Fig. *284* bis Fig. *289* gewidmet sind.

Die Flächen sind in normaler Stellung, d. i. mit vertikaler Achse angenommen und durch Ebenen geschnitten, welche auf der Vertikalebene rechtwinklig stehen. Diese Schnitte nebst ihren Tangenten sollen in die Aufwickelung übertragen werden. Man hat die Basis der Cylinderfläche Fig. *284* in eine gewisse Zahl gleicher Theile getheilt, klein genug, damit zwischen dem Bogen und seiner Sehne ein merkbarer Unterschied nicht mehr stattfinde. Diese Theile wurden auf eine Gerade $A\,A$ Fig. *286* abgetragen, gleichmäßig beziffert wie in der ersten Figur, und endlich hat man durch die Theilpunkte Senkrechte auf $A\,A$ errichtet, welche die geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche in der Verstreckung vorstellen, weil diese Geraden auch auf der Fläche mit der Basis rechte Winkel bilden. Die Längen der Erzeugungslinien

Fig. 284.

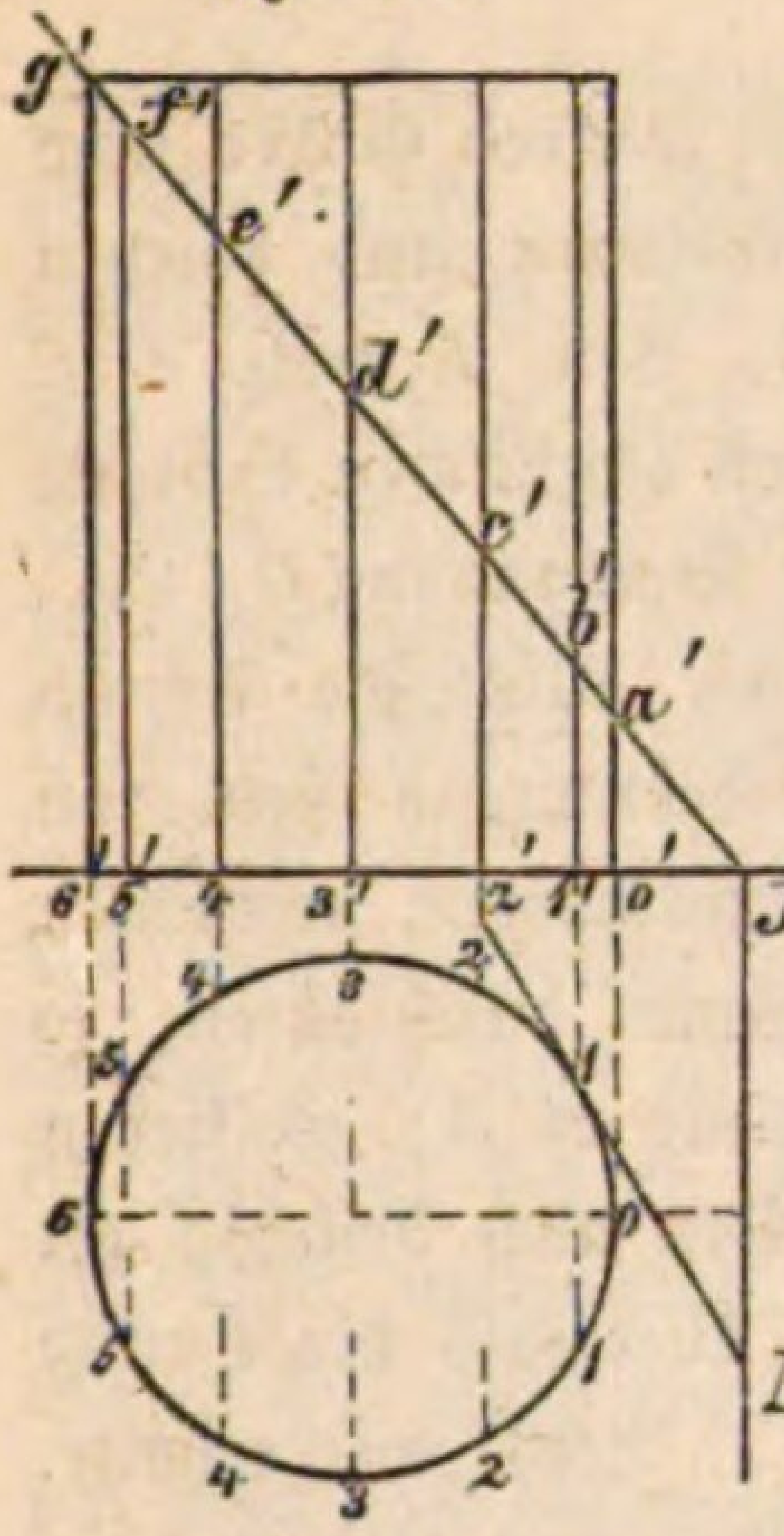


Fig. 285.

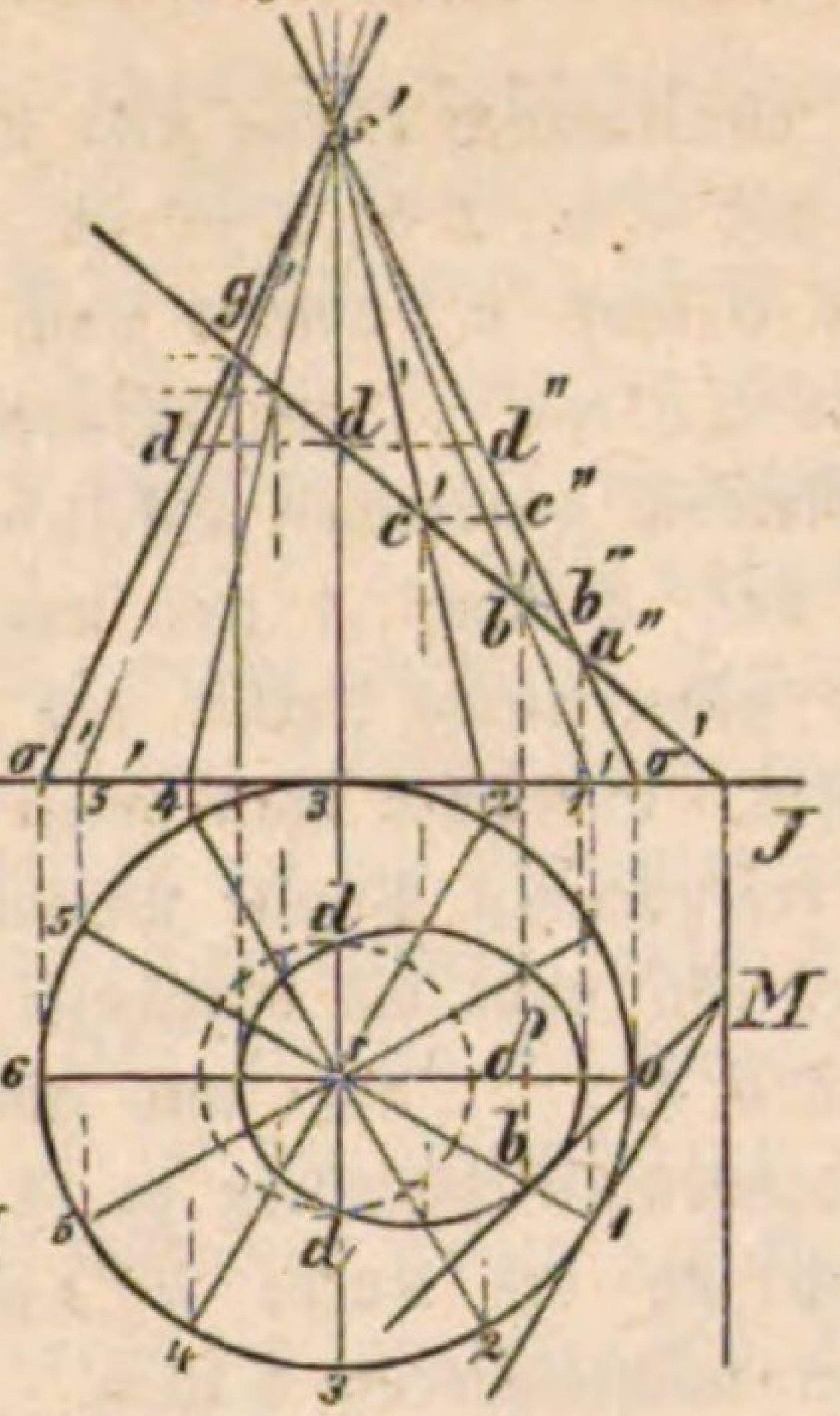


Fig. 286.

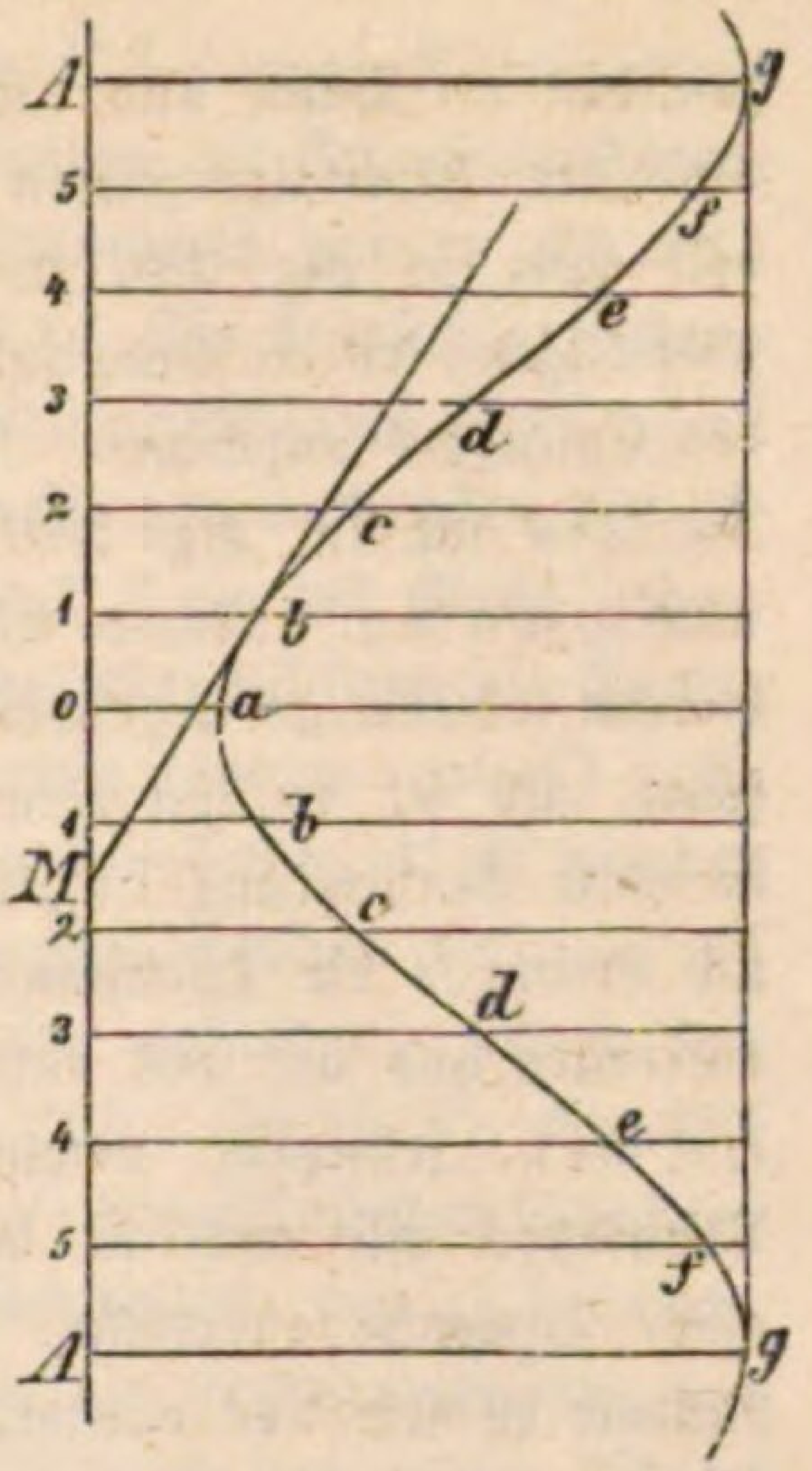


Fig. 287.

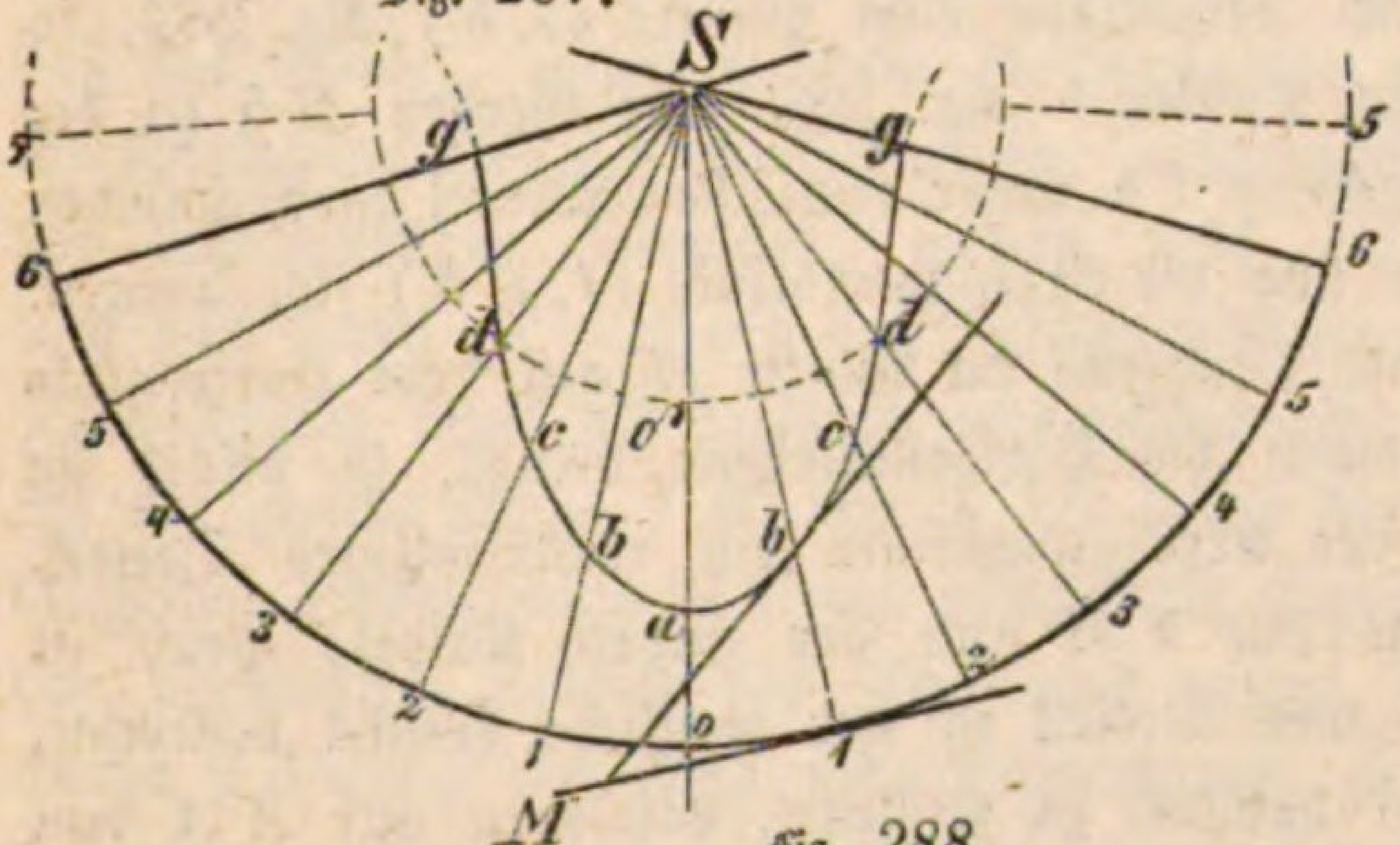


Fig. 288.

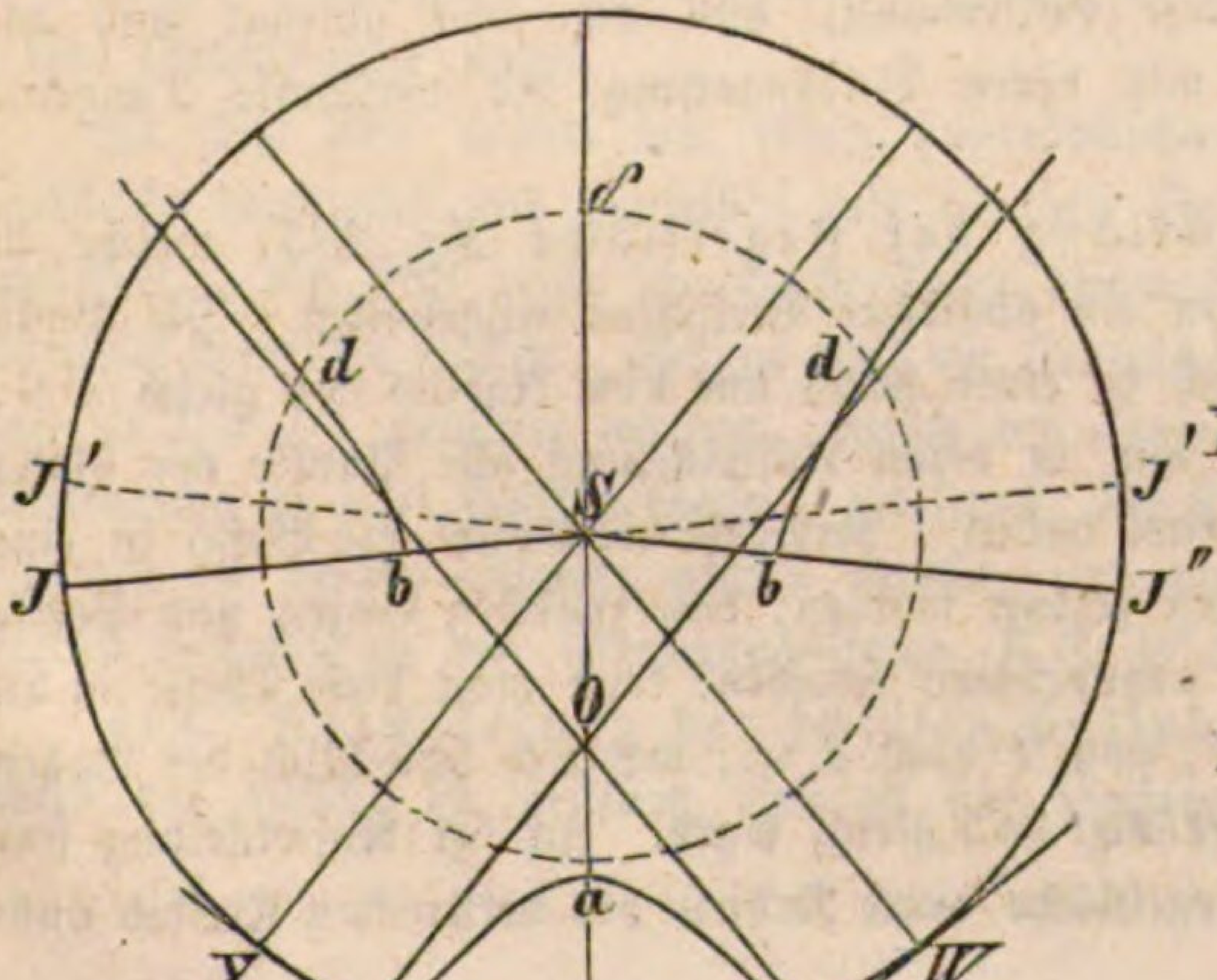
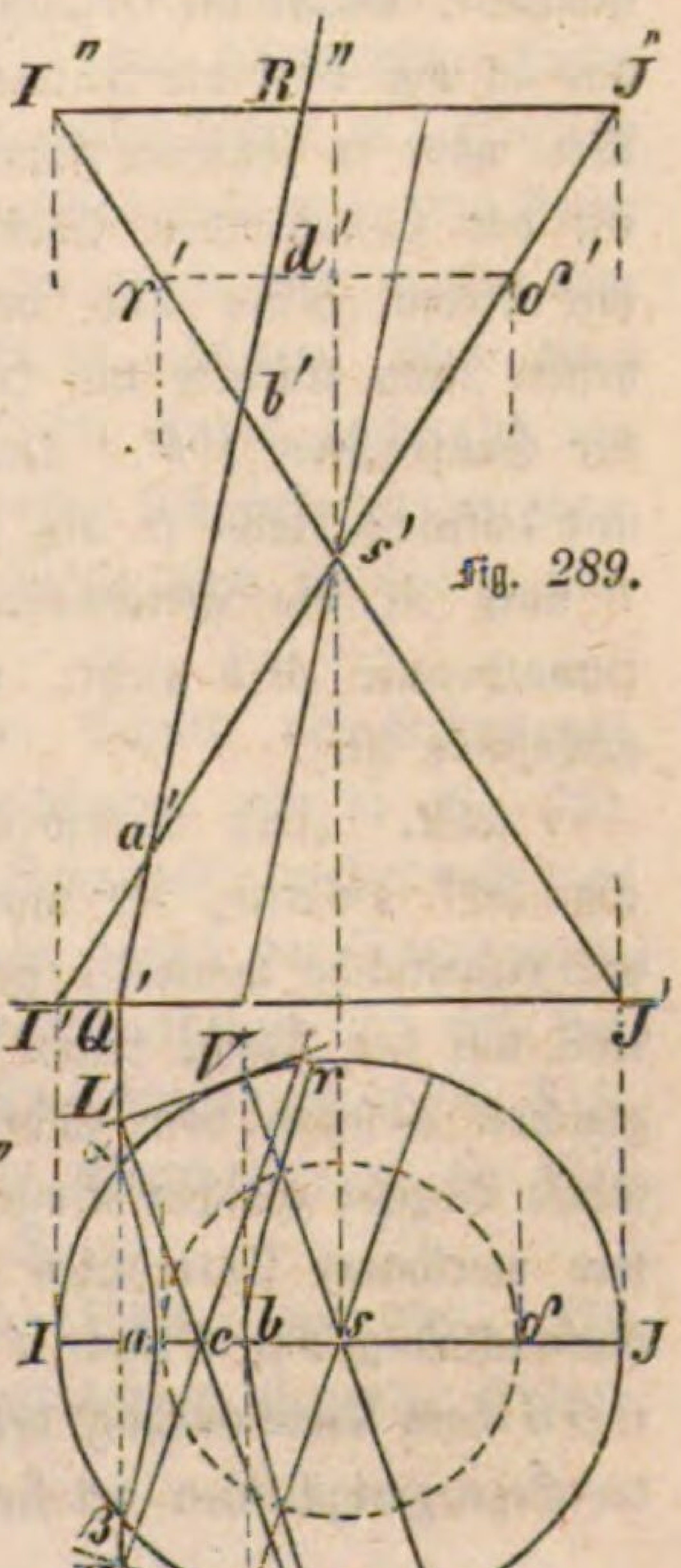


Fig. 289.



zwischen der Basis und der schneidenden Ebene sind ihrer wahren Größe nach aus der Vertikalprojektion bei *0' a'*, *1' b'*, *2' c'* zu entnehmen und wurden von dort in Fig. *286* von *0* nach *a*, von *1* nach *b*, von *2* nach *c* 2c. übertragen, wo die Endpunkte *a, b, c, d* ... dem verstreckten elliptischen Schnitte des Cylinders angehören. Metrisch genommen wickelt der Kreisumfang *0 1 2*... Fig. *284* sich in Fig. *286* von *A* nach *A* ab, und der elliptische Schnitt nach *g d a d g*. Allein die geometrische Arbeit des Uebertragens sieht sich hiermit keineswegs abgeschlossen. Gleichwie man einen Kreisumfang betrachten kann, als sei er von dem erzeugenden Punkte unzähligemal durchlaufen, so ist seine Verstreckung in Fig. *286* nicht die begränzte Linie *A A*; es ließen sich vielmehr die Theilpunkte *5, 4, 3* ... auf- und abwärts noch beliebig oft auftragen und auf den entsprechenden Parabeln zu *A g* abermals die Punkte *f, e, d* ... festsetzen, wodurch sich die Kurve *g f e d* ... stets wiederholte. Aehnliches gilt auch in den nachfolgenden Fällen. Was das Uebertragen einer Tangente anbetrifft, z. B. derjenigen vom Punkte (*1, b'*) Fig. *284*, so handelt es sich nur darum, im Punkte *b* Fig. *286* eine Gerade *M b* zu bestimmen, welche die Erzeugungslinie *1 b* unter demselben Winkel durchschneidet, wie in Fig. *284* die Tangente und die Erzeugungslinie (*1, 1' b'*) sich kreuzen. Weil aber in letzterer Figur die Tangente im Punkte *M* auf dem Horizontalriß der schneidenden Ebene durch die Horizontalebene dringt, so bildet sie mit diesem Risse und mit der Erzeugungslinie ein rechtwinkliges Dreieck, dessen einer Kathete die Horizontale *1 M* und der andere Kathete gleich ist der Senkrechten *1' b'*. Durch dies Dreieck ist der fragliche Winkel bestimmt, und dasselbe bleibt in Fig. *286* dadurch zu zeichnen, daß man auf *A A* von *1* nach *M* die gleichnamige Entfernung, aus Fig. *284* abträgt und die Hypothenuse *M b* zieht, mit deren Verlängerung die verlangte Tangente gewonnen ist.

412. Zur Aufwickelung der Kegelfläche Fig. *285*, welche in Fig. *287* auftritt, hat man ein ähnliches Verfahren eingehalten. Die Basis der Kegelfläche wandelte sich in einen Kreis um vom Radius *S 6* gleich *s' 6'*, weil auf der Fläche sowol wie in deren Aufwickelung alle Punkte der Basis gleichen Abstand vom Scheitel haben. Nachdem wiederum die Basis in eine solche Anzahl gleicher Bogen zerlegt worden, daß zwischen Bogen und Sehne kein merkbarer Unterschied anzunehmen gewesen, trug man diese Theile in die Aufwickelung von *0* nach *1*, von *1* nach *2* 2c., wodurch schließlich der Bogen *6 0 6* dem Kreisumfang der Fig. *285* gleich ward. In der Aufwickelung sind die Erzeugungslinien der Kegelfläche durch Radien des verstreckten Kreises aus-

gedrückt. Den Schnitt der Kegelfläche durch die Ebene MJg' in die Aufwickelung zu übertragen, mußten aus Fig. 285 die wahren Längen der Erzeugungslinien zwischen dem Scheitel und der schneidenden Ebene entnommen und in Fig. 287 von S nach a, nach b, nach c 2c. abgegeben werden. Die fraglichen wahren Längen aber sind einfach vermittelst der waagrechten Hilfslinien $b'\,b''$, $c'\,c''$ bestimmt worden, indem $s'\,b''$, $s'\,c''$ ... diese wahren Längen ausdrücken, für die Erzeugungslinien nämlich, welche durch die Punkte $1, 2$ ... der Basis gehen. — Auch mittelst verstreckter Parallelkreise hätten in der Aufwickelung die Punkte des umgewandelten Schnittes $a\,b\,c\,g$ gewonnen werden können. (d, d') z. B. in Fig. 285 liegt auf einem Parallelkreise, dessen Durchmesser in $d''\,d''$ gegeben ist, und der sich in Fig. 287 als ein Kreisbogen vom Radius $S\,d = s'\,d''$ Fig. 285 umwandelt. d in der Aufwickelung wird gefunden, indem der Bogen δ d gleich gemacht wird dem Bogen δ d Fig. 285. In (b, b') Fig. 285 hat man nach bekannter Weise die Tangente $(M\,b, J\,b')$ des elliptischen Schnittes bestimmt. Diese in die Aufwickelung nach $M\,b$ zu übertragen, war zu beachten, daß der Winkel, unter welchem die Tangente und die Erzeugungslinie des Berührungspunktes sich durchschneiden, ausgedrückt ist durch den spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreieckes, wovon $1\,M$ Fig. 285 die horizontale Seite und das Stück $(1\,b, 1'\,b')$ der Erzeugungslinie die zweite Seite ist. In der Aufwickelung blieb die Kreistangente wieder eine Kreistangente und man hatte ihr die gleiche Länge $1\,M$ wie in der ersten Figur zu geben, um in der verlängerten Hypothenuse $M\,6$ die gewünschte Tangente zu erhalten. Was über den verstreckten Schnitt des Cylinders gesagt worden, findet auch auf die Kurve $g\,d\,a\,d\,y$ Fig. 287 ihre Anwendung; sie würde sich bei fortgesetztem Uebertragen beliebigemal wiederholen, obwol dem Maße nach sie bei g und g ihre Gränzpunkte findet.

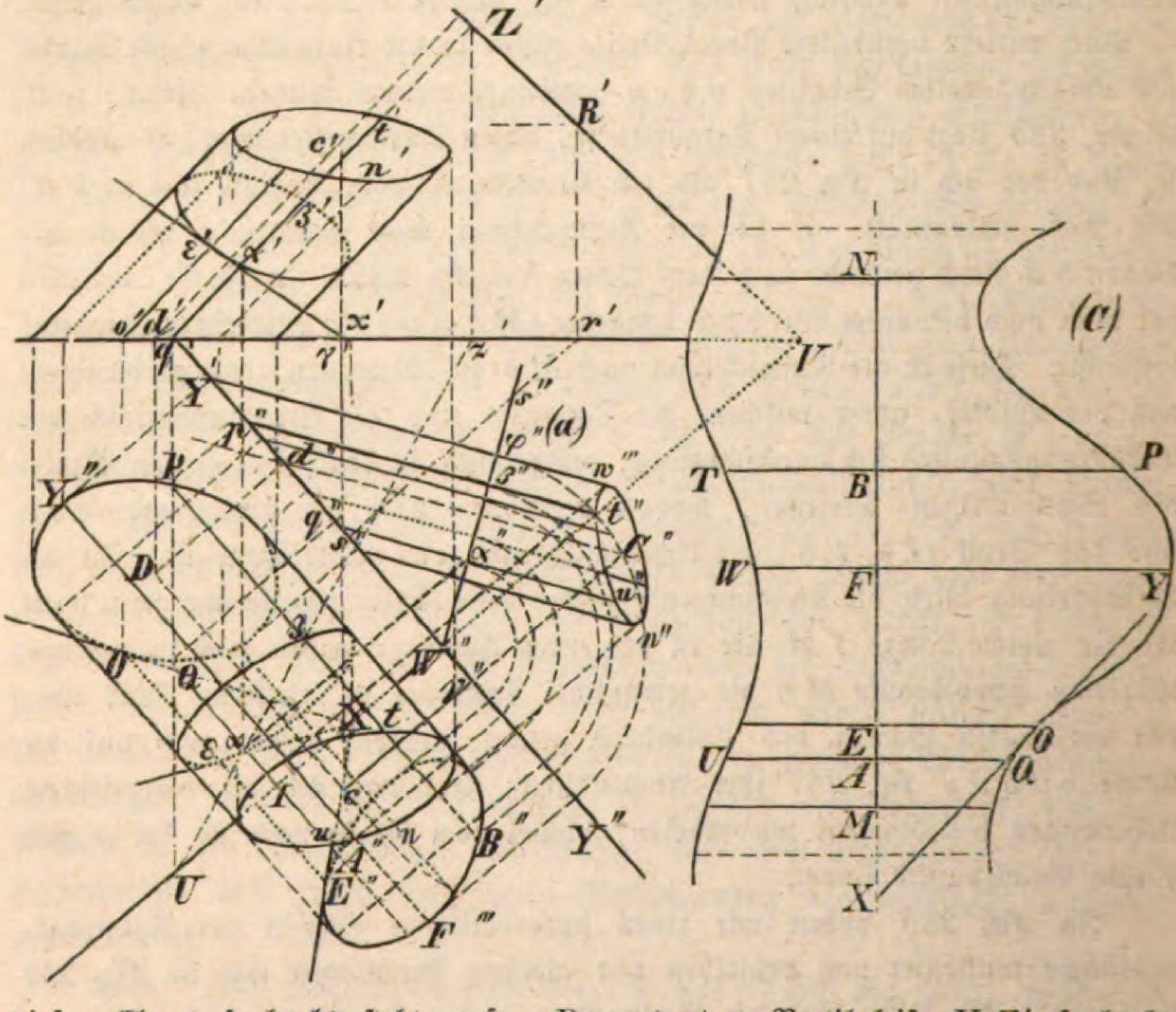
In Fig. 288 haben wir einen hyperbolischen Schnitt der Rotationskegelfläche konstruirt und denselben mit gleichen Buchstaben wie in Fig. 251 bezeichnet. Fig. 289 zeigt die Verstreckung dieses Schnittes, wobei wir nur Zweierlei bemerken wollen. Erstens weil die Kegelfläche längs der Erzeugungslinie $(s\,J, s'\,J')$ geöffnet worden, mußte der obere Hyperbelast sich bei der Verstreckung in zwei Hälften theilen; zweitens, die Kreistangenten $W\,K$, $V\,L$ erhielten in beiden Figuren gleiche Größe, und die Asymptoten $L\,O$, $K\,O$ blieben parallel zu den Erzeugungslinien $V\,S$, $W\,S$.

413. Aufwickelung der schiefen Cylinderfläche Fig. 290. Als Basis der Fläche ist gegeben eine in der Horizontalebene liegende Ellipse

$O\,Q\,P$. Durch ihr Centrum D geht die Achse $(c\,D, c'\,d')$, mittelst welcher die Richtung der geraden Erzeugungslinien festgesetzt wird.

Gerader Schnitt der Cylinderfläche. Durch welchen Punkt der Fläche dieser Schnitt gelegt werde, ist ohne Belang. Seine Ebene muß auf den geraden Erzeugungslinien senkrecht stehen, daher der Horizontalriß $U\,V$

Fig. 290.



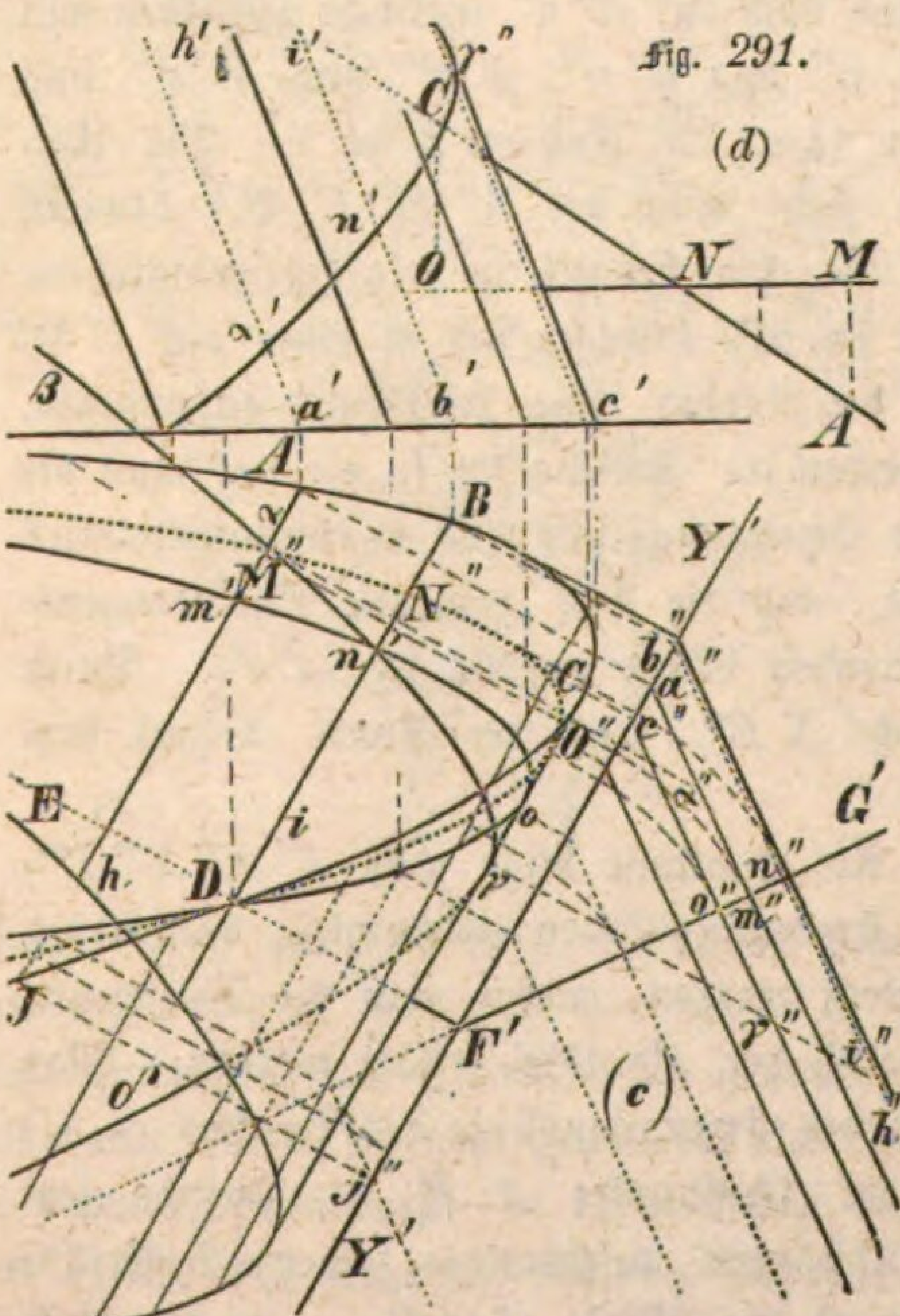
dieser Ebene senkrecht steht auf $c\,D$, und der Vertikalriß $V\,Z'$ senkrecht auf $c'\,d'$. Eine Parallele $q'\,t'$ zu $c'\,d'$ wird als Vertikalprojektion einer Erzeugungslinie der Cylinderfläche genommen. — Man denkt sich durch dieselbe eine Ebene senkrecht gegen die Vertikalebene gelegt; die Senkrechte $q'\,U$ ist deren Horizontalriß; — dieser kreuzt die elliptische Basis in zwei Punkten P, Q, was anzeigt, daß die Ebene $U\,q'\,t$ und die Cylinderfläche sich nach zwei Erzeugungslinien schneiden, deren Horizontalprojektionen die Parallelen $Q\,u$, $P\,t$ sind. Dieselbe Ebene $U\,p'\,t'$ und die Ebene $U\,V\,Z'$ schneiden sich nach der Geraden $(U\,z, q'\,Z')$, welche den Erzeugungslinien in (α, α'),

(β, β') begegnet. Wie diese beiden Punkte des geraden Schnittes können die übrigen, zu dessen Verzeichnung nöthigen festgestellt werden. — Theils diese Arbeit, namentlich aber das Bestimmen der wahren Längen von Erzeugungslinien der Cylinderfläche, beides wird einfacher und praktisch schärfer durch Anwenden einer Seitenprojektion (a), deren Ebene $Y' Y''$ parallel steht mit den Erzeugungslinien der Cylinderfläche. — D projicirt sich nach d'', (c, c') nach c'' (die Höhe $\gamma'' c''$ gleich der Höhe $\gamma' c'$). Mit $c'' d''$ sind die Seitenprojektionen aller Erzeugungslinien parallel; so finden sich $q'' u''$, $p'' t''$ als entsprechende Projektionen von $Q u$, $P t$ 2c. In der Seitenprojektion den Riß $W s''$ der Ebene $U V Z'$ zu finden, dachte man sich durch den Punkt R' des Vertikalrisses eine in der Ebene liegende horizontale Hilfslinie, deren Horizontalprojektion die Parallele $r' s'$ zu dem Risse $U V$ ist. s' als Projektion eines Punktes im Durchschnitt der Ebenen $U V Z'$ und $T' Y'$ muß einer Höhe gleich $r' R'$ entsprechen; diese Höhe ist nach $s' s''$ zu tragen, wodurch $W s''$ sich bestimmt, welches überdies noch auf $d'' c''$ senkrecht geworden sein muß. Die Begegnungspunkte α'', β'' von $q'' u''$, $p'' t''$ und $W s''$ sind herabzuprojiciren auf die Parallelen $Q u$, $P i$ nach α, β 2c. — Die Umlegung des Schnittes $\alpha \varepsilon \beta$, $\alpha' \varepsilon' \beta$ sieht man bei $A'' E'' F'' B''$ bewirkt, indem $U W$ als Charnier diente und der Schnitt in die Horizontalebene niedergelegt ward. Ein jeder Punkt (α, α'') bewegte sich in einer auf $U W$ senkrechten Ebene; bei $W \alpha''$ konnte der Radius seiner Kreisbahn entnommen, um von I nach A'' getragen zu werden 2c. Am Punkte ($\varepsilon, \varepsilon'$) hat man die Tangente ($\varepsilon X$, $\varepsilon' x'$) konstruirt (die Erzeugungslinie des Berührungspunktes trifft in (O, o') die Horizontalebene, und die hier gezogene Ellipstangente $O X$ ist der Horizontalriß der tangirenden Ebene am Punkte ($\varepsilon, \varepsilon'$). Durch Umlegung kommt die Tangente nach $X E'$, weil der Punkt X auf dem Charnier festbleibt.

Die Aufwickelung Fig. (c). Als Richtlinie hiezu muß $A'' E'' F'' B''$, welches auf der Fläche alle geraden Erzeugungslinien rechtwinklig durchkreuzt, in eine gerade Linie $N M$ (c) verstreckt werden, wobei man die Theilpunkte in der Weise markirte, wie es bezüglich der Fig. 286 erklärt worden. Man nahm an, die Fläche sei dazu längs der Erzeugungslinie des Punktes (n, n') geöffnet worden. Nachdem durch die Theilpunkte $A, E, \ldots$ (welche jetzt allerdings nicht mehr in gleichen Abständen aufeinander folgen) Senkrechte auf $N M$ errichtet worden, soll vorerst die Ellipse $O Q P \ldots$ in die Aufwickelung zu übertragen sein. Dies erfordert nur, daß man die wahren Längen der geraden Erzeugungslinien zwischen dem geraden und dem ellip-

tischen Schnitte bestimme und gehörigen Ortes abtrage. Aber diese wahren Längen sind durch die Seitenprojektion (a) ausgedrückt. Für den Punkt (α, α'') z. B., welcher auf MN nach A zu liegen kam, ist $\alpha'' q''$ die entsprechende Länge der Erzeugungslinie, und in der Aufwickelung von A nach Q zu tragen. $Q\,O\,Y\,P\ldots$ ist die also erhaltene Umformung der elliptischen Basis. Diese Umformung konnte, gleich jener Fig. 286, eine symmetrische Gestalt erhalten, dazu aber mußte die Projektion $c\,D$ mit einer von den beiden Achsen der elliptischen Basis übereinstimmen. Was das Uebertragen einer Tangente betrifft, z. B. jener des Punktes O, so ist der Winkel, welchen diese mit der Erzeugungslinie des Berührungspunktes bildet, bestimmt mittels des bei ($\varepsilon, \varepsilon'$) rechtwinkligen Dreieckes ($O\,\varepsilon\,X$, $o'\,\varepsilon'\,x'$). Von diesem Dreieck legt sich die Seite ($\varepsilon\,X$, $\varepsilon'\,x'$)', deren Länge $= E''\,X$, auf den verstreckten Schnitt (c) nach $E\,X$ und $X\,O$ ist die übertragene Tangente, deren Länge $O\,X$ gleich geworden sein muß der Hypothenuse $O\,X$ in erstgenanntem Dreiecke. — Wir haben die Cylinderfläche oberhalb durch eine zweite Ellipse begränzt, und diese gleich der Basis bei $U\,W\,T$ in die Aufwickelung übertragen.

Fig. 291.



414. Uebungs - Aufgabe. Fig. 291. Auf einer in der Horizontalebene liegenden Parabel $A\,B\,C\,D\ldots$ hat sich die Gerade ($A\,h$, $a'\,h'$) parallel fortbewegt, eine Cylinderfläche zu erzeugen: auf dieser Fläche soll eine Spirale verzeichnet werden, deren Steigung bestimmt ist durch das rechtwinklige Dreieck $A\,M\,N$ Fig. (d) und (n, n'); auf der Geraden ($B\,i$, $b'\,i'$) sei der Anfangspunkt.

Konstruktion. Jede cylindrische Spirale muß sich in der Aufwickelung als eine gerade Linie darstellen, welche die geraden Erzeugungslinien schiefwinklig durchschneidet, hier also unter dem Winkel $N\,A\,M$. Man betrachte darum die Fig. (d) als ein Stück der Aufwickelung der parabo-

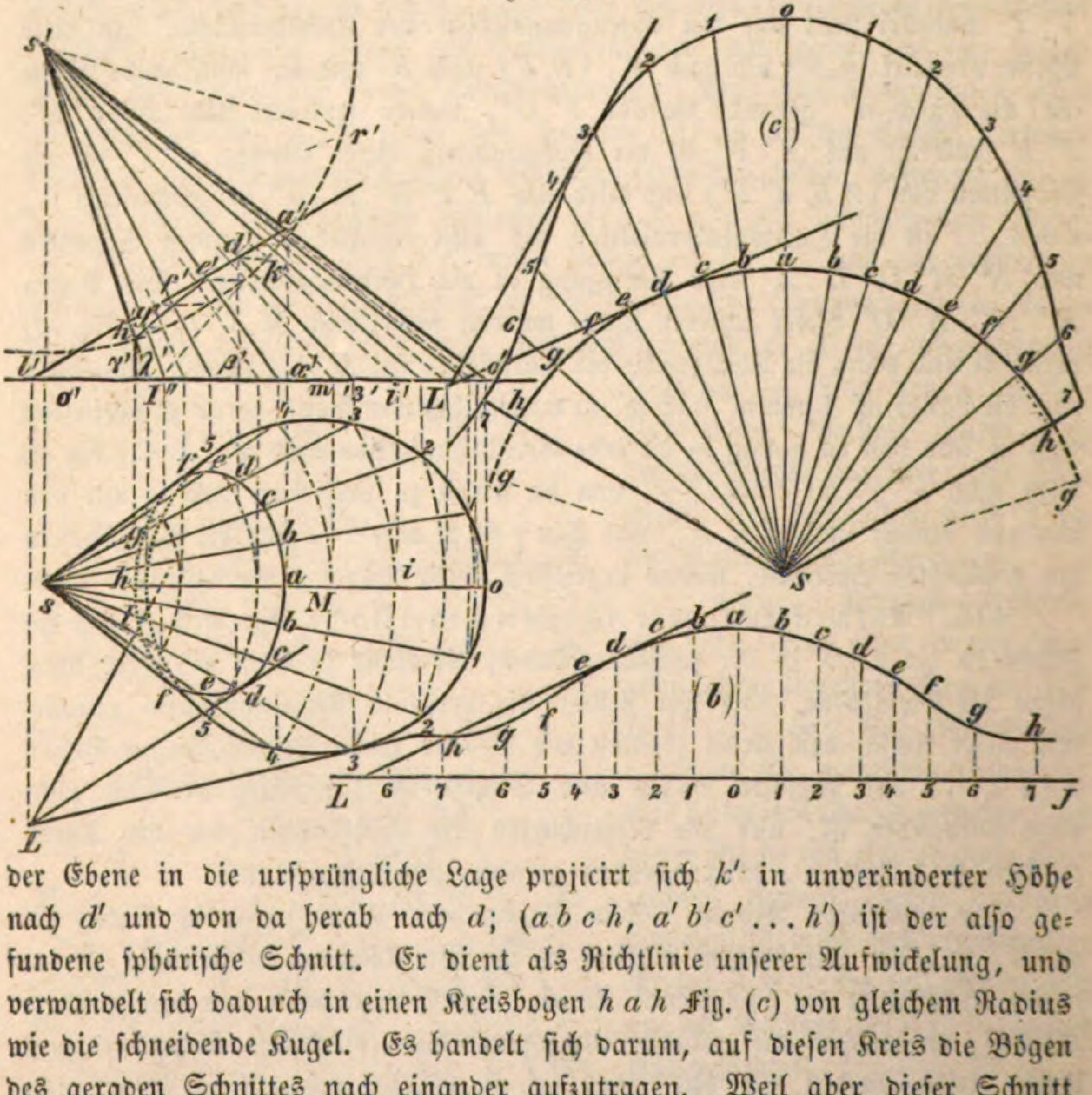
lischen Cylinderfläche, wobei die Erzeugungslinien durch Parallelen mit MA dargestellt sind, und die Spirale durch die Gerade AN. Alsdann ist dies MN die Richtlinie der Aufwickelung, nämlich die Verstreckung des geraden Schnittes, welcher durch (n, n') geht, und welcher zunächst zu verzeichnen bleibt. Zu diesem Behufe ordnen wir alsobald wieder eine Seitenprojektion (c) an, deren Ebene $Y'Y'$ parallel steht mit den Erzeugungslinien der Cylinderfläche. In diese Ebene projicirt (n, n') sich nach n'', (B, b') nach b'' und die schneidende Ebene als die durch n'' gehende Gerade $F'G'$, welche senkrecht steht auf $b''n''$. $F'E$ senkrecht auf $Y'Y'$ ist der Horizontalriß dieser Ebene; $a''h''$ ist die Projektion von $(Ah, a''h'')$ und wird von $EF'G'$ in (m'', m) geschnitten 2c.; $nmo\ldots$ ist die Horizontalprojektion des also erhaltenen geraden Schnittes und $N''M''O''D\ldots$ seine Umlegung in die Horizontalebene. Die Bogen $M''N''$, $N''O''$ dieser letzteren Kurve wurden sofort nach $MNO\ldots$ Fig. (d) verstreckt und durch die Theilpunkte die Parallelen mit MA gezogen. Nun blieb noch die Länge MA von m'' nach α'' zu tragen, letzteren Punkt herab zu projiciren nach α und von da hinauf in die erste Vertikalprojektion nach α'. OC (Fig. d) blieb nach $o''\gamma''$ zu tragen; γ'' von da herab zu projiciren nach γ und von hier aus hinauf nach γ' 2c. 2c., und $\beta\alpha\gamma\delta$, $\beta'\alpha'\gamma'\ldots$ sind die Projektionen der verlangten Spiralen, welche begreiflich ihren Umgang nie vollenden kann.

415. Aufwickelung der schiefen Kegelfläche Fig. 292. Basis der Fläche ist ein Kreis in der Horizontalebene; die Achse $(sM, s'm')$ steht schief gegen die Kreisebene, aber wir stellten die vertikale Projektionsebene parallel mit dieser Achse; den Kreis theilten wir in eine solche Anzahl gleicher Bogen $0\,1, 1\,2, \ldots$ daß zwischen Bogen und Sehne ein Unterschied praktisch nicht mehr vorhanden ist, und wir verzeichneten die Projektionen der den Theilpunkten $0, 1, 2, 3, \ldots$ entsprechenden geraden Erzeugungslinien.

Der sphärische Schnitt. Sein Radius $s'r'$ ist in passender Größe gewählt, und der mit solchem Radius in der Vertikalebene beschriebene Kreisbogen repräsentirt die schneidende Kugel. Der Schnitt wird aus den Punkten gebildet, in welchen die geraden Erzeugungslinien durch die Kugel dringen. Unter diesen ergeben sich die beiden (a', a), (h', h) aus unserer Anordnung der Vertikalprojektion. Für die Punkte auf andern Erzeugungslinien als denjenigen in der Ebene $s\,0$ ist noch eine Zwischenarbeit von Nöthen. Eine durch den Scheitel (s, s') gehende Vertikalebene $s\,3$ z. B. schneidet die Kegelfläche nach zwei Erzeugungslinien, deren eine die Gerade $(s\,3, s'\,3')$; dieselbe Ebene schneidet die Kugel nach einem ihrer größten Kreise, welcher die Gerade in dem Punkte (d', d) des sphärischen Schnittes kreuzt. Dies (d', d) zu

erhalten, denkt man sich, die Ebene *s 3* werde nebst den Linien in ihr um die Vertikallinie *s* als Charnier gedreht und in die Ebene *s 0* gebracht; dadurch legt sich der genannte größte Kreis nach *h' a' r'*, die Erzeugungslinie nach (*s i*, *s' i'*) und beider Begegnungspunkt ist *k'*. Nach dem Zurückbringen

Fig. 292.



der Ebene in die ursprüngliche Lage projicirt sich *k'* in unveränderter Höhe nach *d'* und von da herab nach *d*; (*a b c h*, *a' b' c' . . . h'*) ist der also gefundene sphärische Schnitt. Er dient als Richtlinie unserer Aufwickelung, und verwandelt sich dadurch in einen Kreisbogen *h a h* Fig. (*c*) von gleichem Radius wie die schneidende Kugel. Es handelt sich darum, auf diesen Kreis die Bögen des geraden Schnittes nach einander aufzutragen. Weil aber dieser Schnitt keine ebene Linie bildet und die wahren Längen seiner Bögen aus keiner Projektion unmittelbar entnommen werden können, so tritt hier die Forderung auf, eine windische oder doppelt gekrümmte Linie ohne Veränderung ihrer Länge in eine neue, ebene Kurve umzuwandeln. Dies geschieht im Allgemeinen dadurch, daß man die Linie mit einer ihrer projicirenden Flächen aufwickelt, wie in Fig. (*b*). Auf der Geraden *L J* wurden hier von dem Punkte *0* aus

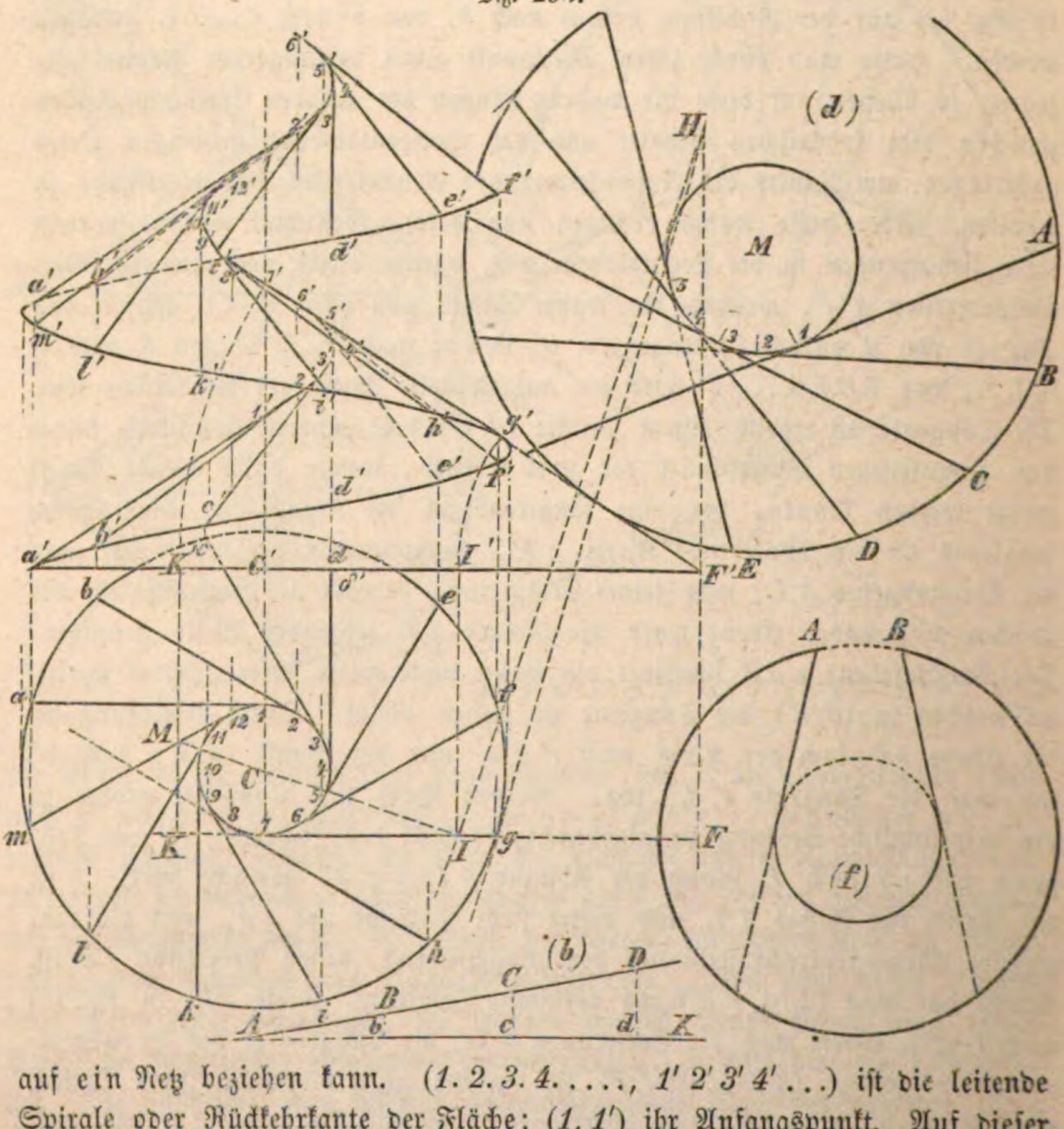
die Bögen der Horizontalprojektion *a b, b c, c d, ...* ꝛc. nach *0 1, 1 2, 2 3, ...* ꝛc. getragen, in jedem Punkte eine Senkrechte errichtet und diesen die aus der Vertikalprojektion zu entnehmenden Längen gegeben. Man hatte z. B. die Höhe $\alpha' a'$ von *0* nach *a* zu tragen, die Höhe $\gamma' h'$ von *7* nach *h*, die Höhe $\beta' d'$ von *3* nach *d* ꝛc., um in *h g f e ... h* den mit seiner horizontalprojicirenden Cylinderfläche aufgewickelten geraden Schnitt zu erhalten. Sofort konnten die Bögen *a b, b c, c d ...* wiederum aus Fig. (*b*) entnommen und in Fig. (*c*) auf der Richtlinie von *a* nach *b*, von *b* nach *c ...* ꝛc. getragen werden. Hatte man durch jeden Theilpunkt einen verlängerten Radius gezogen, so blieben auf diese die wahren Längen der geraden Erzeugungslinien zwischen dem sphärischen Schnitt und der Horizontalebene gehörigen Ortes abzutragen, um Punkte der Aufwickelung des Grundkreises der Kegelfläche zu erhalten. Aber diese wahren Längen sind bereits bestimmt worden mittelst ihrer Umlegungen in die Vertikalebene *s 0*, darum bleibt noch aus der Vertikalprojektion $k' i'$, welches die wahre Länge von $(d\,3,\ d'\,3')$ angiebt, in Fig. (*c*) von *d* nach *3* zu tragen, $a'\,0'$ von *a* nach *0*, $h'\,7'$ von *h* nach *7* u. s. f., und *7 6 5 4 ... 7* wird die aufgewickelte Basis der Kegelfläche sein. Die Tangente an irgend einem Punkte (d, d') des geraden Schnittes bildet den gegenseitigen Durchschnitt der zwei Ebenen, welche durch diesen Punkt gelegt werden können, die eine tangirend an die Kegelfläche, die andere tangirend an die schneidende Kugel. Als Horizontalriß der ersten hat man die Kreistangente *3 L*, was keiner Erläuterung bedarf; als Horizontalriß der zweiten tangirenden Ebene ward die Gerade *I L* folgender Weise gefunden: Die Vertikalebene *s d 3* schneidet die Kugel nach einem ihrer größten Kreise, an welchen in (d, d') die Tangente zu ziehen bleibt. Durch Umlegung in die Ebene *s 0* kam der Kreis nach $r'\,a'\,h'$ und der Punkt (d, d') nach k', wo man die Tangente $k'\,I''$ zog. Werden Kreis und Tangente wieder in die ursprüngliche Stellung zurückgebracht, so fällt der Fußpunkt I'' der Tangente auf *s 3* nach *I*, indem der Abstand $s\,I = \sigma'\,I''$ gemacht wird. *I* ist ein Punkt des Risses *I L* und dieser steht senkrecht auf *s d*, weil die tangirende Ebene senkrecht steht auf dem Kugelradius, dessen Projektion *s d* ist. Somit hat man $(L\,d,\ l'\,d')$ als verlangte Tangente. Diese fällt in Fig. (*b*) nach *L d**), indem man der Entfernung *3 L*, die Länge *d L* der Horizontalprojektion giebt. $(3\,d\,L,\ 3'\,d'\,l')$ ist ein bei (d, d') rechtwinkliges Dreieck, welches, nach *3 d L* Fig. (*c*) übertragen, hier die Tangente *L 3* des aufgewickelten Grundkreises liefert. Es wird nämlich die Tangente des sphärischen

* *L* liegt innerhalb der Hauptfigur links.

Schnittes zur Kreistangente $d\,L$ und die Hypotenuse $L\,3$ erhält die Länge $L\,3$ der Horizontalprojektion.

416. **Aufwickelung eines Helikoides** Fig. *293*. Es ist hier die Fläche dargestellt im Allgemeinen wie in Fig. *155*, mit der Unterscheidung jedoch, daß wir nur das untere Flächennetz gegeben haben, weil die Aufwickelung solcher Flächenarten bei praktischer Ausführung sich jedesmal nur

Fig. 293.



auf ein Netz beziehen kann. $(1.\,2.\,3.\,4.\ldots.,\ 1'\,2'\,3'\,4'\ldots)$ ist die leitende Spirale oder Rückkehrkante der Fläche; $(1, 1')$ ihr Anfangspunkt. Auf dieser Spiralen gleitet die Erzeugungslinie $(a\,1, a'\,1')$ tangirend fort. Der Kreis $a\,b\,c\,d\ldots$ gilt als Basis einer koncentrischen Cylinderfläche, welche das

Helikoid nach der begränzenden Spiralen (*a b c* . . ., *a' b' c'* . . .) durchschneidet. — Durch die Aufwickelung verwandeln sich alle auf dem Helikoide vorhandenen Schraubenspiralen in Kreise und zwar in koncentrische Kreise. Dies zu erfassen, wolle erwogen werden, daß Kreis- und Schraubenlinie in allen ihren Punkten die gleiche Krümmung haben. Denkt man sich beide Linien in ihre Elemente zerlegt und verlängert dieselben zu Tangenten, so bilden je zwei aufeinanderfolgende Tangenten einen unendlich kleinen Winkel, welchen wir den Kontingenzwinkel genannt. Sind nun den Linienelementen gleiche Längen zugedacht worden, so müssen bei der Schraubenspirale gleichwie beim Kreise alle Kontingenzwinkel unter sich gleich erachtet werden. Die Tangenten der Schraubenspiralen bilden in der Gesammtheit ein aufwickelbares Helikoid, eine Ebene durch zwei aufeinanderfolgende Tangenten gelegt ist tangirend zur Fläche. Wird diese nun in die tangirende Ebene aufgerollt oder gewickelt, so erleiden dadurch die Kontingenzwinkel keine Veränderung ihrer Größe, und die Spirale verwandelt sich in eine ebene Linie mit gleichen Kontingenzwinkeln, d. i. in einen Kreis. Die Rückkehrkante des Helikoides kann darum als Richtlinie der Aufwickelung in Thätigkeit treten. Wolle ferner erwogen werden, daß die Stücke aller geraden Erzeugungslinien zwischen den beiden Cylinderflächen, deren Basen die Kreise *1 2 3* . . ., *a b c* . . ., daß diese Stücke, sage ich, unter sich von gleicher Länge sind, daß darum durch die Aufwickelung diese Geraden zu gleichlangen Kreistangenten werden, weshalb ihre Endpunkte sich auf einen, dem erstgenannten koncentrischen Kreis reihen müssen. Dieser Kreis aber ist die durch das Aufwickeln umgestaltete Schraubenspirale (*a b c* . . ., *a' b' c'*). Als Ebene der Aufwickelung werde die tangirende Ebene des Helikoides am Punkte (*g*, *g'*) gewählt, so daß *g 7* zur vertikalen Projektionsebene parallel liegt. Die tangirende Ebene geht durch die Tangente (*g H*, *g' F'*) der Gränzspiralen und durch die Tangente (*g 7*, *g' 7'*) der Rückkehrkante. Denkt man sich in (*g*, *g'*) und in der tangirenden Ebene einen Perpendikel auf die erste Tangente errichtet, und in (*7*, *7'*) einen Perpendikel auf die zweite Tangente, dann müssen beide Perpendikel sich im Centrum der gesuchten Kreise kreuzen, und diese sind damit bestimmt. Nachdem nun die verstreckte Länge des Bogens *g f d a* auf *g H* aufgetragen worden, muß *H* der Ort sein, wo die erste Spiraltangente durch die Horizontalebene dringt; von der zweiten Tangente wird dieselbe Ebene in (*F' F*) geschnitten, wonach *H F* Horizontalriß der tangirenden Ebene ist und welcher Riß (§. 182) senkrecht auf *7 F* stehen muß. Um dies *F H* als Charnier wird die tangirende Ebene gedreht und in die Horizontalebene niedergelegt. Dadurch fällt (*g*, *g'*)

nach (I, I'), also die erste Tangente $(g\,H, g'\,F')$ nach $H\,I$ und ihr Perpendikel nach $I\,M$. Von der zweiten Tangente $(F\,7, F'\,7')$ fällt der Berührungspunkt $(7, 7')$ nach $(K\,K')$ und der Perpendikel nach $K\,M$. Somit ist M als Centrum, $M\,I$ als Radius der umgeformten äußeren Spirale und $M\,K$ als Radius der umgeformten Rückkehrkante gefunden. Mit diesen zwei Radien sind in Fig. (d) die zwei koncentrischen Kreise beschrieben. Nachdem ferner in Fig. (b) bei $A\,D$ ein Stück der Gränzspiralen mit ihrer Cylinderfläche aufgewickelt worden ($A\,b$, $b\,c$, $c\,d$ gleich den Kreisbögen $a\,b$, $c\,d$, die Höhe $d\,D$ gleich der Höhe $\delta'\,d'$ 2c.), hat man einen der Theile $A\,B$ in Fig. (d) beliebige Male auf den äußeren Kreis von A nach B, von B nach C... 2c. getragen und durch die Theilpunkte Tangenten $A\,1$, $B\,2$, $C\,3$,... an den inneren Kreis gezogen. Als physische Fläche kann man die Fig. (d), wie schon gesagt, nur zur Darstellung eines der Flächennetze des Helikoides benützen; wie denn jedes Blatt Papier, dem man durch Ausschneiden die Form von Fig. (f) gegeben hat, durch Auseinanderziehen der beiden Spitzen A, B in die Form einer helikoidischen Zone gebogen werden kann. Wäre in unserer Figur der Schnitt des Helikoides durch die horizontale Projektionsebene verzeichnet worden, welcher Schnitt bekanntlich die Evolvente des Kreises $a\,b\,c$ ist, und hätte man diesen Schnitt in die Aufwickelung Fig. (d) übertragen, würde er sich zur Evolventen des Kreises $A\,B\,C$... umgestaltet haben.

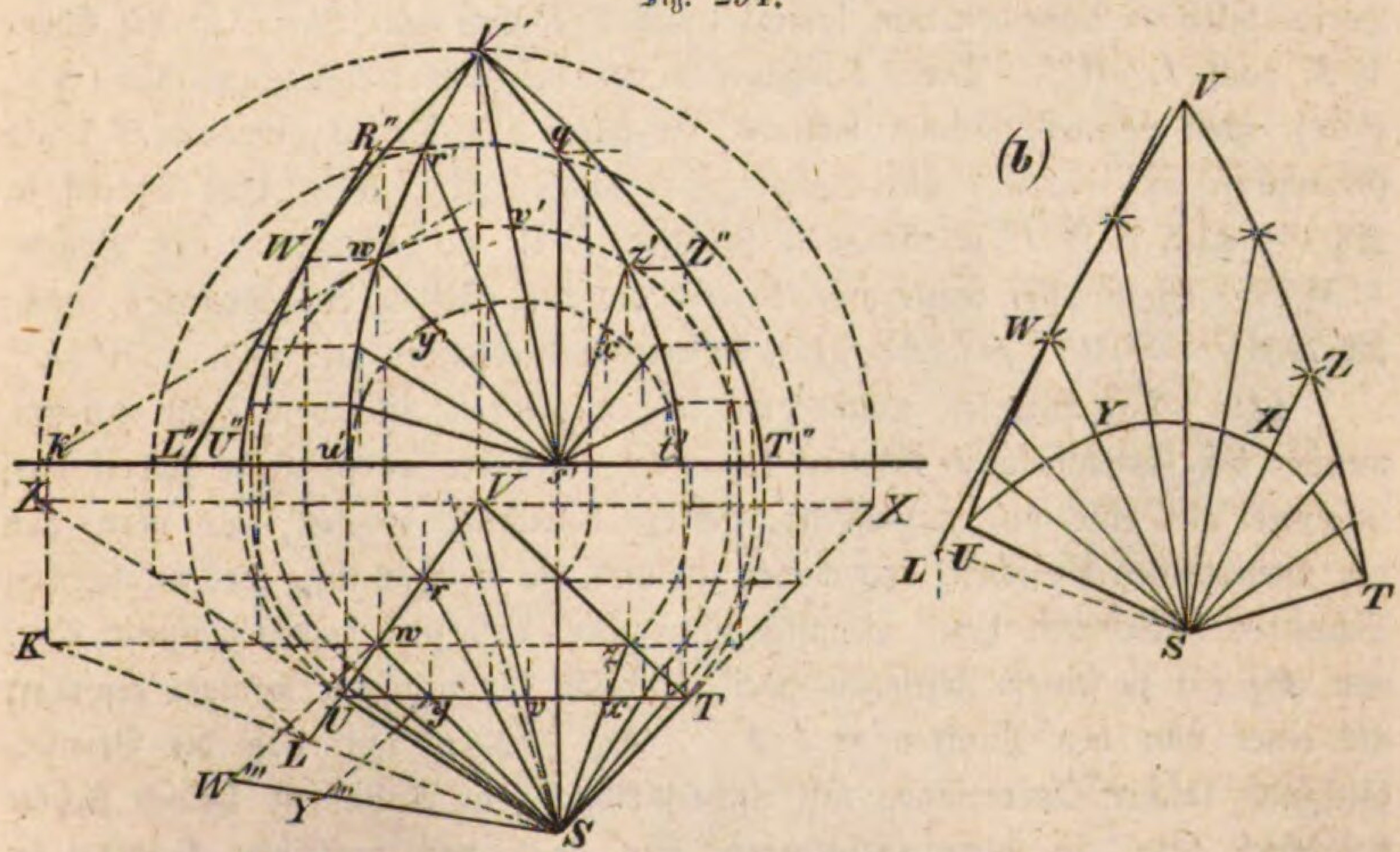
Annähernde Aufwickelungen.

417. Worin das Wesentliche und Charakteristische der Verstreckung aufwickelbarer Flächen bestehe, wird durch die vorhergehenden Ausführungen klar geworden sein, insofern man den Gegenstand rein theoretisch auffaßt. Allein theils in praktischer Beziehung, theils zu mehrerer Feststellung der Begriffe im Allgemeinen, haben wir noch Einiges beizufügen. Die Methode des Verstreckens einer aufwickelbaren Fläche mittelst einer Richtlinie, deren Gestalt auf der Fläche wie in der Aufwickelung bekannt ist, muß als völlig begründet erachtet werden, aber sie findet ihre Anwendung außer bei Kegel- und Cylinderflächen nur in den einzelnen Fällen, wobei eben eine Richtlinie angegeben werden kann. Fordert man dagegen die Aufwickelung einer Fläche, von welcher eine solche Richtlinie nicht bekannt ist, dann erübrigt nur eine, in theoretischem Sinne annähernd richtige Methode, welche darin besteht, daß man die Fläche in Elemente von endlicher, meßbarer Dimension zerlegt. Streng genommen haben wir in allen seitherigen Fällen auch nichts Anderes gethan, denn ward z. B. der Kreis $a\,b\,c$... Fig. 284 in 24 gleiche Theile zerlegt, so haben wir thatsächlich in Fig. 286 die Aufwickelung eines

in den Cylinder eingeschriebenen Prisma von 24 Kanten ausgeführt. Dies ist zwar ein Umstand, welcher sich bei fast jeglicher Anwendung geometrischer Sätze auf praktische Fälle bemerkbar macht, allein es zeigt auch, daß wir, um gleich wieder zur Sache zurückzukehren, in Fig. 292 (*c*) bezüglich der Linie 7 6 5 4 .... keinen merkbaren Fehler begangen haben würden, wenn, mit gänzlicher Beseitigung des sphärischen Schnittes, einfach die Dreiecke $S\,0\,1$, $S\,1\,2$ ... ꝛc. den Dreiecken $(s\,0\,1, s'\,0'\,1')$, $(s\,1\,2, s'\,1'\,2')$ ... ꝛc. gleich gemacht worden wären.

418. Die Fig. 294 soll noch zu näherer Erörterung dienen. Der Scheitel (S, s') einer schiefen Kegelfläche liegt in der Horizontalebene und ihre Basis ist ein Kreis in der Vertikalebene $T\,U$, von welchem jedoch nur die obere Hälfte zur Konstruktion gezogen ward. Zu $T\,U$ steht die Vertikalebene parallel und der genannte Halbkreis projicirt sich darauf in wahrer Gestalt nach $t'\,x'\,y'\,u'$. Die Kegelfläche ist durch zwei Vertikalebenen

Fig. 294.



$T\,V$, $U\,V$ begränzt, welche dieselbe nach zwei hyperbolischen Bögen schneiden. $t'\,z'\,V'$, $u'\,w'\,V'$ sind deren Vertikalprojektionen, und $V'\,W''\,U''$, $V'\,Z''\,T''$ deren Umlegungen in die Vertikalebene $X\,V\,X$. Weil die Schnitte der Erzeugungslinien und der projicirenden Senkrechten oberhalb $W''\,Z''$ sehr schräg ausfallen, hat man zur Konstruktion der Punkte (w, w'), (z, z') Kreisschnitte des Kegels $(Q\,R, q'\,z'\,w'\,r')$ angewendet, wie aus der Figur klärlich

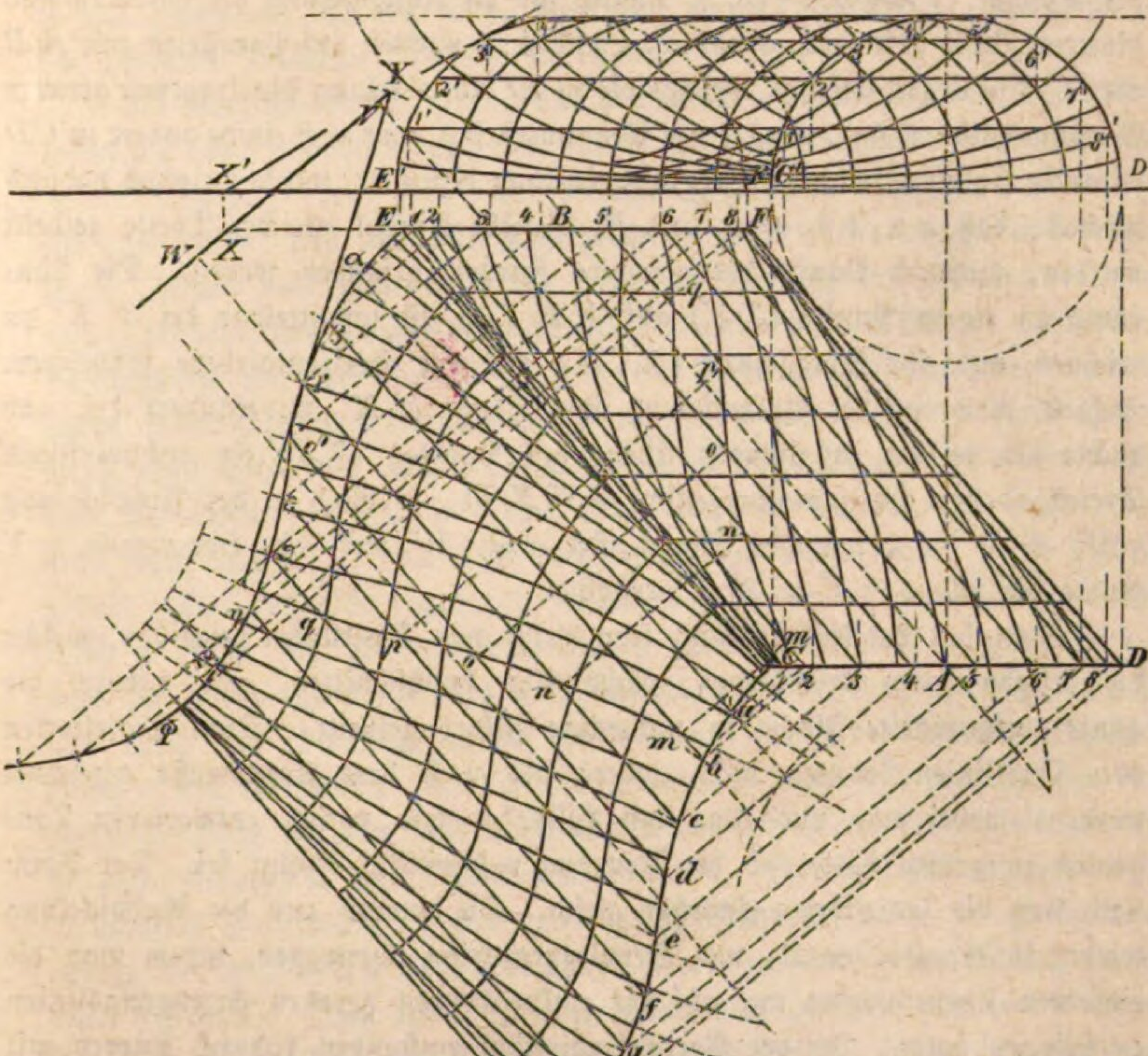
erhellt. Durch eine Anzahl von Erzeugungslinien, wie ($S\,y\,w$, $s'\,y'\,w'$) ꝛc., ward die Kegelfläche in Theile zerlegt, welche wir als Dreiecke betrachteten, um durch deren Aneinanderreihen die Aufwickelung Fig. (b) zu gewinnen. Zwei benachbarte Erzeugungslinien und ein als geradlinig betrachtetes hyperbolisches Bogenstück, Tangirende wie $V'\,R''$, $R''\,W''$ ꝛc., bilden je ein Dreieck. Ihre wahren Längen zu gewinnen, wurden die Erzeugungslinien auf die Horizontalebene niedergelegt, so unter anderen ($S\,y\,w$, $s'\,y'\,w'$) nach $S\,Y'''\,W'''$ ꝛc. Der Kreis ($T\,U$, $t'\,x'\,u'$) verwandelte sich (Fig. b) in die Linie $T\,X\,Y\,U$, und jeder der hyperbolischen Bogen in die mit gleichen Buchstaben bezeichnete Kurve Fig. (b).

Die Tangente an einem Punkte (w, w') des Schnittes $U\,V$ zu erhalten, zog man an den Kreis dieses Punktes die Tangente ($w\,K$, $w'\,k'$), welche die Horizontalebene in (K, k') durchdringt, womit sich die Gerade $S\,K$ als Horizontalriß der tangirenden Ebene des Punktes (w, w') ergiebt. Die gesuchte Tangente muß deshalb in L, dem Kreuzungspunkt von $S\,K$ und $V\,U$, die Horizontalebene schneiden und kommt durch Drehung ihrer Ebene in die Ebene $V\,X$ nach $L''\,W''$. Diese Tangente bildet mit der Erzeugungslinie ($S\,w$, $s'\,w'$) einen Winkel, welcher bestimmt ist durch das Dreieck, wovon $S\,L$ als Grundlinie und (w, w') als Spitze zu betrachten ist. Wird dies Dreieck in Fig. (b) nach $S\,W\,L$ übertragen, so wird $L\,W$ zur Tangente des Bogens $U\,W\,V$. Hiezu aber kennt man bereits die drei Seiten des Dreieckes, nämlich $S\,W = S\,W'''$, $S\,U = S\,U$ der Horizontalprojektion und $W\,L = W''\,L''$.

419. Das Beispiel, welches wir soeben gegeben, ist einem Falle entlehnt, welcher bei Gewölbekonstruktionen sich zeigt, und die ausgeführte Arbeit darf insoweit als eine nur annähernd richtige bezeichnet werden, als man von der theoretischen Vorschrift abgewichen ist und die Verzeichnung des sphärischen Schnittes unterdrückt hat. Beachtet man aber, daß jetzt jeglicher Punkt Z ꝛc. von Fig. (b) zu seinem Festsetzen zwei graphische Operationen weniger erfordert als einer von den Punkten $0, 1, 2 \ldots$ Fig. 292 (c) und daß die Vervielfältigung solcher Operationen fast unvermeidlich ein Anhäufen kleiner Fehler befürchten läßt, so wird anzunehmen sein, daß das praktische Resultat in Fig. 294 jenem in Fig. 292 an Genauigkeit kaum nachstehen dürfte. — Ganz entschieden wird dies der Fall sein bei der Aufwickelung einer schiefen, kreisrunden Cylinderfläche, wovon Fig. 295 ein Beispiel giebt. Dies Beispiel entspricht seiner äußern Form nach wieder einem Fall des Gewölbebaues. Die Achse $A\,B$ der Cylinderfläche liegt in der Horizontalebene, und wir ziehen zu unserer Konstruktion nur die über dieser Ebene liegende Flächenhälfte.

Ihre Basis ist ein Kreis, bezüglich Halbkreis, in der Vertikalebene $C\,D$, mit welcher die vertikale Projektionsebene parallel steht; $C'\,1'\,2' \ldots D'$, die Vertikalprojektion desselben, ist in eine ungerade Zahl gleicher Bögen getheilt (wir konnten deren nur 9 annehmen), und durch die Theilpunkte gehend sind eben so viele gerade Erzeugungslinien entworfen worden. Man dachte sich

Fig. 295.



die Cylinderfläche in die tangirende und vertikal stehende Ebene $C\,E$ aufgewickelt und alsdann mit dieser Ebene in die Horizontalebene niedergelegt. Nach geschehener Bewegung kamen die Erzeugungslinien parallel zu ihrer ursprünglichen Lage in die Horizontalebene zu liegen und ihre Endpunkte bewegten sich in Vertikalebenen, welche auf $A\,B$ senkrecht stehen. Man hatte

daher durch $1, 2, 3, 4 \ldots$ auf CD wie $EF \ldots$ Senkrechte gegen AB zu ziehen, nämlich die Geraden $1\,a$, $2\,b, \ldots$ $1\,\alpha$, $2\,\beta$ .. sodann mit $C'\,1'$ oder $1'\,2'$ ꝛc. als unveränderlichem Radius aus C auf der ersten Senkrechten $1\,a$ den Punkt a abzuschneiden, aus E den Punkt α, sodann aus a auf der zweiten Senkrechten $2\,b$ den Punkt b, und aus α den Punkt β, ferner aus b auf der dritten Senkrechten den Punkt c, und aus β den Punkt γ ꝛc. Dadurch waren bei $a\,b\,c\,d \ldots$ und $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \ldots$ Punkte für die Aufwickelung der vorderen und hinteren Basis gefunden. a und α, b und β ꝛc. mußten auf Parallelen mit AB oder CE zu liegen kommen, welches die in die Aufwickelung übertragenen geraden Erzeugungslinien sind. Außer den Genannten hat man noch einige andere zu CD parallele Halbkreisschnitte in der Aufwickelung bestimmt, welches einfach dadurch geschah, daß $a\,\alpha$, $b\,\beta$, $c\,\gamma \ldots$ ꝛc. in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt wurden, wodurch Punkte der gesuchten Kurven gefunden waren. Die Tangente an einem Punkte $(3, 3')$ auf EF z. B. ist unmittelbar bei $3'\,X'$ zu zeichnen und ihr Durchschnitt (X', X) mit der Horizontalebene festzusetzen. Behielt man in der Aufwickelung ihre Länge $3'\,X'$ unverändert bei und dachte sich in der tangirenden Ebene des Punktes $(3, 3')$ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Horizontalprojektion $3\,V\,X$ ist, so blieb in der Aufwickelung $\gamma\,W = 3\,V$; der rechte Winkel fiel nach W und die Hypotenuse $\gamma\,Y$ mußte die Länge $\gamma\,Y = 3'\,X'$ erhalten.

Man hat der Aufwickelung eine Reihe von Querlinien beigefügt, welche die aufgewickelten Kreiskurven rechtwinklig durchschnitten, und dadurch die ganze aufgewickelte Fläche in rechteckige Felder getheilt. Diese Trajektorien oder Querlinien konnten nicht anders als nach dem Augenmaße gezeichnet werden, wobei man nur etwa mit Hilfe der wie vorhin entworfenen Tangenten zu prüfen hatte, ob die Kreuzung rechtwinklig erfolgt sei. Der Form nach sind die Trajektorien einander gleich. Sie wurden aus der Aufwickelung wieder in die Horizontal- und Vertikalprojektion übertragen, indem man die einzelnen Kurvenpunkte nur auf die entsprechenden geraden Erzeugungslinien zu bringen hatte. In der Vertikalprojektion entstanden dadurch Kurven mit Rückkehrpunkten am oberen Umrisse der Cylinderfläche. — Das hier angewendete Verfahren bei der Aufwickelung ist theoretisch nur annähernd richtig; allein praktisch erachten wir die Genauigkeit des Erzeugnisses für mindestens eben so scharf, als es bei Anwendung des geraden Schnittes zu hoffen gewesen wäre.

Ein Wort über annähernde Verstreckung nicht aufwickelbarer Flächen oder Flächentheile.

420. Erforderniſſe theils wiſſenſchaftlicher, theils praktiſcher Art haben zu Bemühungen geführt, aus ebenen Flächen durch Aufrollen oder Biegen auch ſolche Formen herzuſtellen, welche ihrer geometriſchen Natur nach nicht zu der Gattung der aufwickelbaren Flächen gehören, oder umgekehrt, ſolche Flächen durch eine Art von Aufwickelung in ebene Flächen umzugeſtalten. Es begreift ſich, daß hiebei der Begriff von Annäherung in ſehr weitem Sinne genommen werden muß, weil es, ſtreng genommen, unmöglich iſt, der geſtellten Forderung Genüge zu leiſten.

Die Rotationsflächen z. B., und wir ſprechen namentlich von Sphäroiden, laſſen ſich durch unendlich nahe aufeinander folgende Parallelkreiſe in elementare Zonen zerlegen, deren jede einer Rotationskegelfläche angehört. Man kann ſich nun denken, daß alle dieſe Kegelzonen in eine Ebene ausgebreitet worden ſeien. Allein dies wäre immerhin keine Aufwickelung des Sphäroides, weil deſſen ausgebreitete Parallelzonen kein zuſammenhängendes Ganzes mehr bilden. Gleicherweiſe ſind bei Rotationsflächen die Elemente zwiſchen zwei unendlich nahen Meridianebenen cylindriſcher Natur, und mit Aufheben ihres Zuſammenhanges laſſen ſich auch dieſe Elemente in einer Ebene ausbreiten. Wird dies Verfahren auf Parallel- oder Meridianzonen angewendet, welche zwar nicht mehr unendlich, aber doch verhältnißmäßig ſchmal ſind, ſo iſt das Ergebniß geometriſch nicht begründet; allein es kann praktiſchen Zwecken genügen. Sind z. B. in Fig. *296* die Projektionen eines Sphäroides gegeben und es wird an einem Punkte b' des Hauptmeridianes die Tangente $b'd'$ gezogen, und durch den Berührungspunkt ſowie durch einen benachbarten Meridianpunkt e' der betreffende Parallelkreis gelegt, ſo kann mit annähernder Richtigkeit die Zone zwiſchen beiden Parallelkreiſen betrachtet werden, als gehörten ſie einer Kegelfläche an, deren Scheitel in d'. Die Horizontalprojektion des Sphäroides ward durch 18 gleichentfernte Meridianebenen in 36 gleiche Theile zerlegt, der Art, daß je zwei benachbarte Meridianebenen einen Winkel von 10° unter ſich bilden. Das ſpindelförmige Flächenſtück zwiſchen zwei ſolcher Ebenen läßt ſich mit annähernder Genauigkeit als cylindriſche Fläche behandeln und in eine Ebene aufrollen, wie dies bei $P\,0\,P\,10$ in der Nebenfigur *297* geſchehen. Hierzu hat man, durch ähnliche Theilung wie unten, den elliptiſchen Meridian in Bögen von 10° getheilt, dieſe der Reihe nach auf der Geraden PP von *0* auf- und abwärts getragen und durch die Theilpunkte wagrechte Linien gezogen. Jedem Punkte Fig. *296* entſpricht ein Parallelkreis, deſſen Bogen zwiſchen den Ebenen *0* und *10* der Horizontalprojektion verſtreckt und auf die zugehörige Wagrechte Fig. *297* getragen ward. Die Endpunkte

bestimmten eine krumme Linie *P 10 P*, welches die cylindrische Aufwickelung des Meridianes 10° ist.

Man hat das Verfahren ausgedehnt auf drei Meridianebenen, beiderseits von *0*, und jegliche in 10° Abstand von der andern. So ist *P 30 P 30*

Fig. 296.

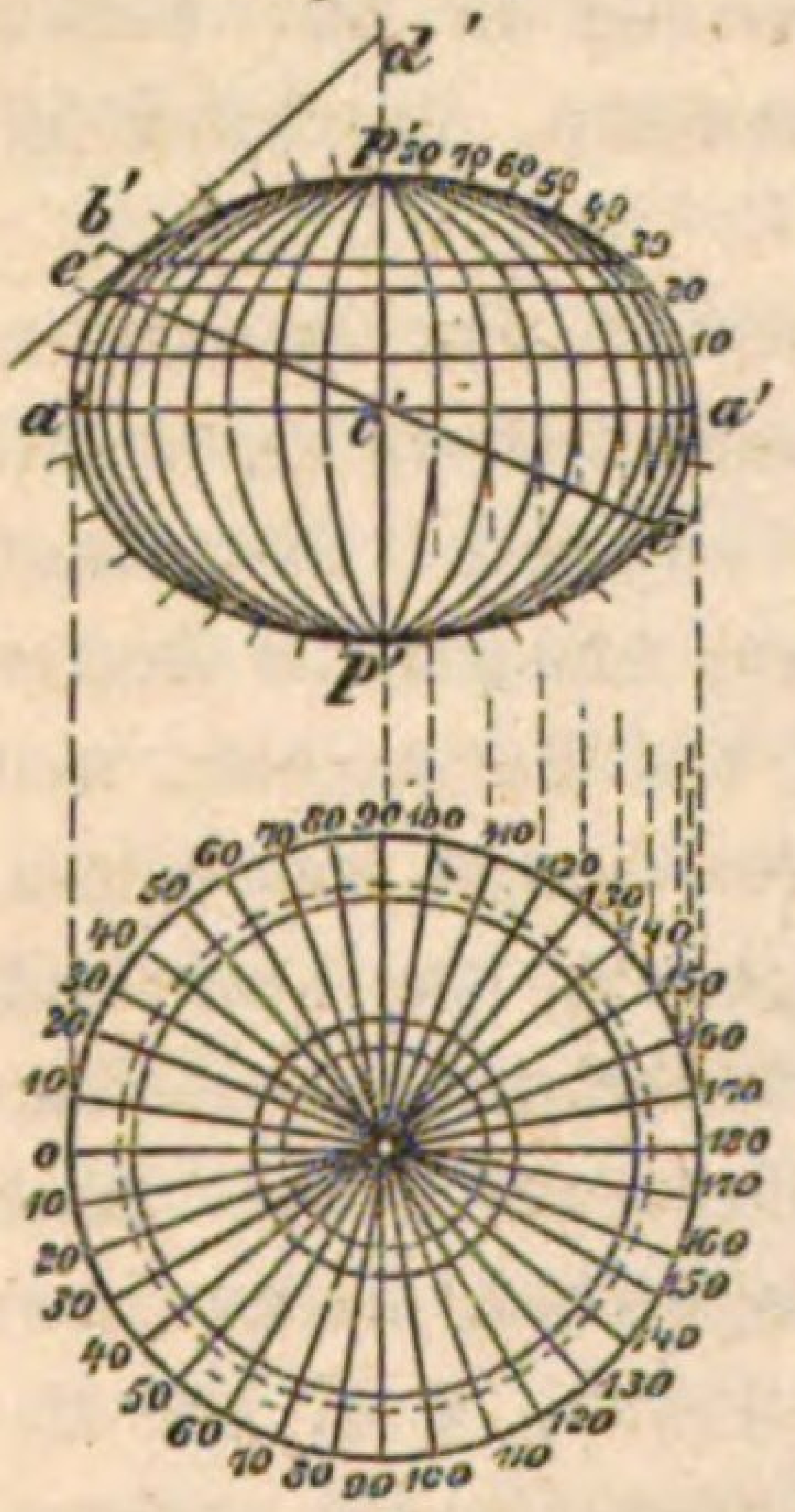


Fig. 297.



Fig. 300.

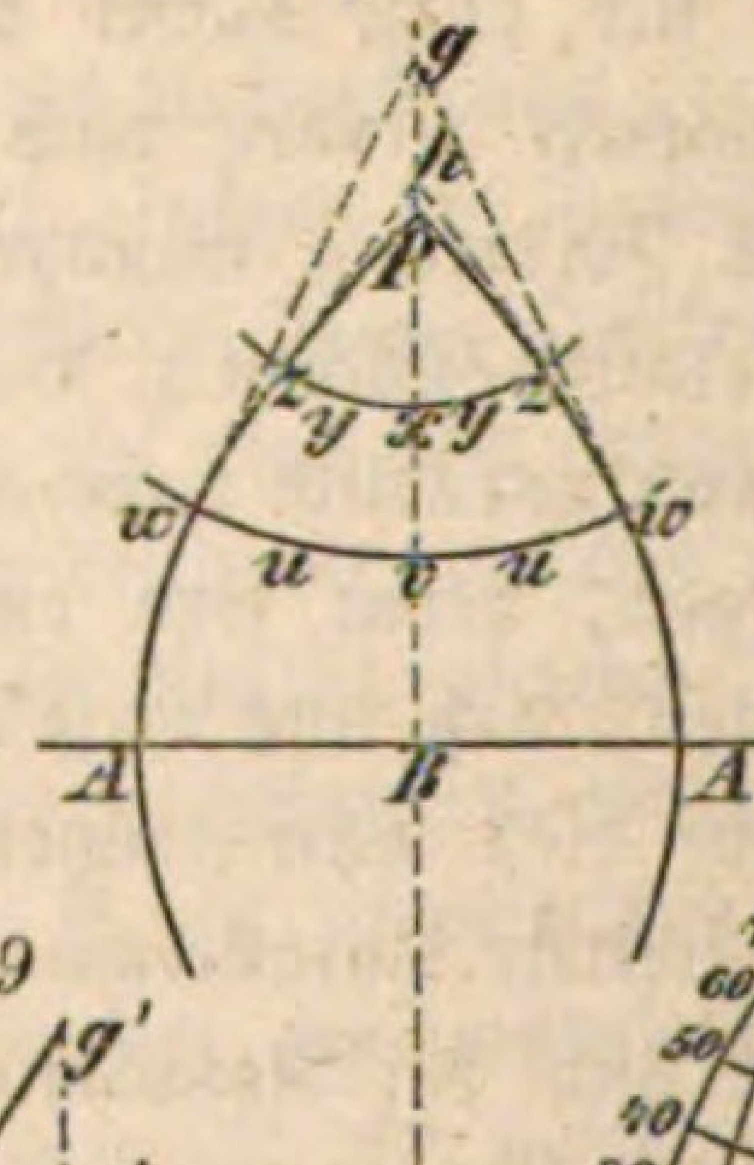


Fig. 301



Fig. 299

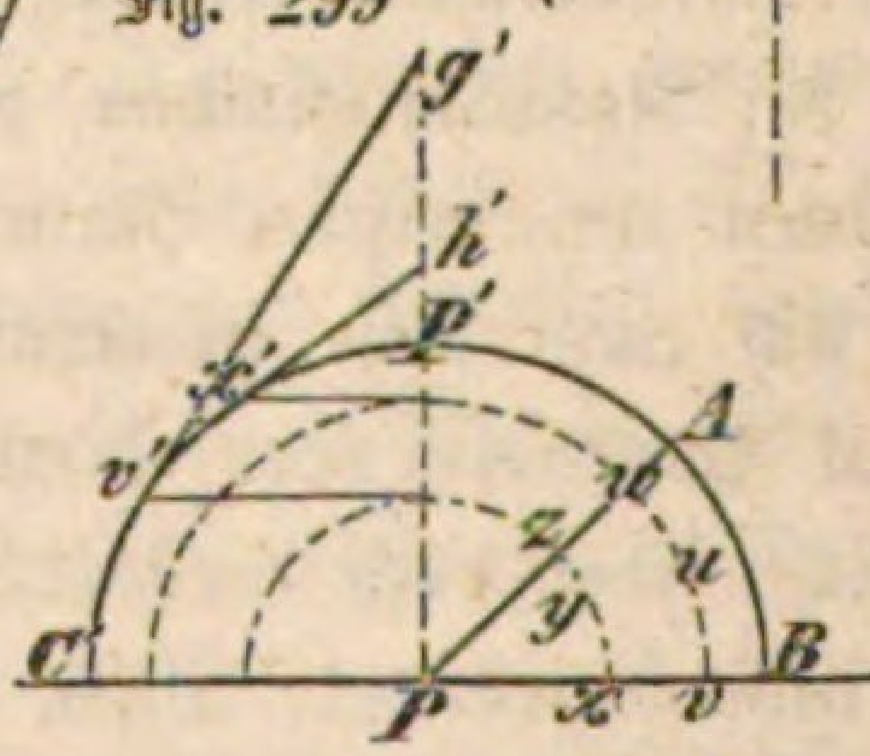


Fig. 298.

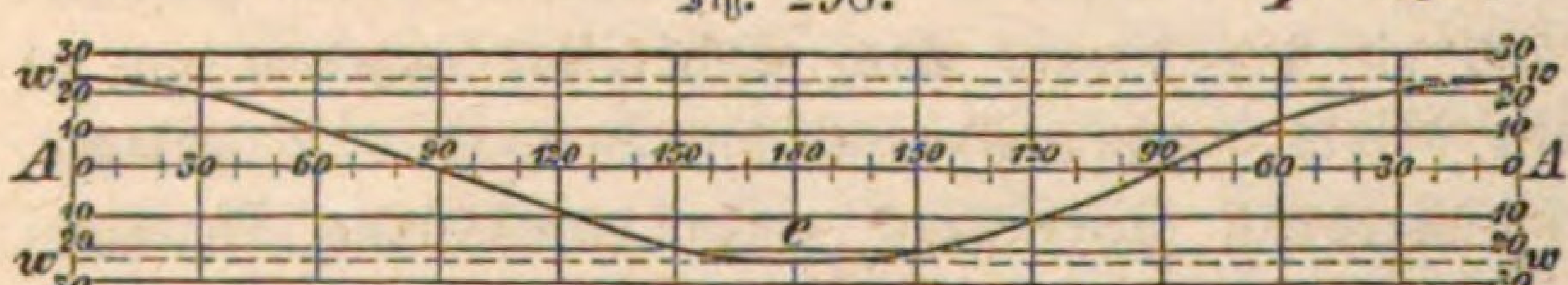


Fig. *297* die annähernde Verstreckung von einem Sechstel des Sphäroides Fig. *296*, und mit sechs solchen Stücken, aus einem etwas dehnsamen Stoffe, etwa aus Papier angefertigt, ließe sich das ganze Sphäroid überziehen.

Ungleich bedeutsamer ist die genannte annähernde Aufwickelung dadurch, daß sie eines der Mittel angiebt, auf geographischen Karten die Meridiane und Parallelkreise des Erdsphäroides darzustellen. Von einer Karte, deren Netz nach Art unserer Figur entworfen worden, sagt man, sie ist nach Flamstedt'scher (Name des Erfinders) Projektion gezeichnet, wobei freilich der Begriff von Projektion sehr weit gefaßt werden muß.

Am Punkte *a'* Fig. *296*, dem Durchschnitt des Hauptmeridianes und des Aequators, steht die Meridiantangente parallel zur Achse *p' p'* des Sphäroides, und die tangirende Kegelfläche ist hier zur Cylinderfläche geworden. Diese Cylinderfläche wurde in Fig. *298* aufgewickelt und in ihr das Netz für

eine Zone des Erdsphäroides von 30° nördlicher und südlicher Breite verzeichnet. Auf der Geraden *A A* sind die Grade des Aequators abgewickelt. Alle Meridiane sind jetzt gerade, auf *A A* senkrecht stehende Linien geworden. Auf den ersten Meridian hat man von *A* bis *30* die Meridianbögen von 0° bis 30° verstreckt und durch die Theilpunkte Parallelen zum Aequator *A A* gezogen, welche die aufgewickelten Parallelkreise vorstellen. Die Linie *e′ c′ e′* Fig. *296*, welche mit dem Aequator einen Winkel von beiläufig $23\frac{1}{2}$° bildet, stellt hier die Ekliptik vor. Die Durchschnittslinie des Sphäroides und der Ebene *e′ c′ e′* hat in der Aufwickelung die Form *w e w* (Fig. *298*) angenommen, und die Parallelen *w w*, *w w* sind hier die Darstellungen der beiden Wendekreise.

421. Welche Projektionsart man wähle zur Darstellung einer ganzen Erdhälfte, selbst eines Welttheiles, stets wird man durch Mißstände sich behelligt sehen; denn die nächste hierbei auftretende Forderung besteht darin, das System von Meridianen und Parallelkreisen zu entwerfen, welche man sich auf dem Erdsphäroide verzeichnet denkt. Durch diese Kreise wird die Erdoberfläche in rechteckige Felder getheilt, aber bei jeder Projektionsart wird entweder die Gestalt dieser Felder verändert oder das Verhältniß ihrer Seiten gegen einander, wie in Bezug auf den Erdradius. Z. B. bei der Kegelprojektion Fig. *297* sieht man, wie die Felder stets schiefwinkliger werden, je weiter vom mittleren Meridian sie abliegen. Dem in Etwas abzuhelfen, gebraucht man für diesen Fall auch folgende Modifikation: In Fig. *299* betrachte man den Theil rechts von *P′ P* als eine Horizontalprojektion, den Theil links als eine Vertikalprojektion der Erdkugel. *A B* ist ein Aequatorbogen von 40° Länge, den man sich gegen abwärts wiederholt denkt, so daß *P B* die mittlere Meridianebene eines Kugelschnitzes von 80° Länge vorstellte. Diese 80° wurden in Fig. *300* nach *A B A* abgewickelt, so wie der Erdquadrant *C′ v′ x′ P′* Fig. *299* verstreckt und nach *B v x P* Fig. *300* getragen ward. Nachdem an den Meridianpunkten *v′*, *x′* die Tangenten *v′ g′*, *x′ h′* gezogen worden und durch dieselben Punkte Parallelkreise gelegt, deren Horizontalprojektionen zur Hälfte durch die Bögen *v u w*, *x y z* ausgedrückt sind, so wird in Fig. *300* der Parallelkreis des Punktes *v* mit einem Radius $v\,g = v'\,g'$ Fig. *299* beschrieben und seine Länge *v u w* dem gleichnamigen Bogen der Fig. *299* gleich gemacht. Der Parallelkreis des Punktes *x* wird mit einem Radius $x\,h = x'\,h'$ Fig. *299* beschrieben und seine Länge jener des Bogens *x y z* Fig. *299* beiderseits des Meridianes gleich gemacht. *P z w A* sind die in die Aufwickelung übertragenen Meridiane, welche um je 40° vom mittleren Meridiane *B P*

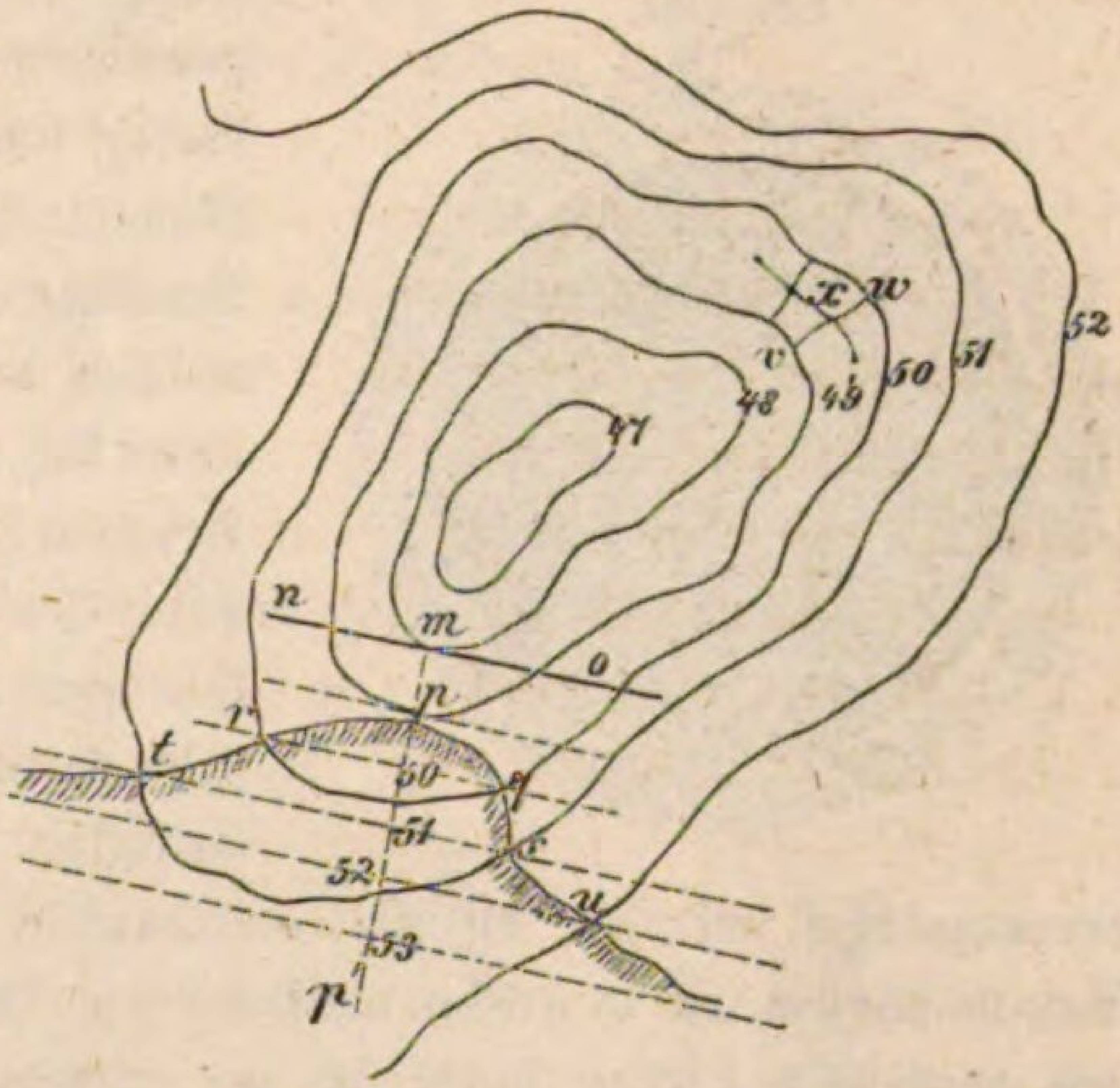
abstehen. Fig. *301* zeigt, in solcher Weise ausgeführt, die Meridiane und Parallelen von 10° zu 10° und für eine Erdspindel oder einen Erdschnitz von 80° Länge.

Anwendung ebener Schnitte zur Darstellung unregelmäßiger Gestalten.

422. Auf topographischen Karten oder Plänen soll die äußere Gestalt eines Theiles der Erdoberfläche eines Landes, einer Gegend dargestellt werden. Diese Gestalt mit ihren wechselnden Bildungen ist aber unregelmäßig, individuell und durch allgemeine Anschauungen weder zu erfassen noch zu bestimmen. Aber die Methode der Projektionen besitzt vor jeder andern mathematischen Behandlungsweise den großen Vorzug, sich auf alle Formen anwenden zu lassen, welche ihr unmittelbar vorgelegt werden können, ob sie nach dem Gesetze der Stetigkeit oder sonst irgendwie gebildet seien. Im vorliegenden Falle geht man von nachfolgender Vorstellung aus: Das darzustellende Gelände habe vorerst keine größere Ausdehnung, als daß die allgemeine Krümmung des Erdsphäroides dabei außer Acht gelassen werden dürfe, und es rage, inselgleich, aus einer umgebenden Wasserfläche. Dann wird die Uferlinie zu betrachten sein als Durchschnitt der Geländeoberfläche mit der Horizontalebene des Wasserspiegels. Dieser Wasserspiegel soll sich nun stufenweise erhöhen, stets um 1 Meter, 1 Ruthe oder um irgend ein anderes bestimmtes Maß, und jedesmal soll die neue Uferlinie dauernd bezeichnet werden. Diese verschiedenartig gebildeten Linien werden von einander unabhängig sein und nur im Allgemeinen einen um so geringeren Umfang haben, als der Wasserspiegel höher steigt. Die Kurven Fig. *302* seien nun die Horizontalprojektionen solcher Uferlinien oder Durchschnitte des Geländes durch waagrechte Ebenen, und es ist keineswegs von Nöthen, daß dieselben durch eine steigende Flut bezeichnet worden seien, weil die Feldmeßkunst hinlängliche Mittel besitzt, solche Kurven auf dem Terrain fest zu legen und ihre Horizontalprojektion zu bestimmen. Aus den beigeschriebenen Zahlen (Coten) wolle entnommen werden, daß die engste, also oberste Kurve 47 Maßeinheiten unter einer angenommenen horizontalen Richtebene liegt. Die zweite Kurve mit der Cote 48 liegt 1 Maßeinheit tiefer als die erste u. s. f. Sind nun all' die Horizontalebenen dieser Kurven so nahe bei einander genommen, daß der Abhang zwischen je zwei derselben als stetig zu betrachten ist, so kann die Höhe eines jeden Geländepunktes, dessen Projektion x zwischen zwei Kurven liegt, abgeleitet werden. Man ziehe durch x eine Linie $v\,x\,w$, welche auf der oberen wie unteren Kurve rechtwinklig steht, und nehme das ver-

streckte Maß von vw, vx. Ist nun der Höhenunterschied zwischen den zwei Kurven durch h ausgedrückt, der Höhenunterschied zwischen v und x durch h', so besteht die Projektion $h' : h = vx : vxw$, woraus sich h' bestimmt, und die Cote von x wird sein $= 48 + h'$. Somit ist das ganze Terrain vollständig bestimmt, weil man im Stande ist, die Cote (Höhe oder Tiefe) eines jeden Punktes nachzuweisen, dessen Projektion auf der Karte gegeben wurde. Hätte man die Horizontalkurve bestimmen sollen, welche durch einen gegebenen Punkt x geht, so würde man zuerst noch mehrere Querlinien verzeichnet haben, welche wie vxw auf den beiden Nachbarkurven senkrecht stehen; jene Punkte nun, welche die Senkrechten in dem Verhältniß $vw : vx$ theilen, gehören der verlangten Zwischenkurve an. — Im Punkte m der Kurve *48* soll eine tangirende Ebene an die Geländeoberfläche gelegt werden. Durch m zieht man eine Tangente nmo an die Kurve *48*, zweitens eine Senkrechte mp auf beide Kurven *48* und *49*. Eine Ebene, durch die Tangente und durch die Linie der Bodenoberfläche gelegt, welche durch m und p geht, ist die verlangte tangirende Ebene. Insofern nämlich mp geradlinig ist, kann die Gestalt der Bodenoberfläche in der Nähe von m als cylindrisch

Fig. 302.



betrachtet werden, wodurch die angegebene Konstruktion ihre Rechtfertigung findet. Denkt man sich die Linie, deren Projektion mp, in der tangirenden Ebene verlängert, zieht durch p eine Parallele zu mo und dann noch mehrere gleichentfernte Parallelen, so können diese betrachtet werden als die Projektionen jener Linien, nach welchen die tangirende Ebene durch die Ebenen der Horizontalkurven geschnitten wird. Der durch n gehenden Parallelen muß deshalb die Cote 49 beigelegt werden, der nächstfolgenden die Cote 50 etc.; eine solche Theilung nennt man den Böschungsmaßstab der Ebene. Nun findet sich's, daß die Parallele 50 und die Kurve 50 sich in zwei Punkten r, q schneiden, die Parallele 51 und die Kurve 51 in zwei Punkten t, s etc. Daraus ergiebt sich, daß die tangirende Ebene des Punktes m weiter abwärts zur schneidenden

Ebene wird und daß die Kurve *t r q s u* die Projektion sei des Durchschnittes der Bodenoberfläche und der Ebene *n o p*. — Es mag aus dem Vorgetragenen noch entnommen werden, wie auf sogenannten cotirten Plänen Konstruktionen über Berührungen, Durchschnitte u. s. w. ohne Beizug einer Vertikalprojektion auszuführen sind.

Anwendung paralleler Schnitte in der zeichnenden Kunst.

423. Unter die interessanten Erfindungen der neueren Mechanik gehört eine für den Kupferstich bestimmte Maschine zu dem Zwecke, Medaillen und ähnliche in Flachrelief ausgeführte Skulpturen darzustellen. Die Darstellung, wovon nebenstehende Fig. *303* ein Muster giebt, geschieht mittelst ebener Schnitte der Medaille, welche beiläufig auf folgende Weise gewonnen werden: die Spitze eines Stiftes bewegt sich so über die (horizontal liegende) Medaille hin, daß diese Spitze stets in einer Vertikalebene liegt und daß alle Ebenen, in welchen der Stift seine Bahnen durchläuft, unter sich parallel sind und gleichweit entfernt. Vermittelst eines Reißerwerkes werden diese parallelen Schnitte oder vielmehr deren Umlegungen auf die Platte übertragen. Man sieht auf unserm Abdrucke, wie durch größere Helligkeit die höheren Stellen des Reliefs hervorgehoben werden; offenbar auch müssen die Zwischenräume der umgelegten Parallelschnitte um so größer ausfallen, je höher der Hub des Stiftes ist. An den dunkelsten Stellen sowie an den Andeutungen von Schlagschatten erkennt man eine Nachhilfe durch den Grabstichel. Die Einfassung unserer Figur ist guillochirt.

Fig. *303.*



Gegenseitige Durchschnitte krummer Flächen.

424. Stehen zwei krumme Flächen der Art in Verbindung, daß sie sich gegenseitig durchdringen, dann kann dies zu der Aufgabe führen, die Projektionen der dadurch bedingten Durchschnittslinie zu konstruiren. Diese Konstruktion geschieht punktweise und zwar im Allgemeinen nach folgender Anschauung: Ich ordne irgend eine Hilfsebene an, welche beide krumme Flächen durchschneidet, und verzeichne die zwei entstehenden Schnitte, wobei

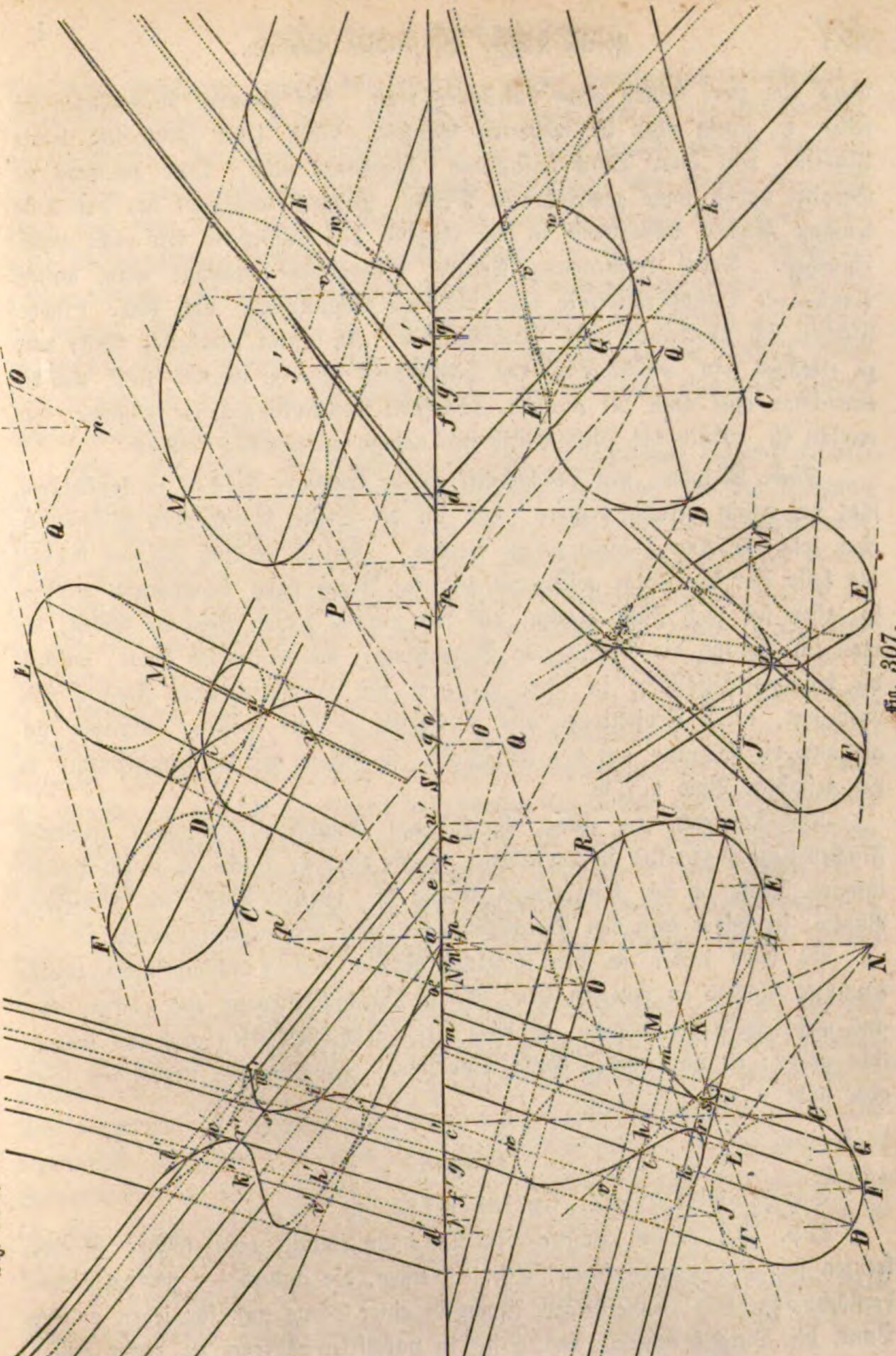


Fig. 304.

Fig. 305.

Fig. 306.

Fig. 307.

dann von zwei Fällen einer stattfinden muß. Die Schnitte durchkreuzen sich selber in einem oder in mehreren Punkten, deren jeder gleichzeitig beiden Flächen, also ihrer Durchschnittslinie, angehören muß. Oder zweitens die Schnitte haben keine gemeinsamen Punkte, wodurch angezeigt ist, daß beide krumme Flächen wenigstens in der Gegend der Hilfsebene sich nicht durchschneiden. Durch Anwendung weiterer Hilfsebenen gewinnt man weitere Punkte der Durchschnittslinie oder aber die Bestätigung, daß beide krumme Flächen sich überhaupt nicht durchschneiden. In einem gegebenen Falle wird zu erwägen sein, welche Lage den Hilfsebenen gegeben werden muß, um die einfachsten oder auch die praktisch schärfsten Konstruktionen zu erhalten, was erreicht ist, sobald die Hilfsschnitte sich nahezu rechtwinklig kreuzen.

Diese Methode, den Durchschnitt zweier krummer Flächen zu konstruiren, läßt sich dahin verallgemeinern, daß an die Stelle schneidender Hilfsebenen eben solche krumme Flächen gesetzt werden. Obgleich es nun scheinen möchte, als solle hier die Frage wiederum mit der Frage selbst beantwortet werden, so lassen sich doch Fälle denken, und wir werden davon Beispiele finden, wo man im Voraus die Gestalt und Beschaffenheit des Schnittes kennt, welchen die krumme Hilfsfläche in jeder der zwei sich durchdringenden Flächen hervorbringt, deren Projektionen also entworfen werden können. Kreuzen sich alsdann die Schnitte auf der Hilfsfläche, so liegen die Kreuzungspunkte in der gesuchten Linie u. s. w.

Die Tangente an einem Punkte des Durchschnittes zweier krummer Flächen liegt gleichzeitig in der Ebene, welche die erste Fläche in jenem Punkte tangirt, sowie in der tangirenden Ebene der zweiten Fläche an demselben Punkte; sie bildet also den Durchschnitt der zwei tangirenden Ebenen.

Es wird ferner in den einzelnen Fällen des Durchschneidens zweier krummer Flächen zu erörtern sein, ob die Durchschnittslinie aus einem oder aus mehreren Aesten bestehe, ob diese Aeste geschlossen seien oder ins Unendliche gehen; ob im letzteren Falle Asymptoten des Schnittes vorhanden seien oder nicht u. s. f.

Beispiele.

Durchschnitt zweier Cylinderflächen.

425. In jedem Punkte der Durchschnittslinie zwei solcher Flächen kreuzen sich zwei gerade Linien, eine der ersten, die andere der zweiten Cylinderfläche angehörig; beide Gerade liegen in einer Ebene und für jeden andern Punkt der Durchschnittslinie liegen sie in parallelen Ebenen zu dieser ersten.

Aus dieser Erwägung ergiebt sich folgende einfache Konstruktion der Aufgabe. Durch einen Punkt des Raumes lege ich zwei gerade Linien, die eine parallel mit den Geraden der ersten Cylinderfläche, die andere parallel mit den Geraden der zweiten Cylinderfläche; beide Geraden bestimmen eine Ebene *H*. Ich ordne nun eine Reihe von Hilfsebenen an parallel zu *H*, und deren jede beide Cylinderflächen schneidet. Dies geschieht in einer oder in mehreren geraden Linien. In jeder Hilfsebene werden die entstandenen geraden Schnitte sich kreuzen und die Punkte, in welchen dies stattfindet, gehören der Durchschnittslinie beider Cylinderflächen an. So werden hier die Punkte dieser Linie genommen durch die Kreuzungen von zwei Systemen paralleler Linien, also in einfachster Weise.

426. Fig. *304*. Die Grund- oder (Fig. χ) Leitlinien beider Cylinderflächen sind in der horizontalen Projektionsebene gegeben, und die Richtung ihrer geraden Erzeugungslinien ist aus beiden Projektionen zu entnehmen. Durch einen Punkt (p, p') im Raume ward eine Parallele $(p\,O, p'\,o')$ zu den Erzeugungslinien der einen Cylinderfläche gelegt und eine Parallele $(p\,Q, p'\,q')$ zu den Erzeugungslinien der andern. Eine Ebene *H*, welche durch beide Parallelen geht, hat $O\,Q$ als Horizontalriß. Man ziehe eine Parallele zu $O\,Q$, welche wie $B\,D$ die beiderseitigen Grundlinien in A, B und C, D kreuzt; betrachte dies $B\,D$ als den Riß einer zu *H* parallelen Ebene, so schneidet diese die eine Cylinderfläche nach zwei geraden Erzeugungslinien, welche durch die Punkte (A, a'), $(B\,b')$ gehen; sie schneidet die andere Cylinderfläche nach zwei geraden Erzeugungslinien, welche durch die Punkte (C, c'), (D, d') bestimmt sind. Das Doppelpaar von Parallelen kreuzt sich in vier Punkten (i, i') (k, k'), (l, l'), (m, m'), welche der Durchschnittslinie beider Cylinderflächen zu eigen sind. Weitere zu *H* parallele Hilfsebenen liefern weitere Punkte jener Linie.

T a n g e n t e n d e r D u r c h s c h n i t t s l i n i e. Am Punkte (h, h') sei eine solche zu bestimmen. Hier kreuzen sich zwei Erzeugungslinien beider Cylinderflächen, deren eine die zugehörige Grundlinie in *K* trifft, die andere in *L*. Die tangirende Ebene längs der erstgenannten Erzeugungslinie hat als Horizontalriß die Tangente der Grundlinie $K\,N$, sowie die Tangente $L\,N$ Horizontalriß ist der tangirenden Ebene der zweiten Cylinderfläche am Punkte (h, h'). Beide Tangenten kreuzen sich in *N*, welchen Punkt man nach n' projicirt, und $(N\,h, n'\,h')$ ist die verlangte Tangente.

S o n d e r p u n k t e d e s D u r c h s c h n i t t e s. Sie ergeben sich einmal durch Anwenden solcher zu *H* parallelen Hilfsebenen, welche die eine oder die

andere Cylinderfläche berühren, während sie die andere schneiden oder gleichfalls berühren. Zu ihnen gehören erstlich die Hilfsebene, deren Riß JR die eine Grundlinie in J berührt, während er die andere Grundlinie in MR schneidet. Mittelst dieser Hilfsebene finden sich nur zwei Punkte (v, v'), (w, w') der Durchschnittslinie, doch von der Beschaffenheit, daß die Erzeugungslinien $(Mv, m'v')$, $(Rw, r'w')$ auch als Tangenten des Durchschnittes auftreten. Denn wollte man in (w, w') die Tangente bestimmen, so wäre durch den Punkt an jede Cylinderfläche eine berührende Ebene zu legen. Von diesen hat eine die Gerade JR als Horizontalriß. Als Riß der andern ergäbe sich die Tangente der Grundlinie in R; beide Ebenen gehen somit durch R und schneiden sich nach der Erzeugungslinie dieses Punktes, welche sich sonach als Tangente der Durchschnittslinie zu erkennen giebt. Die genannte Ebene bildet auch nach einer Seite hin die Gränze aller Hilfsebenen, welche überhaupt Punkte der Durchschnittslinie liefern, weil jede zu H parallele Ebene, deren Riß jenseits von JR läge, wol noch die erste, aber nicht mehr die zweite Cylinderfläche durchschnitte. Ein ähnliches Verhalten findet man bei jener zu H parallelen Hilfsebene, deren Horizontalriß die eine Grundlinie in E berührt und die andere in G, F schneidet; sie liefert zwei Kurvenpunkte (r, r'), (s, s'), in welchen die Durchschnittslinie von den Erzeugungslinien $(Fr, f'r')$, $(Gs, g's')$ berührt wird.

Weitere Sonderpunkte — und darum für die Richtigkeit der Zeichnung bedeutsam — sind diejenigen, deren eine Projektion auf einen der Umrisse der Cylinderflächen zu liegen kommt. Sie zu erhalten, müssen die Hilfsebenen durch die Berührungspunkte wie T, A gelegt werden oder durch die Berührungspunkte wie U, an welchen die Tangenten senkrecht stehen.

Was die besondere Form der Durchschnittslinie betrifft, so wird diese in dem vorliegenden Falle aus einem einzigen geschlossenen Kurvenaste gebildet, denn es findet hier kein völliges Durchdringen der einen Fläche durch die andere statt, sondern nur ein gegenseitiger Ausschnitt. Der cylindrische Streifen, welchem der Bogen FG als Basis dient, streicht von der andern Fläche ungetroffen über dieselbe hinweg, während von dieser der Streifen, welchem RVM zur Basis dient, unbehelligt unter der ersten hinwegzieht. Dies Verhalten war von vornherein aus der Lage der äußersten Hilfsebenen erkennbar, deren eine den ersten Cylinder tangirt, die andere den zweiten. —

427. Die nächstfolgenden drei Beispiele sollen hauptsächlich erläutern, wie die Art des Durchschnittes zweier gebundener Cylinderflächen sich schon im Voraus aus der Lage der äußersten Hilfsebenen erkennbar mache. Fig. 305. Die

Basis der einen Cylinderfläche gehört der horizontalen Projektionsebene an, die Basis der andern der Vertikalebene. Durch den Punkt (P', p) der Vertikalebene geht eine Parallele $(P' o', p O)$ mit den geraden Erzeugungslinien der ersten Cylinderfläche und eine Parallele $(P' q', p Q)$ mit den geraden Erzeugungslinien der zweiten. Eine Ebene H, durch beide Parallelen gelegt, hat $Q O$ als Horizontalriß und $S' P'$ als Vertikalriß. Die zwei äußersten, diesem H parallelen Hilfsebenen berühren beide die eine Cylinderfläche und schneiden die andern; ihre zu $P' S'$ parallelen Vertikalrisse $M' N'$*), $J' L'$ berühren die Grundlinie jener ersten Cylinderfläche in M', J' und ihre zu $Q S$ parallelen Horizontalrisse $N' C, L' G$ schneiden die Grundlinien der andern Cylinderfläche in D, C und F, G, woraus hervorgeht, daß diese letztere von der erstgenannten völlig durchdrungen werde, der Durchschnitt von beiden also aus zwei geschlossenen Aesten bestehe, einem des Eintrittes, dem andern des Austrittes der einen Fläche in die andere und aus ihr. Die vier durch $C D$, F, G gehenden geraden Erzeugungslinien berühren paarweise je einen Ast der Durchschnittslinie. Die ersteren nämlich in (i, i') nnd (k, k'), die anderen in (v, v') und (w, w'). Ueber Alles, was sich auf die Bestimmung der Sonderpunkte, der Tangenten u. s. w. bezieht, bleibt Neues nicht mehr zu sagen.

Fig. *306* giebt nur eine Horizontalprojektion, wobei wir unterstellen, daß man, gleichwie in den vorhergehenden Beispielen, den Horizontalriß $O Q$ einer zu den geraden Erzeugungslinien beider Cylinderflächen parallelen Ebene H bestimmt habe. Da nun die Grundlinien der Flächen in der Horizontalebene gegeben sind, so findet sich aus diesen Umständen, daß die eine der äußersten Hilfsebenen beide Cylinderflächen tangire, während die andere äußerste Ebene wieder tangirend liegt zur ersten, aber schneidend zur zweiten. Risse dieser äußersten Ebenen sind die zu $O Q$, Parallelen $E F, M D C$. Es folgt aus diesen Beziehungen, daß die Durchschnittslinie beider Cylinderflächen wiederum nur aus einem einzigen Aste gebildet sein könne, daß dieser Ast aber einen Kreuzungspunkt oder sogenannten doppelten Punkt (dessen Projektion i) besitze und gleichsam den Uebergang bilde von den einästigen Schnitten zu den Doppelästigen.

428. Einen letzten Fall sieht man in Fig. *307* behandelt, doch wiederum nur in einer Projektion, die als horizontal oder vertikal betrachtet werden mag. Die äußersten Hilfsebenen tangiren hier gleichzeitig beide Cylinderflächen, und ihre Risse sind darum gemeinsame Tangenten der beiden

---

*) N' liegt innerhalb der Figur 304.

Grundlinien; J, M und E, F die Berührungspunkte. Die Erzeugungslinien, welche den Punkten E, F entsprechen, kreuzen sich in einem Punkte, dessen Projektion r ist; die Erzeugungslinien, welche durch J und M gehen, liefern einen Punkt, wovon s die Projektion. Der gesammte Schnitt besteht aus zwei getrennten Aesten, die sich aber in den beiden Punkten kreuzen, wovon r und s die Projektionen.

Insofern die zwei auf solche Art sich schneidenden Cylinderflächen zu jenen der zweiten Ordnung gehören, haben wir eine Bemerkung allgemeiner Art beizufügen. Sie stützt sich zunächst auf den einen Lehrsatz, den wir hier nur historisch anführen, auf den Satz nämlich, daß durch fünf in einer Ebene gegebene Punkte sich immer eine Kegelschnittslinie legen lasse, doch immer nur eine einzige.

Nun haben in unserer Fig. 307 die beiden Cylinderflächen in jedem der beiden Punkte, welche wir nach ihrer Projektion mit r und s bezeichnen wollen, eine gemeinsame berührende Ebene; EF und MJ sind deren Risse. Man lege eine Ebene durch r und s und noch durch einen beliebigen dritten Punkt des Durchschnittes, welcher u heißen soll. Diese Ebene wird die erste Cylinderfläche nach einer Linie zweiter Ordnung L schneiden, und auch die zweite Cylinderfläche nach einer Linie zweiter Ordnung L'; die Ebene wird ferner die beiden tangirenden Ebenen an r und s nach zwei Geraden schneiden, welche gemeinsame Tangenten an L und L' sein müssen. Wenn aber zwei Linien zweiter Ordnung an zwei Punkten r und s gemeinsame Tangenten haben und noch einen dritten gemeinsamen Punkt u, so sind sie nicht unter sich verschieden, sondern bilden nur eine Linie. Denn jeder Berührungspunkt r, s muß für zwei, nämlich aufeinander folgende Punkte gezählt werden, und durch fünf Punkte einer Ebene geht nur eine einzige Linie zweiter Ordnung. L und L' sind also identisch und bilden denjenigen Ast des Durchschnittes, auf welchem der Punkt u genommen ward. Weil aber u unbedingt auf einem wie dem andern Aste genommen werden konnte, müssen beide Aeste ebene Linien sein. In unserm Beispiele Fig. 307 besteht somit der gesammte Durchschnitt beider Cylinderflächen aus zwei Ellipsen, welche sich in r und s kreuzen.

429. In obiger Entwicklung bezieht sich Nichts auf irgend eine besondere Eigenthümlichkeit der Cylinderflächen, und es wird gestattet sein, in ganz allgemeiner Beziehung folgenden Satz aufzustellen:

Durchschneiden sich zwei krumme Flächen zweiter Ordnung und haben die Flächen an zwei Punkten ihres Durchschnittes

gemeinsame berührende Ebenen, so besteht dieser Durchschnitt aus ebenen Aesten.

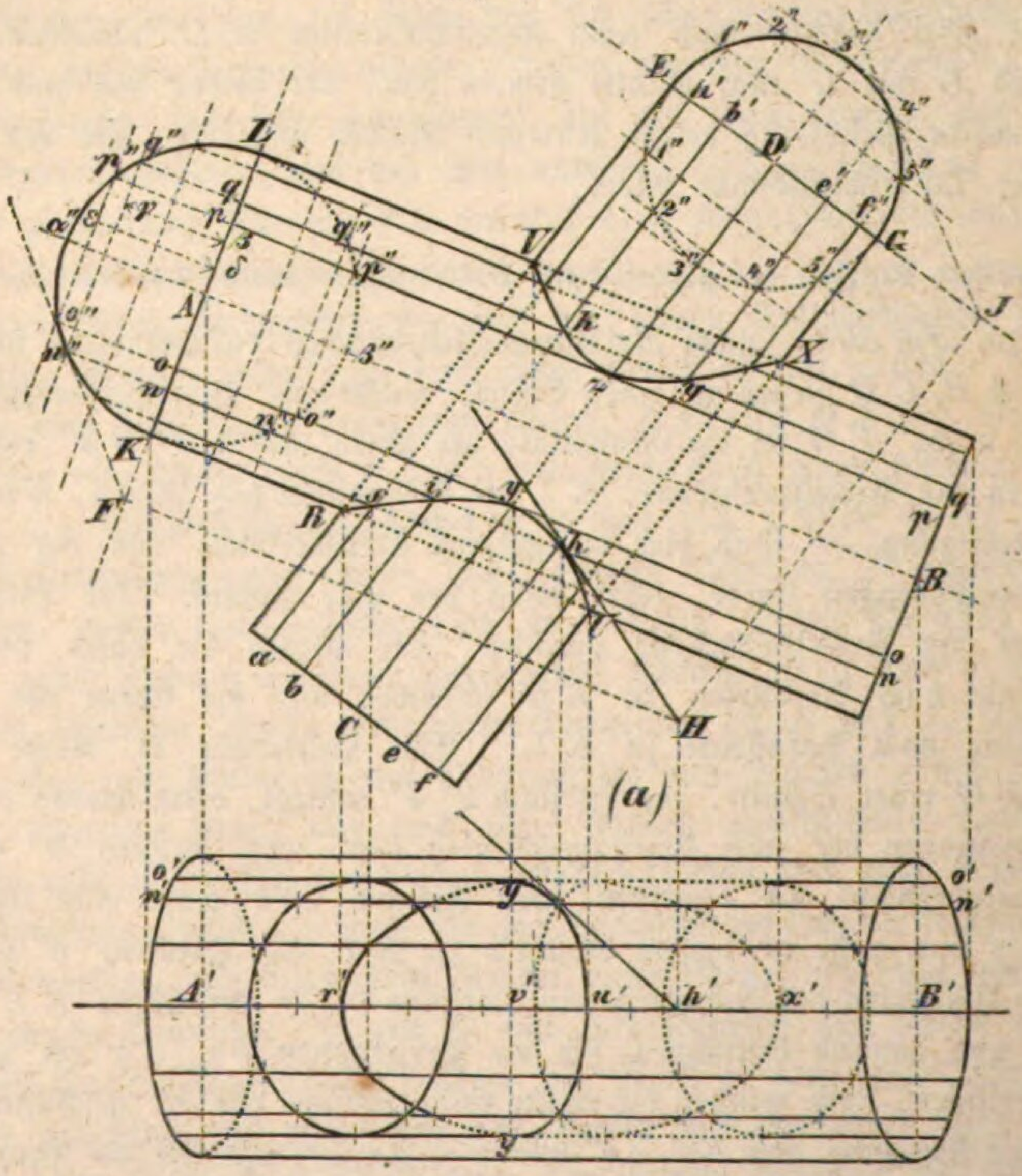
Als Folgerung führen wir noch an: Durchschneiden sich zwei krumme Flächen zweiter Ordnung in einer Linie von zwei Aesten und einer dieser Aeste ist dabei eine ebene Kurve, so ist es auch der andere Ast. Denn legt man durch drei Punkte des zweiten Astes eine Ebene, so wird diese den ersten Ast in zwei Punkten schneiden, sie wird aber jede der zwei Flächen nach einer Kegelschnittslinie L, L' schneiden. Weil aber dies L mit L' fünf Punkte gemein hat, sind beides eine und dieselbe Linie, welche gleichzeitig beiden krummen Flächen angehört, also den zweiten Ast ihrer Durchschnittsfigur bildet.

Weitere Beispiele des gegenseitigen Durchdringens zweier Cylinderflächen.

430. Fig. *308*. Zwei Rotationscylinderflächen durchschneiden sich; ihre Achsen AB, CD liegen in einer Ebene, welche als Projektionsebene angenommen wird. EG sei die Grundlinie der einen und $E3''\,G3''$ deren Umlegung in die Projektionsebene; KL die Grundlinie des andern, $K\alpha''\,L\beta''$ deren Umlegung. — Daß hier die größere Cylinderfläche von der kleineren völlig durchdrungen werde, lehrt schon der erste Anblick. Die Hilfsebenen sind hier der Projektionsebene parallel. Sie werden die Ebene der ersten Grundlinie nach Parallelen zu EG schneiden und die Ebene der zweiten Grundlinie nach Parallelen zu KL. Eine Hilfsebene H' mache in der Ebene EG einen Schnitt, der sich nach $2''\,4''$ umlegt, dann werden $b\,b'$, $e\,e'$ die Projektionen der zwei Erzeugungslinien sein, nach welchen H' und die erste Cylinderfläche sich schneiden; den Abstand $2''\,b'$ trage man links von β nach γ und ziehe in diesem Abstand zu KL die Parallele $n''\,q''$, dies wird die Umlegung des Schnittes sein, welchen H' in der Ebene KL hervorbringt; und dadurch bestimmen sich die Projektionen $n\,n$, $q\,q$ der zwei Erzeugungslinien, nach welchen die zweite Cylinderfläche von H' geschnitten wird. Durch die Kreuzung von $b\,b'$, $e\,e'$ und $n\,n$, $q\,q$ ergeben sich die Projektionen g, k, i, h von vier Punkten der Durchschnittslinie. Die Tangenten in $3''$, $3''$ müssen als Schnitte der Basisebene GK und der äußersten Ebene H'... gelten. Diese berühren die Fläche nach zwei Erzeugungslinien, deren gemeinsame Projektion die Gerade DC. Indem bei LK eine Parallele $o''\,p''$ zu dieser Linie gezogen wird in einem Abstande $\delta\,\varepsilon$ gleich der Höhe $D3''$, finden sich die Geraden $o\,o$, $p\,p$ als Projektionen der Schnitte, welche die Gränzebenen in der zweiten Cylinderfläche machen. Diese Schnitte berühren

die Durchschnittskurve, wie es ihre Projektionen gegenseitig in *z*, *y* thun. Die gefundene Durchschnittslinie besteht aus zwei geschlossenen Aesten und gehört zu den Linien vierter Ordnung, weil sie, wie wir gesehen, von einer Ebene in vier Punkten geschnitten werden kann. Dabei liegen beide Aeste symmetrisch gegen die Projektionsebene, so daß jeder Punkt *i* als die Projektion

Fig. 308.



von zwei Kurvenpunkten erscheint. Aus diesem Grunde ist die Projektion *R i h U*, *V k g X* eine Linie von nur halb so hoher Ordnung als die Durchschnittslinie, im Raume also eine Linie zweiter Ordnung, und da sie aus zwei getrennten Aesten besteht, geben sich diese als einer Hyperbel angehörig zu erkennen. — Die berührende Ebene an einem Punkte (*h*, 4″) der ersten Cylinderfläche hat als Riß die Gerade *J H*. Indem man *h* als der zweiten

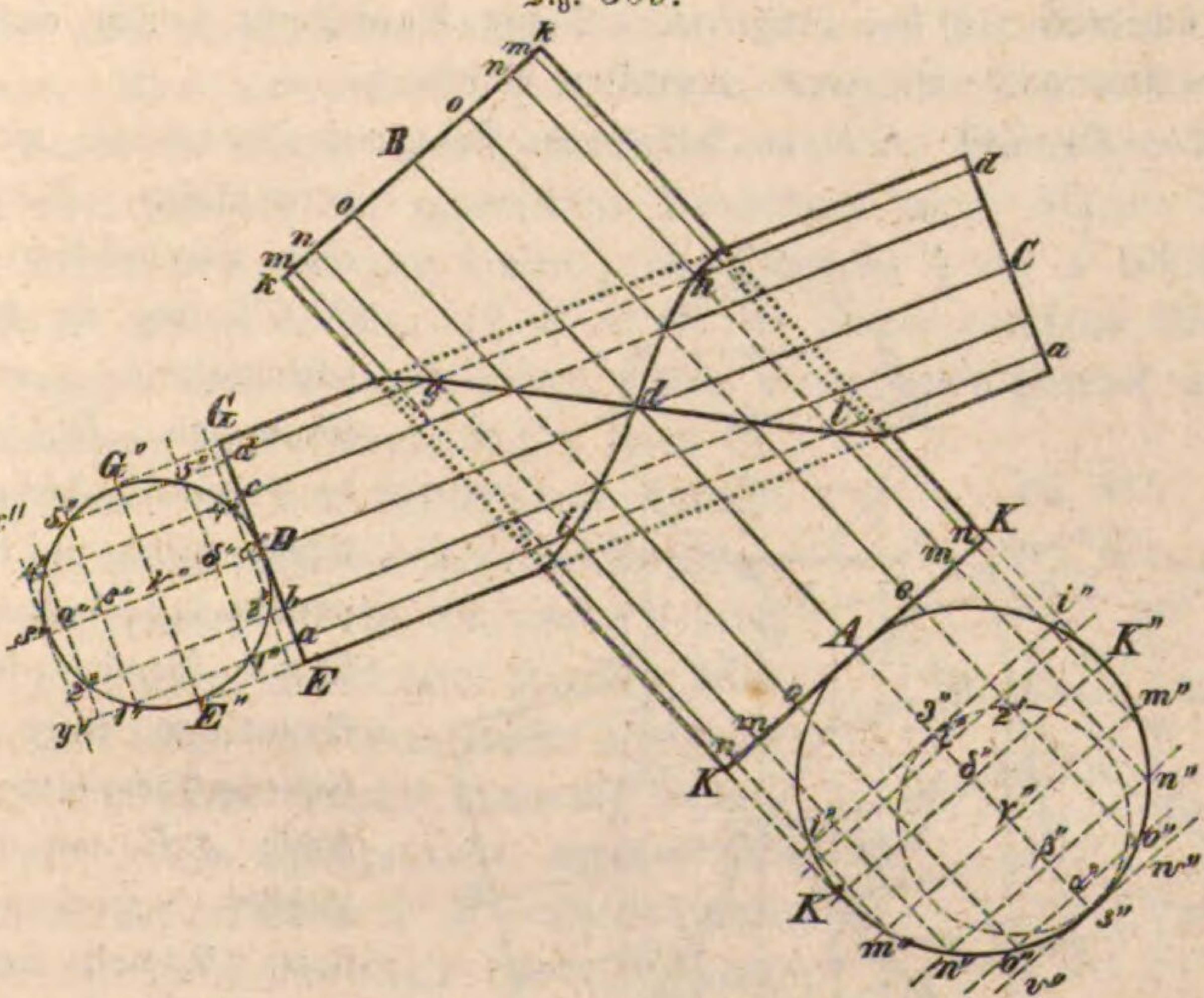
Cylinderfläche angehörig betrachtet, wobei n'' als seine Projektion in der Ebene LK erscheint, findet sich FH als Riß ihrer tangirenden Ebene an genanntem Punkte; beide tangirende Ebenen schneiden sich nach der Tangente der Durchschnittslinie, deren Projektion Hh ist.

In Fig. (a) hat man noch eine zweite Projektion unseres Gegenstandes beigefügt, die man als Vertikalprojektion betrachten mag, wenn die obere Figur als Horizontalprojektion genommen ward. Dabei kann die Mittellinie $A'B'$ als projektive Grundlinie auftreten, und wir werden nur zu bemerken nöthig haben, daß die Höhen der Parallelen $o'o'$, $n'n'$ ... über oder unter $A'B'$ den entsprechenden Höhen $D\,3''$, $b'\,2''$, $a'\,1''$ gleich genommen werden mußten.

Anmerkung. Man vergleiche letztere Konstruktion mit unserer in §. 125 gegebenen Verzeichnung einer Eilinie.

431. Fig. *309*. Entsprechender Fall von Fig. *306*. Zwei Rotationscylinderflächen von ungleichem Durchmesser schneiden sich, und ihre Achsen sind

Fig. *309*.

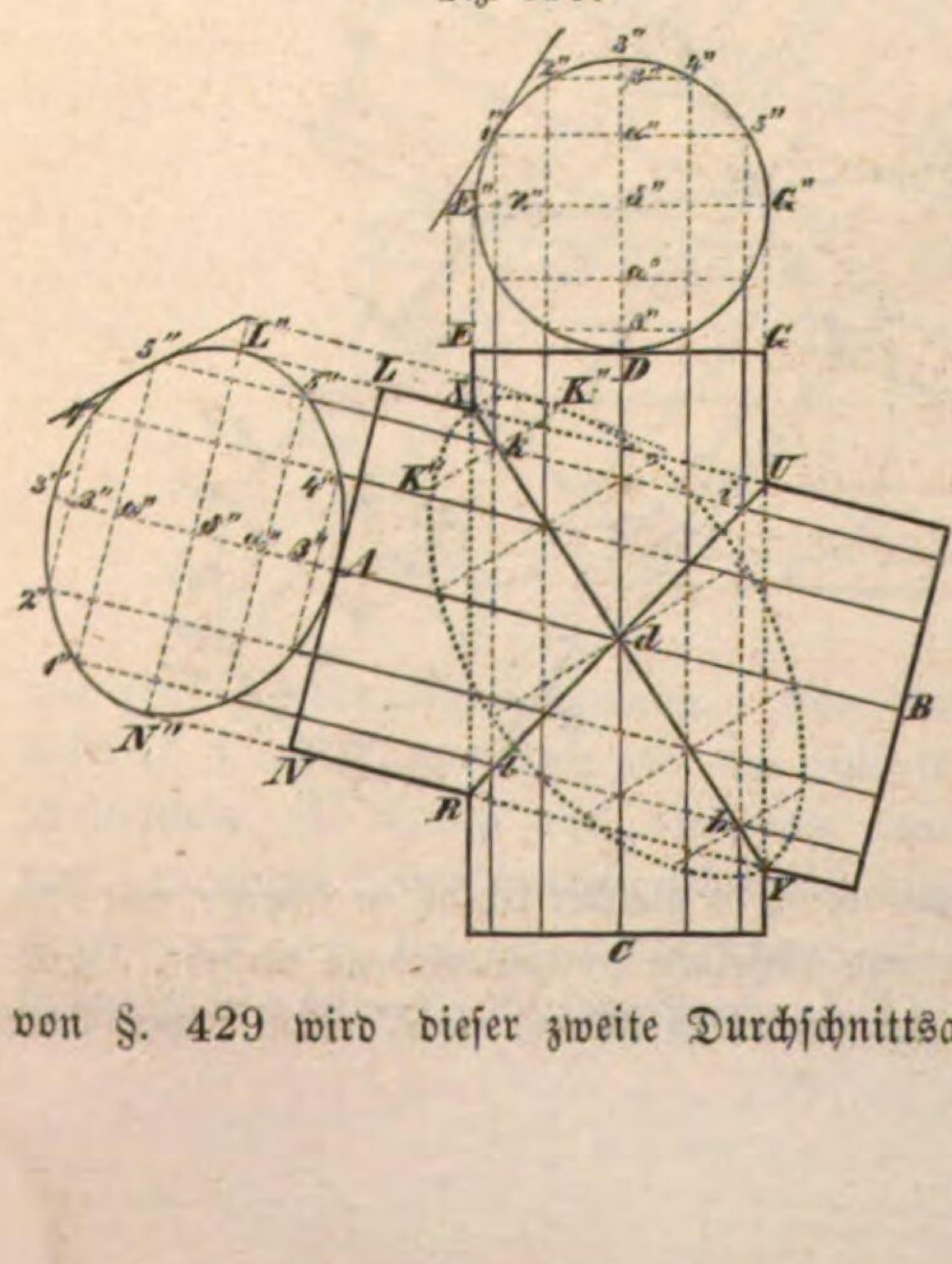


der Horizontalebene parallel, ohne jedoch in gleicher Ebene zu liegen; wol aber werden beide Flächen von einer und derselben Horizontalebene tangirt. AB, CD die zwei Achsen; EG Basis der einen Fläche; $DE''\,3''\,G''$ ihre Um-

legung in die Horizontalebene; $x'' y''$ umgelegter Schnitt der Basisebene durch die gemeinsame tangirende Ebene. Vom Berührungspunkte $3''$ aus wurde der umgelegte Kreis in eine gerade Anzahl gleicher Theile getheilt, der Art, daß die Theilpunkte auf Parallelen mit $E\,G$ zu liegen kamen. Diese Parallelen sind die umgelegten Schnitte von Hilfsebenen in der Basisebene $E\,G$. $K\,K$ Basis der zweiten Cylinderfläche, $A\,K''\,3''\,K''$ ihre Umlegung in die Projektionsebene. Die zu $K\,K$ parallele Tangente $v''\,w''$ ist mit $x''\,y''$ entsprechend in dieser Umlegung der Schnitt, welchen die gemeinsame berührende Ebene in $K\,K$ hervorbringt. Auf der Senkrechten $A\,3''$ hat man aus der ersten Umlegung die Abstände $3''\,\alpha''$, $\alpha''\,\beta''$, $\beta''\,\gamma''$ ... abgetragen und durch die Theilpunkte Parallelen mit $K\,K$ gezogen. Eine Hilfsebene nun, z. B. jene, welche die umgelegten Schnitte $1''\,\beta''\,5''$ und $n''\,\beta''\,n''$ hervorgebracht, schneidet die erste Cylinderfläche nach zwei Erzeugungslinien, deren Projektionen die Parallelen $a\,a$, $d\,d$; sie schneidet die zweite Cylinderfläche nach zwei Erzeugungslinien, deren Projektionen die Parallelen $n\,n$, $n\,n$. Die vier Geraden liefern vier Punkte des Durchschnittes der beiden Cylinderflächen, welche sich nach i, g, h, l projiciren. Dieser Durchschnitt besteht aus einem einzigen Kurvenaste mit einem doppelten Punkte bei d.

432. Fig. 310. $C\,D$ die Achse einer Rotationscylinderfläche, welche der horizontalen Projektionsebene parallel liegt. $D\,E''\,3''\,G''$ ihre in die Projektionsebene umgelegte Grundlinie, $R\,U$ Schnitt der Cylinderfläche durch eine Ebene, welche auf der Projektionsebene senkrecht steht. Dieser Schnitt soll als Grundlinie einer zweiten Cylinderfläche dienen, deren Achse $A\,B$ mit $C\,D$ in gleicher Horizontalebene liegt. Es soll der zweite Durchschnittsast beider Cylinderflächen bestimmt werden. — Nach dem Satze von §. 429 wird dieser zweite Durchschnittsast wiederum eine ebene Linie,

Fig. 310.

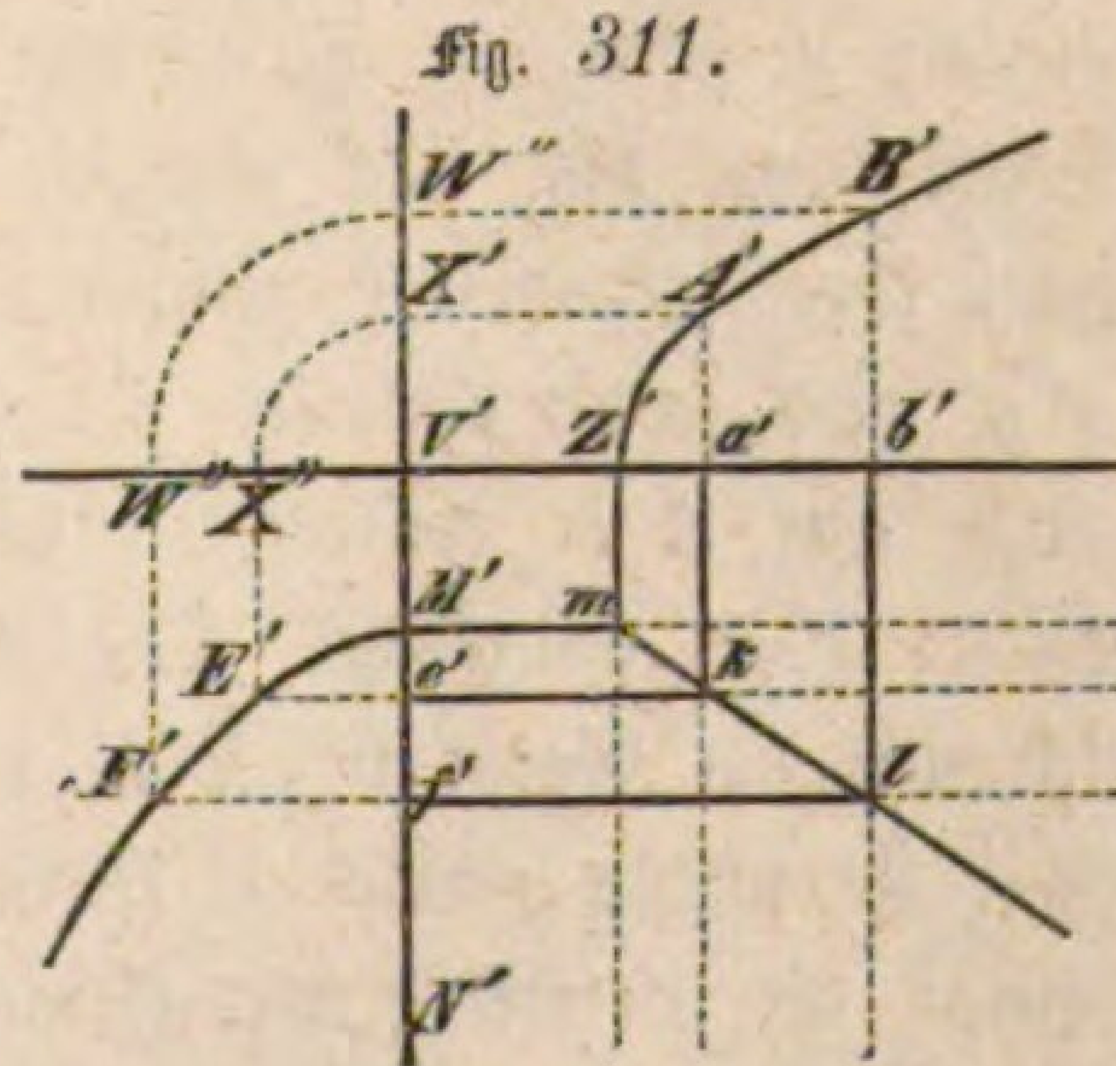


also eine Ellipse sein, welche sich als die Gerade $X d Y$ projicirt. Man hat den zu $A B$ senkrechten Schnitt $N L$ als neue Grundlinie der zweiten Cylinderfläche angenommen und deren Umlegung $A N'' 3'' L''$ verzeichnet. Zu dieser Verzeichnung wird die Erläuterung genügen, daß die Höhen $\delta'' \alpha''$, $\delta'' \beta''$ in beiden Umlegungen gleich zu nehmen seien. $X K''$ $Y K''$ Umlegung des zweiten Schnittes in die Projektionsebene, wobei die Ordinaten $k K''$ gleich zu nehmen waren den entsprechenden Kreisordinaten $\varkappa'' 1''$ rc. Insofern sie den Durchschnitt zweier Cylinderflächen bilden, hat man die beiden Ellipsen $R U$, $X Y$ zu betrachten als eine einzige Linie mit zwei doppelten Punkten, von welchen d die gemeinsame Horizontalprojektion.

433. Anmerkung. In Betreff der Kurven zweiter Ordnung werden unsere Konstruktionen geeignet sein zur Erläuternng des Satzes: daß je zwei in den Projektionsebenen verzeichnete Linien zweiter Ordnung L, L' zwischen zwei gemeinsamen, gegen die projektive Grundlinie senkrecht stehenden Tangenten stets als die Projektionen von zwei im Raume befindlichen Linien zweiter Ordnung Λ, Λ' zu nehmen sind. Denn diese Λ, Λ' bilden die Durchschnittsfigur der zwei projicirenden Cylinderflächen, als deren Grundlinien L und L' erscheinen. Aber die parallelen gemeinsamen Tangenten von diesen letzteren Linien stellen im Raume zwei gemeinsame tangirende Ebenen der Cylinderflächen vor, weshalb der gegenseitige Durchschnitt dieser Flächen aus zwei ebenen Aesten, d. i. aus zwei Linien zweiter Ordnung Λ und Λ' bestehen muß.

434. Es sei in Fig. 311 $Z' A' B'$ eine in der vertikalen Projektionsebene liegende (nur in ihrer oberen Hälfte verzeichnete) Parabel und diene als Grundlinie einer Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien auf der Vertikalebene senkrecht stehen. In der auf erstgenannter senkrecht stehenden Vertikalebene $N' M'$ sei eine zweite Parabel $M' E' F'$ gegeben, so daß beide Parabeln durch die Horizontalebene nach ihren Achsen geschnitten werden. Die zweite Parabel diene als Grundlinie einer zweiten Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien auf der Ebene $N' M'$ senkrecht stehen. Es soll die Durchschnittslinie beider Cylinderflächen konstruirt werden. Eine horizontale Hilfsebene schneidet die erste Fläche nach einer ihrer Erzeugungslinien, von welcher $b l$ die Horizontalprojektion; dieselbe Hilfsebene schneidet die zweite Cylinderfläche nach einer Erzeugungslinie, von welcher $f l$ die Horizontalprojektion

Fig. 311.

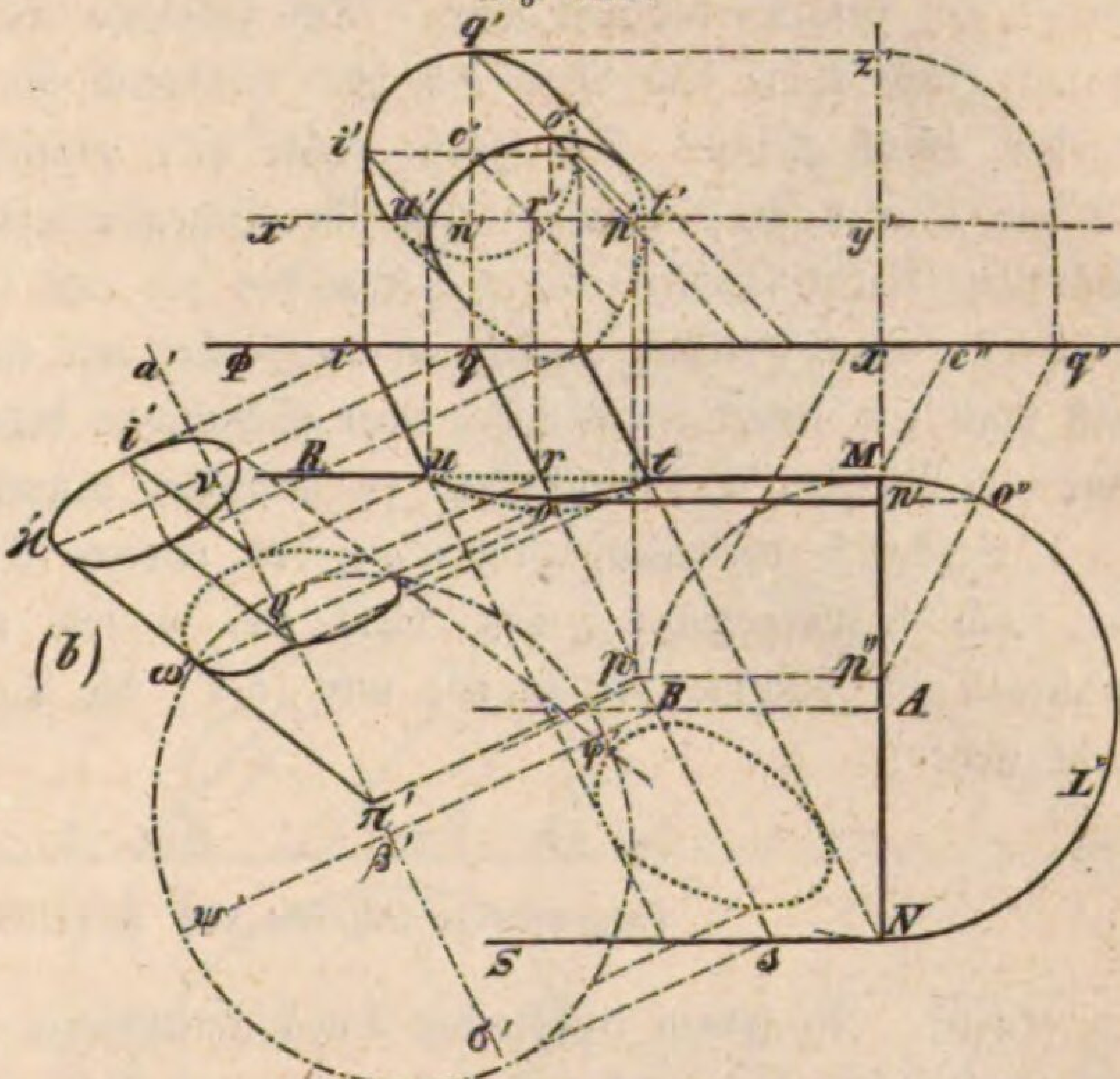


(die Höhen $b' B'$ und $f' F'$ sind gleich genommen); beide Erzeugungslinien kreuzen sich in einem Punkte der Durchschnittslinie, welcher sich nach l projicirt. $m k l$ ist die also gefundene Horizontalprojektion, und ich behaupte, sie sei eine gerade Linie. In der That sind je zwei Parabeln ähnliche Linien und bei gleichen Ordinaten $b' B'$ und $f' F'$, $a' A'$ und $e' E'$ ꝛc. stehen die Abschnitte $Z' b'$ und $M' f'$, $Z' a'$ und $M' e'$ in gleichem Verhältniß. Aber aus der Figur wird klärlich erhellen, daß $m l$ und $m k$ abermal in dem gleichen Verhältniß stehen, die drei Punkte m, k, l also in gerader Linie liegen müssen. — Man sieht hieraus, daß das Umgekehrte des Satzes §. 429 nicht statthaft sei, daß nämlich zwei Flächen zweiter Ordnung sich nach ebener Linie schneiden können, ohne zwei gemeinsame berührende Ebenen zu haben. Daß der Schnitt $m l$ wieder eine Parabel sei, folgt daraus, weil er als Parallelprojektion von $Z' A' B'$ oder von $M' E' F'$ zu betrachten ist.

435. Anmerkung über die technische Anwendung des Vorhergehenden. Die innere Gewölbfläche der Tonnengewölbe ist cylindrischer Art, und wo bei einem Bauwerke mehrere Tonnengewölbe in Verbindung auftreten, da bildet die Verzeichnung des gegenseitigen Durchschnittes der betreffenden Cylinderflächen die geometrische Grundlage der Gewölbekonstruktion. Es können namentlich unsere vorhergehenden Figuren *308*, *309* und *310* gelten als in solcher Beziehung stehend, wobei dann begreiflich nur die über der Horizontalebene befindlichen Cylinderstücke in Betracht kommen. — Werkzeichnungen werden der Regel nach in wahrer Größe ausgeführt, also für Bauwerke in großer Dimension. Dies nöthigt dabei auf eine möglichst geringe Zahl graphischer Operationen zu sehen, weitgreifende Verlängerungen gerader Linien u. s. w. zu vermeiden. — Zu einigem Fingerzeig hierüber soll die Darstellung Fig. *312* dienen. Die Achse $A B$ einer ersten Cylinderfläche und zwei ihrer geraden Erzeugungslinien $M R$, $N S$ liegen in der Horizontalebene $x' y'$ und zwar parallel zur Grundlinie $\Upsilon \Phi$; die Basis der Fläche liegt in einer auf $A B$ senkrechten Ebene $M N$, und wurde nach $M L'' N$ in die Ebene $x' y'$ umgelegt. Die Achse $(q r, c' r')$ einer zweiten Cylinderfläche soll sich mit der Geraden $(M R, x' y')$ in einem Punkte (r, r') kreuzen. Außerdem liegt sie schräg gegen $M R$ sowol, wie gegen die Horizontalebene, und durchdringt die vertikale Projektionsebene in (q, c'). In derselben Ebene liegt ein Kreis vom Radius $c' i'$ als Basis der zweiten Cylinderfläche. Diesen Annahmen zu Folge ergeben sich alsofort (u', u) und (t', t) als zwei dem Durchschnitt beider Cylinderflächen angehörige Punkte. Weitere Punkte (o', o)... u. s. w. dieses Schnittes zu finden, würde man nach unserer seitherigen Methode

in folgender Weise arbeiten. (q', q) ein Punkt in der Basis der zweiten Cylinderfläche; $(q' p', q p)$ die gerade Erzeugungslinie dieses Punktes und (p', p) deren Begegnungspunkt mit der Horizontalebene $x' y'$. Eine durch $(q' p', q p)$ gelegte Hilfsebene H, welche den Erzeugungslinien der ersten Fläche parallel ist, hat als Risse die zwei durch (q', q) und (p', p) gehenden Parallelen zur Achse $A B$, nämlich die Geraden $q' z'$ und $p p''$. Die erste von ihnen trifft die Ebene $N M$ in (Y, z'), die zweite trifft sie in (p', y'), woraus hervorgeht, daß H in $N M$ einen Schnitt mache, welcher durch Umlegung nach $p' q''$ fällt (wenn $Y q'' = y' z'$ genommen wird).

Fig. 312.



Der umgelegte Schnitt und die umgelegte Basis kreuzen sich in o'', welcher Punkt sich nach w projicirt und dort die Horizontalprojektion $w o$ der geraden Erzeugungslinie des ersten Cylinders bestimmt, die mit $(q' p', q p)$ in der Ebene H liegt und somit den Punkt (o, o') bestimmt.

Wenn sofort die wahren Längen der Erzeugungslinien $(q' o', q o)$, $(i' u', i u)$ .... ꝛc. zwischen der Basis des zweiten Cyiinders und dem ersten Ast der Durchschnittskurve gefordert würde, ein in der Praxis gewöhnlicher Fall, so könnte dem entsprochen werden durch Umlegen der einzelnen Geraden oder durch Anordnen einer zu denselben parallelen Seitenprojektion, und letzteres läßt sich immer mit größerer Ordnung in der Konstruktion ausführen. $\alpha' \beta'$ Fig. (b) sei eine zu $r q$ parallelstehende Vertikalebene, in welche $(q' o' p', q o p)$ projicirt werden soll, sich dort in ihrer wahren Länge darzustellen. Hat man zu diesem Zweck aus q, r, p Senkrechte auf $\alpha' \beta'$ gefällt, so projicirt p sich nach π', q nach $\varkappa'$ (die Höhe $\nu' \varkappa' = n' q'$ genommen), also $(q' p', q p)$ nach $\varkappa' \pi'$ und (o, o') auf $\varkappa' \pi'$ nach ω'. $\varkappa' \omega'$ ist die gesuchte wahre Länge. Greift man aber einmal zu einer Seitenprojektion, dann wird man sie auch zur

unmittelbaren Konstruktion der Durchschnittspunkte wie (ω', o) benützen und damit die ganze Ausführung rechts von NM entbehrlich machen. Zu dem Ende denke ich mir durch $(qp, q'p')$ eine vertikale Hilfsebene H gelegt, bestimme deren Schnitt in der ersten Cylinderfläche, welcher mit der Geraden in (o, ω') zusammentreffen wird. Der fragliche Schnitt aber ist eine Ellipse, deren große Achse das Maß rs hat, während die kleine Achse dem Durchmesser MN gleicht. Die große Achse Bs projicirt sich nach $\rho' \beta' \sigma'$, die Ellipse also nach $\rho' \psi' \sigma' \varphi'$ und ihr Begegnungspunkt mit $\varkappa' \pi'$ nach ω'. Parallele Vertikalebenen mit qs schneiden die erste Cylinderfläche nach gleichen Ellipsen, deren Vertikalprojektionen im Großen um so einfacher erhalten werden, als man sich dabei einer Lehre oder Schablone bedienen wird, welche zudem nur ein Viertheil des Umfanges zu umfassen braucht.

Bezüglich der Projektion uot des oberen Astes der Durchschnittslinie sei noch hervorgehoben, daß diese bei u wie t einen Schnabel bildet, während im Raume bei (u, u') und (t, t') die Tangenten dieser Linie vertikal stehen.

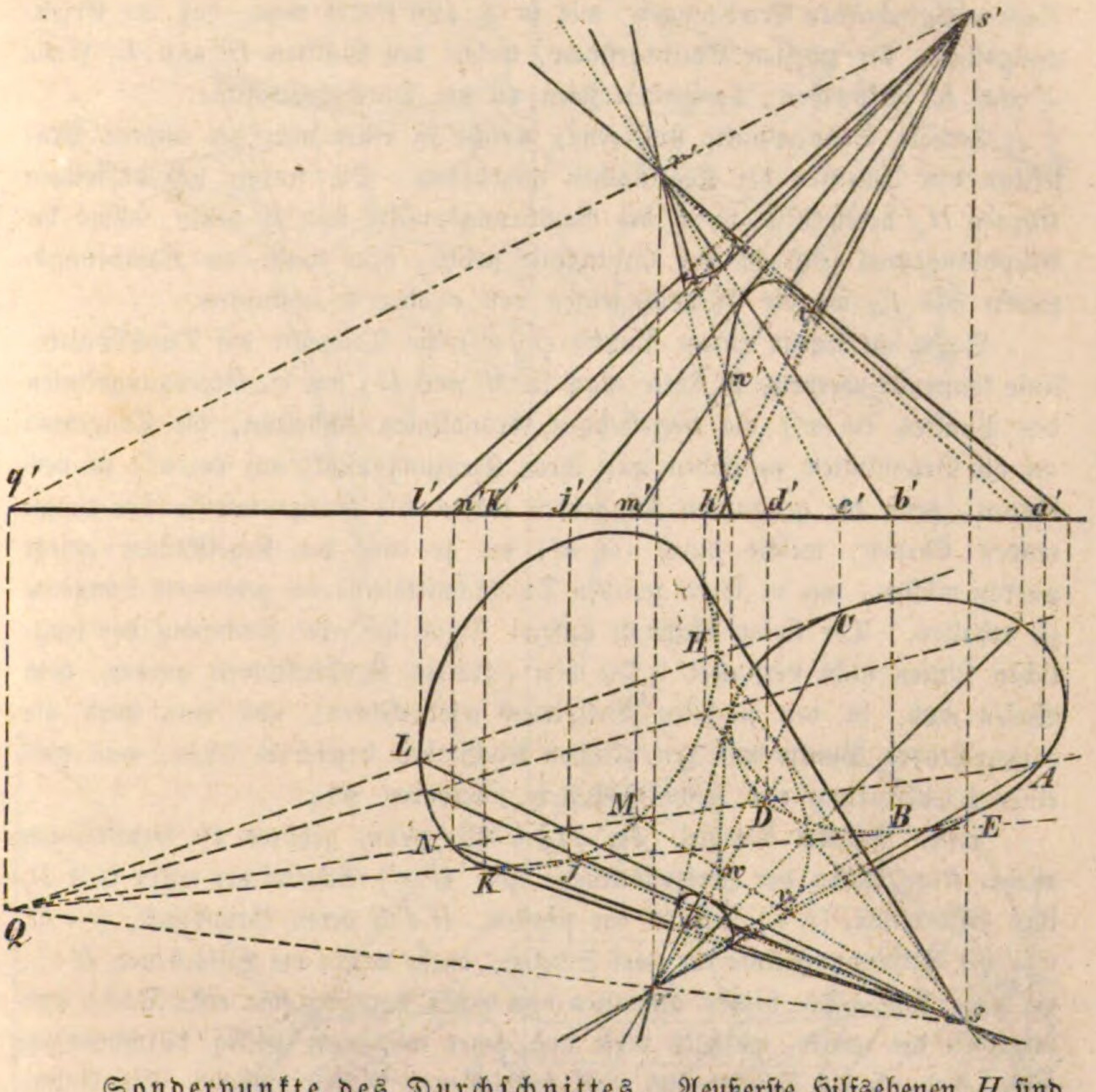
Gegenseitige Schnitte von Kegelflächen.

436. In jedem Punkte der Durchschnittslinie zweier Kegelflächen kreuzen sich zwei gerade Linien, deren je eine einer der Flächen angehört. Beide Geraden bestimmen eine Ebene, welche durch die Scheitel der zwei Flächen geht. Legt man daher durch diese zwei Scheitel eine Reihe von Hilfsebenen, welche beide Flächen schneiden, so wird jeder Schnitt aus einer gewissen Zahl von geraden Linien bestehen, deren Kreuzungspunkte der Durchschnittslinie beider Kegelflächen angehören.

437. **Erstes Beispiel.** Grundlinien beider Kegelflächen sind die zwei in der Horizontalebene liegenden Ellipsen CAB, MKL Fig. *313*; ihre Scheitel sind (r, r') und (s, s'). Eine gerade Linie, welche beide Scheitel verbindet, schneidet die Horizontalebene in (Q, q'). Alle angewendeten Hilfsebenen $H\ldots$ gehen durch diese Gerade, deren Horizontalrisse also durch den Punkt (Q, q'). Man ziehe durch Q eine Gerade AQ, welche beide Ellipsen schneidet, was in vier Punkten A, D, M, N geschehen wird, betrachte diese Gerade als den Horizontalriß einer durch $(sQ, s'q')$ gehenden Hilfsebene, so wird diese die erste Kegelfläche nach zwei geraden Erzeugungslinien $(Ar, a'r')$, $(Dr, d'r')$ schneiden, die zweite Kegelfläche nach zwei solchen Erzeugungslinien $(Ms, m's')$, $(Ns, n's')$ und diese vier Geraden werden sich selbst in vier Punkten

$(v\,v')$, $(w\,w')$, $(x\,x')$, $(z\,z')$*) schneiden, welche der gesuchten Durchschnittslinie angehören. Durch Anwenden weiterer Hilfsebenen finden sich jeweils weitere vier Punkte dieser Linie.

Fig. 313.



Sonderpunkte des Durchschnittes. Aeußerste Hilfsebenen H sind jene, welche die eine von beiden Kegelflächen durchschneiden, während sie die andere nur noch tangiren. Ihre Horizontalrisse müssen deshalb die eine beider elliptischer Grundlinien schneiden und die andere berühren. $B\,Q$,

*) Sie konnten in unserer kleinen Figur nicht alle mit Buchstaben markirt werden, sind aber unschwer zu erkennen.

CQ sind diese Risse. Da sie beide die Ellipse CAB tangiren, so beurkundet dieser Umstand, daß ein völliges Durchdringen der Fläche vom Scheitel (s, s') durch jene vom Scheitel (r, r') stattfinde und daß demzufolge die Durchschnittslinie beider Kegelflächen aus zwei geschlossenen Aesten bestehe. Nach entsprechenden Erwägungen, wie in §. 426 findet man, daß die Erzeugungslinien der zweiten Cylinderfläche, welche den Punkten H und L, sowie J und K entsprechen, Tangenten seien an die Durchschnittslinie.

Fernere Sonderpunkte sind jene, welche in einer oder der andern Projektion den Umrissen der Kegelflächen angehören. Sie finden sich in solchen Ebenen H, deren Risse durch die Berührungspunkte wie L gehen, allwo die Ellipstangenten senkrecht zur Grundlinie stehen, oder durch die Berührungspunkte wie E, wo die Ellipstangenten von r oder s auslaufen.

Sollte an irgend einem Punkte (w, w') die Tangente der Durchschnittslinie konstruirt werden, so hätte man in M und D, wo die Erzeugungslinien des Punktes (w, w') die betreffenden Grundlinien schneiden, die Tangenten an die Grundlinien zu ziehen und ihren Kreuzungspunkt mit (w, w') zu verbinden, denn die genannten Tangenten wären die Horizontalrisse der tangirenden Ebenen, welche durch (w, w') an je eine der Kegelflächen gelegt werden müssen, um in ihrer geraden Durchschnittslinie die geforderte Tangente zu erhalten. Der kleine Maßstab unserer Figur hat eine Zeichnung der fraglichen Linien nicht verstattet. Die hier erklärten Konstruktionen werden, dem Wesen nach, in den nächsten Beispielen wiederkehren, und man wird die entsprechenden Punkte mit den gleichen Buchstaben bezeichnet sehen, was uns einer Wiederholung von schon Gesagtem überheben mag.

438. **Zweites Beispiel.** *Fig. 314.* Wie zuvor gehören die Grundlinien wieder Kegelflächen der Horizontalebene an. (r, r') Scheitel der ersten CAB, ihre Grundlinie, (s, s') Scheitel der zweiten, HJK deren Grundlinie, $(r\,s\,Q, r'\,s'\,q')$ Verbindungslinie der zwei Scheitel, durch welche die Hilfsebenen $H \ldots$ zu legen sind. Die beiden äußersten von diesen berühren die erste Fläche und schneiden die zweite, weshalb diese von jener wiederum völlig durchdrungen wird, wodurch ein Schnitt aus zwei geschlossenen Aesten entsteht. Ein Unterschied zwischen gegenwärtiger und der vorhergehenden Figur liegt darin, daß einer der Aeste des Durchschnittes den unteren Netzen der Kegelflächen angehört, der andere Ast den oberen Netzen. Von den Erzeugungslinien der kreisrunden Kegelfläche liefern diejenigen, welche dem Bogen HMJ angehören, Punkte des Schnittes der unteren Kegelnetze, während Punkte des Schnittes der oberen Kegelnetze jenen Erzeugungslinien angehören, welche dem Bogen

Fig. 315.

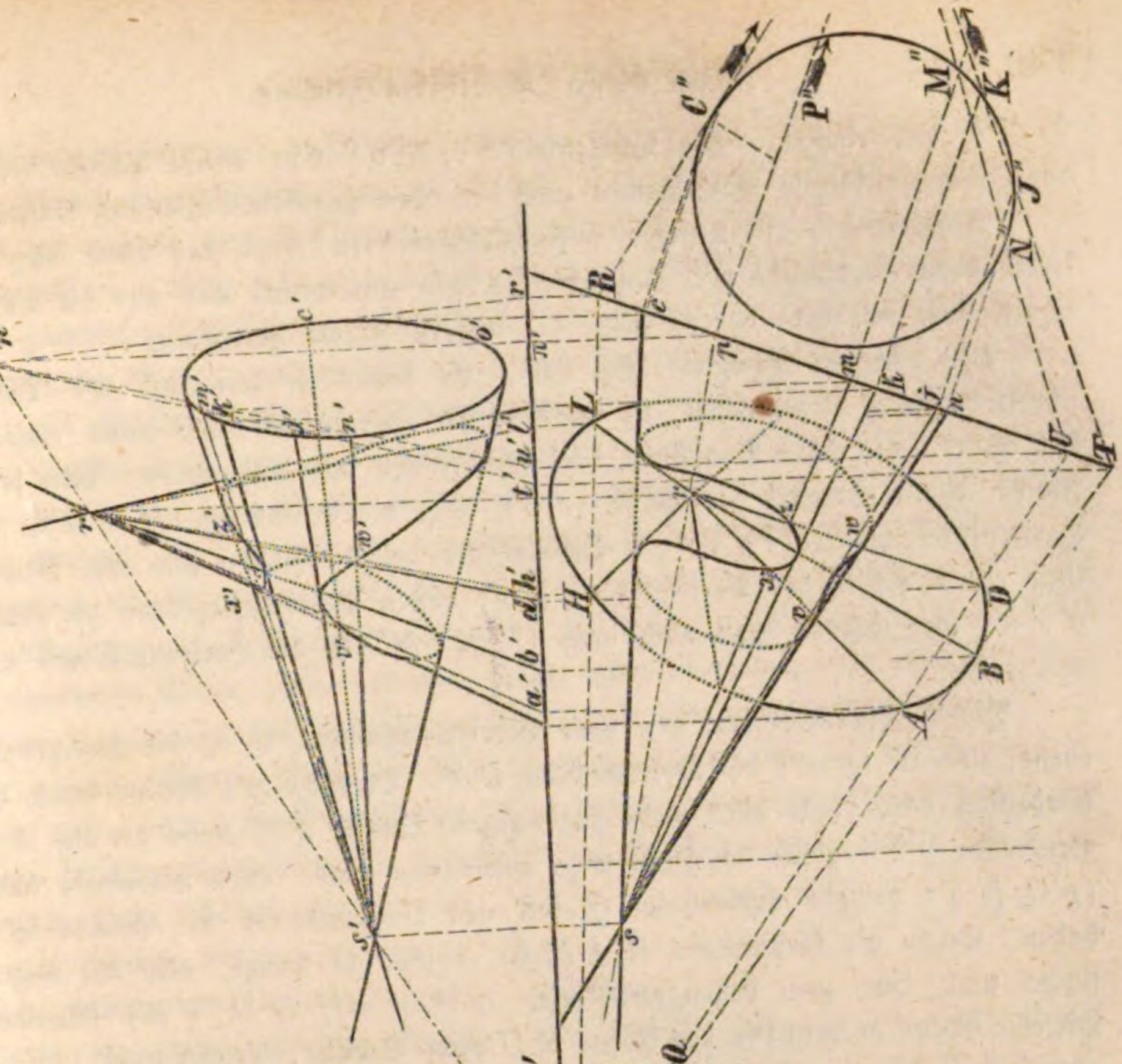
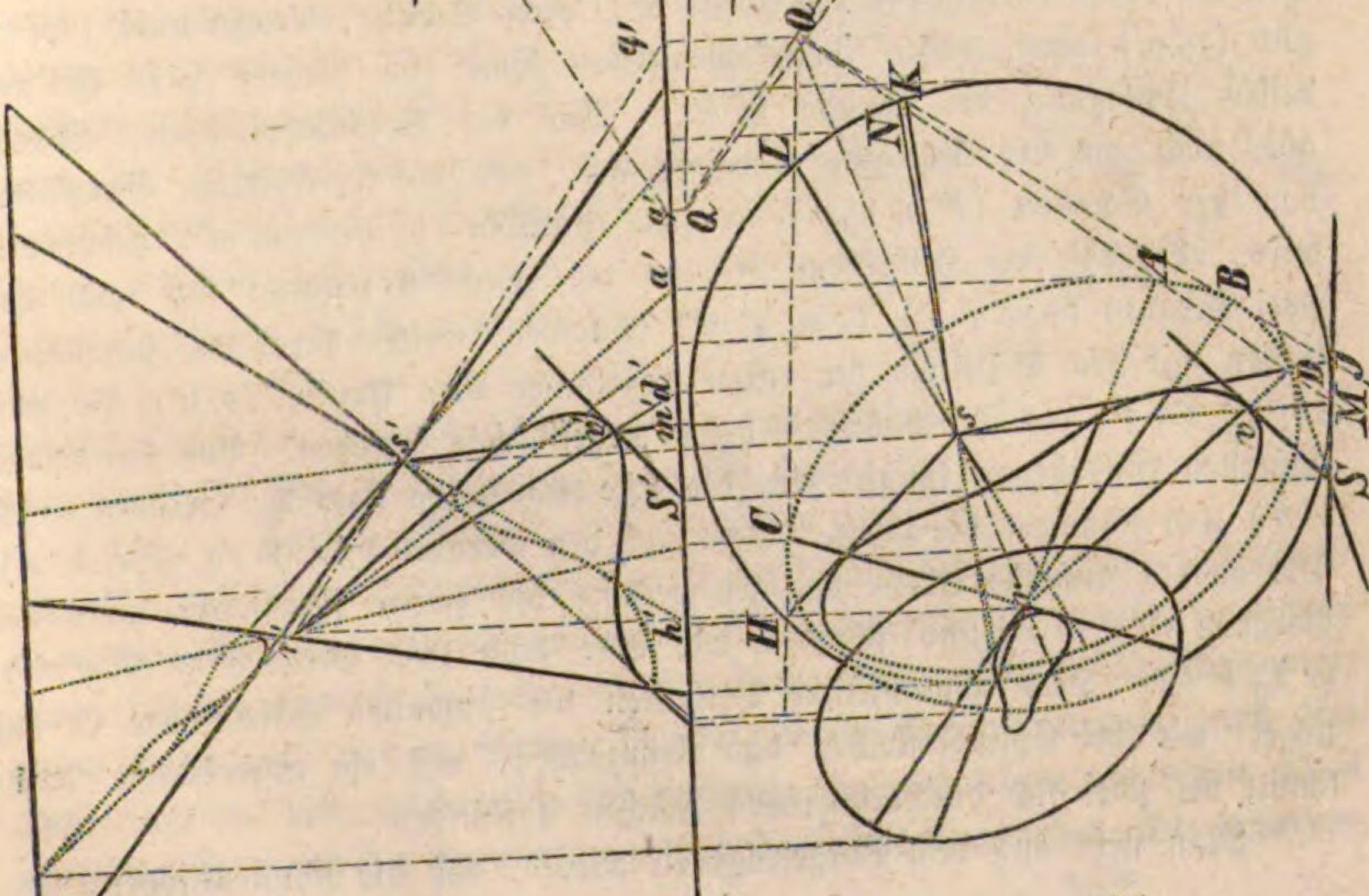


Fig. 314.



LNK entspringen. Die Tangente $(Sv, S'v')$ von einem Punkte (v, v') der Durchschnittslinie ward genau nach der oben gegebenen Weisung konstruirt.

Anmerkung. In unserer Horizontalprojektion ward das obere Netz der kreisrunden Kegelfläche der Deutlichkeit wegen unterdrückt und nur die Durchschnittslinie mit dem oberen Netze der andern Fläche gezeichnet.

439. Drittes Beispiel. Fig. *315.* Es behandelt den Fall des Durchschnittes zweier Kegelflächen, in welchem die entstandene Linie einen einzigen Ast bildet, also einen Ausschnitt der einen Fläche aus der andern. Von jener Fläche, deren Scheitel der Punkt (r, r'), liegt die Grundlinie HAB in der Horizontalebene. (s, s') ist der Scheitel der andern Fläche und ihre Grundlinie ein Kreis in der Vertikalebene RT, dessen Vertikalprojektion die Ellipse $c'o'n'$, und welchen man auch nach $C''M''N''$ in die Horizontalebene umgelegt hat.

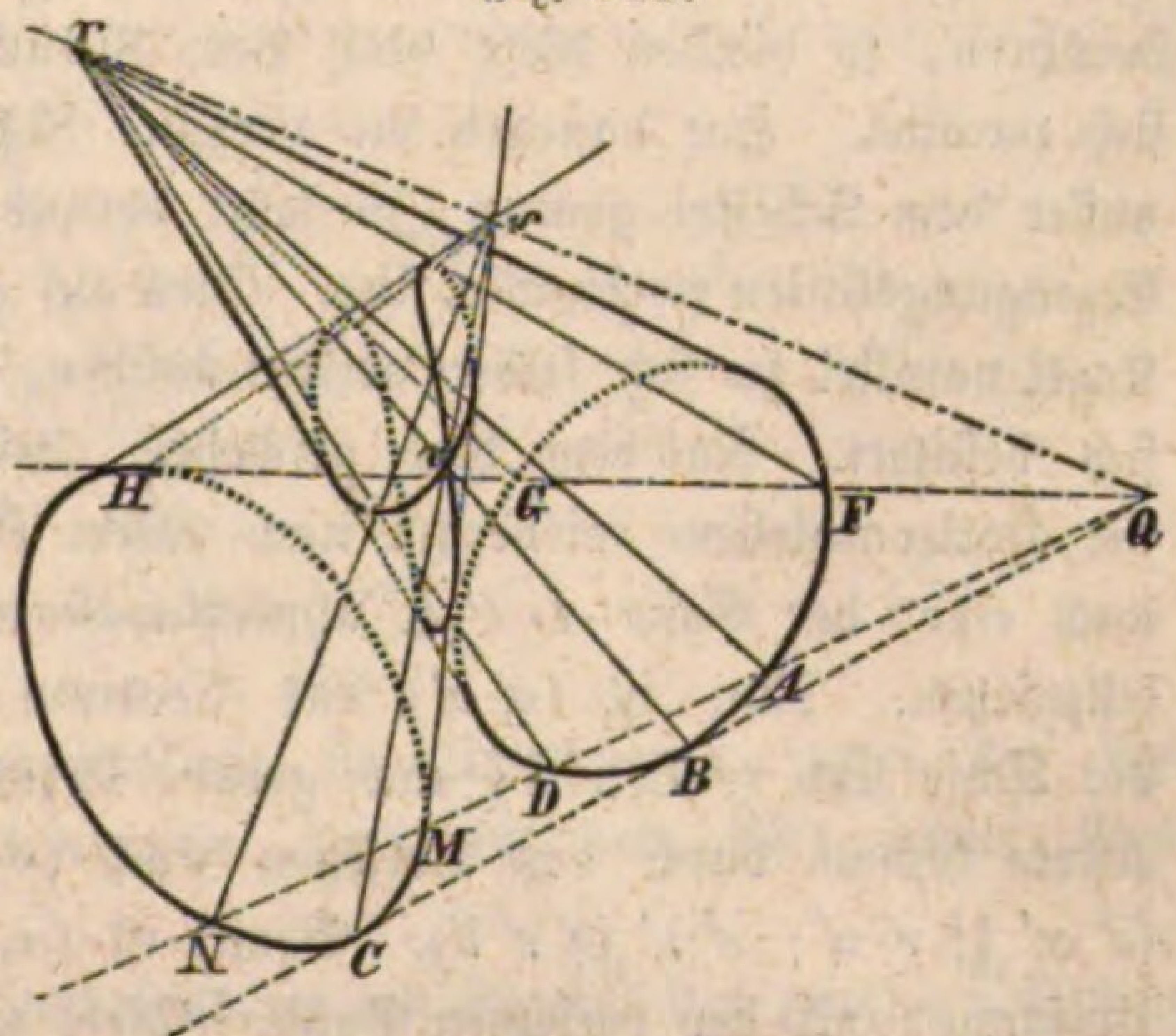
Die Verbindungslinie der zwei Scheitel schneidet in Q die Horizontalebene, und in (p, p') die Vertikalebene RT. Dies (p, p') kommt durch die Umlegung nach (dem nicht mehr zugängigen) Punkte P'', wenn die auf RT Senkrechte pP'' gleich der Höhe $\pi'p'$ genommen wird. Eine beliebige, durch $(pQ, p'q')$ gelegte Hilfsebene H soll als Horizontalriß die Gerade QU haben, welche die Grundlinie HAB in A und D kreuzt, also die Kegelfläche nach den zwei Erzeugungslinien $(rA, r'a')$, $(rD, r'd')$ schneidet. Dieselbe Ebene H macht in der Ebene RU einen Schnitt, welcher durch (U, u') und (p, p') geht, dessen Vertikalprojektion somit die Gerade $u'p'$ ist und dessen Umlegung die Gerade UP''. Aus der Vertikalprojektion, schärfer aber noch aus der Umlegung, ergiebt sich, daß die kreisförmige Grundlinie von der Geraden $(Up, u'p')$ in zwei Punkten (n, n'), (m, m') geschnitten wird, oder daß die Hilfsebene H und die zweite Kegelfläche sich nach den zwei Geraden $(sn, s'n')$, $(sm, s'm')$ schneiden, welche durch ihr Zusammentreffen mit den Schnitten der ersten Kegelfläche vier Punkte (v, v'), (w, w'), (x, x'), (z, z') des Durchschnittes beider Kegelflächen festsetzen. Von den beiden äußersten Hilfsebenen tangirt eine die erste Kegelfläche nach der Geraden $(rB, r'b')$ und schneidet die zweite Fläche nach den Geraden $(js, j's')$, $(ks, k's')$. Die andere äußerste Ebene dagegen berührt die zweite Kegelfläche nach der Geraden $(cs, c's')$ und schneidet die erste nach zwei Geraden $(rH, r'h')$, $(rL, r'l')$. Dies abwechselnde Verhalten der äußersten Hilfsebenen ist bei Kegel- wie bei Cylinderflächen das Kennzeichen, daß ein gegenseitiger Ausschnitt der zwei sich durchdringenden Flächen stattfinde.

Man sieht aus dem Vorgetragenen wieder, daß die Konstruktionen, von

welchen wir sprechen, vielfältiger werden, sobald die Grundlinien der zwei sich schneidenden Flächen nicht in gleicher Ebene liegen. Aehnliche Bewandtniß hat es mit dem Bestimmen der Tangente an einem Punkte der Durchschnittslinie. Wir führen das Betreffende nur im Vortrage an, dem Leser die graphische Ausführung überlassend. (z, z') sei der Berührungspunkt; die tangirende Ebene, welche durch (z, z') an die erste Kegelfläche zu legen ist, hat als Horizontalriß die Ellipstangente im Punkte D. Zur Bestimmung der tangirenden Ebene an die zweite Kegelfläche im Punkte (z, z') dient erstlich die Kreistangente im Punkte M'', welche die Horizontalebene in einem Punkte der Geraden RT schneidet; er mag mit X bezeichnet sein; für's Zweite schneidet die Erzeugungslinie $(m z s, m' z' s')$ die Horizontalebene in einem Punkte, der mit Y bezeichnet sein soll. XY ist der Horizontalriß der zweiten tangirenden Ebene, und bestimmt durch seine Kreuzung mit dem Risse der ersten tangirenden Ebene einen zweiten Punkt der geforderten Tangente.

440. **Viertes Beispiel.** Der Durchschnitt besteht aus einem einzigen Aste mit einem doppelten Punkte. Die hierauf bezügliche Fig. *316* zeigt nur eine Horizontalprojektion, in deren Ebenen die Grundlinien beider Kegel enthalten sind. Damit ein Schnitt dieser Flächen wie der hier fragliche entstehe wird erfordert, daß e i n e der zwei äußersten Hilfsebenen, jedoch nur eine von ihnen, gleichzeitig beide Kegelflächen tangire, ihr Horizontalriß QBC also Tangente sei an beide Grundlinien; der von dieser Ebene gelieferte doppelte Punkt projicirt sich nach v. In den übrigen Stücken findet die Figur im Vorhergegangenen ihre Erläuterung.

Fig. *316*.

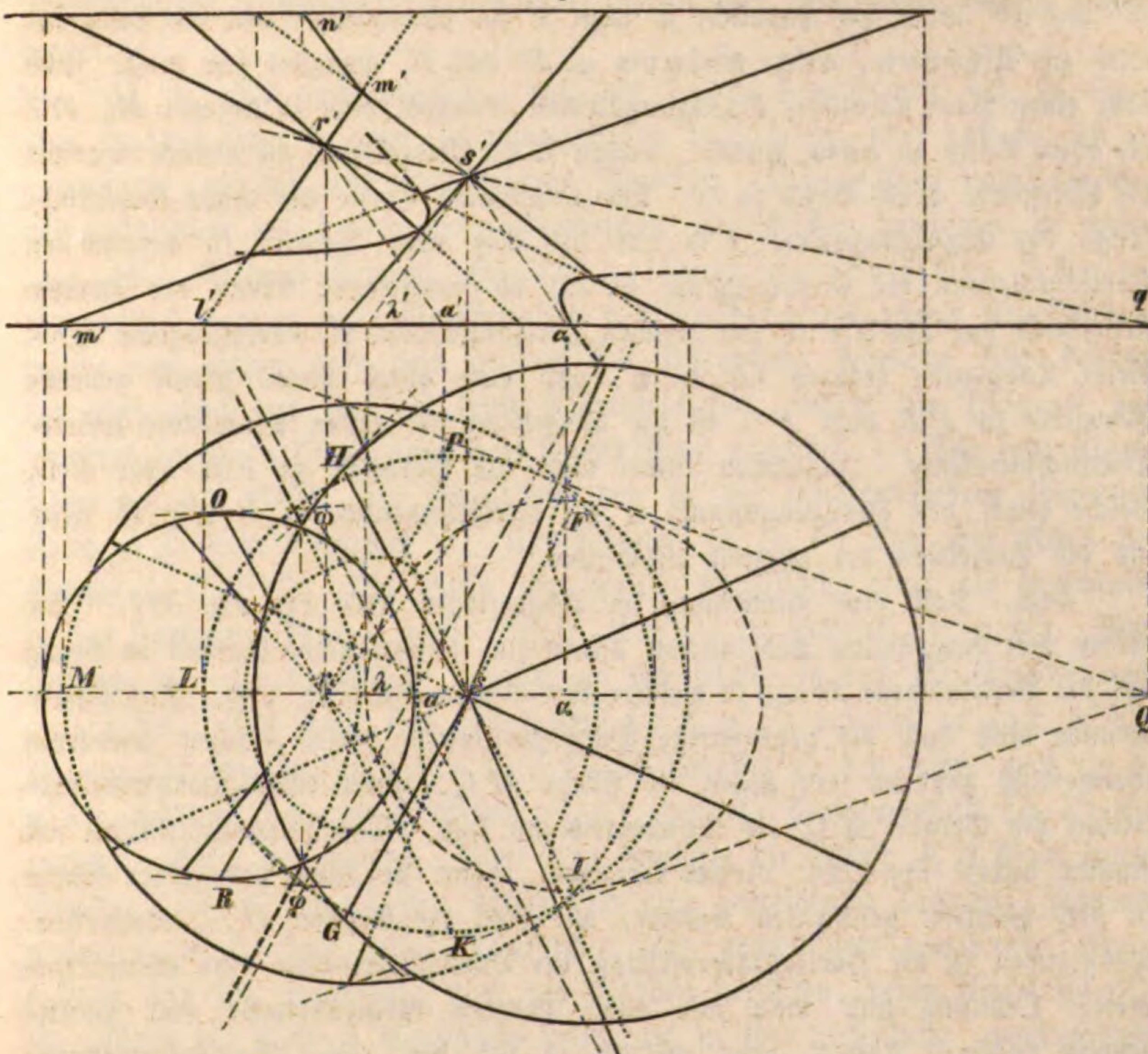


441. **Fünftes Beispiel.** Fig. *317*. Offene hyperbolische Durchschnittslinie zweier Kegelflächen. Was die allgemeinen Verhältnisse unserer Figur betrifft, so ersieht man, daß die Grundlinien beider Flächen Kreise sind, welche in der Horizontalebene liegen, und daß die Flächen in ihren oberen Netzen wiederum durch zwei Kreise begränzt sind, welche einer und derselben Horizontalebene angehören. Q ist wiederum Fußpunkt der Geraden, welche beide Scheitel verbindet. Die äußersten

Hilfsebenen tangiren eine und dieselbe Kegelfläche, weshalb mindestens ein Ast des gesammten Durchschnittes geschlossen sein muß. Eine Hilfsebene innerhalb der zwei äußersten scheidet jede Kegelfläche nach zwei Geraden, welche sich theils auf den unteren, theils auf den oberen Flächennetzen durchkreuzen, so daß der Durchschnitt beider Flächen aus drei getrennten Aesten besteht. Die Konstruktion wird bald zu der Vermuthung führen, daß zwei von diesen Aesten offene Linien seien. Ob es wirklich der Fall, kann sogleich hergestellt werden, denn es hängt von dem Umstande ab, ob unter den geraden Erzeugungslinien der einen Kegelfläche eine oder die andere sich befinde, welche eine Parallele hat unter den Erzeugungslinien der zweiten Kegelfläche. Denn jedes Paar solcher Parallelen liegt in einer Ebene, welche zur Reihe der Hilfsebenen $H\ldots$ gehört, und giebt also in dieser Ebene einen im Unendlichen liegenden Punkt der Durchschnittslinien. Die Frage nun, ob unter den geraden Erzeugungslinien zweier Kegelflächen sich ein oder das andere Paar von Parallelen befinde, wird damit beantwortet, daß man sich die eine von beiden Kegelflächen parallel mit sich selber versetzt denkt, bis ihr Scheitel mit jenem der zweiten zusammenfällt. Wenn sich, nachdem dies geschehen, beide Kegelflächen nach einer oder nach mehreren geraden Erzeugungslinien schneiden oder auch berühren, so bleiben diese nach dem Zurückversetzen der ersten Fläche unter sich parallel. Hat dagegen die versetzte Fläche mit der zweiten keinen Punkt außer dem Scheitel gemein, so folgt daraus, daß auf beiden keine parallelen Erzeugungslinien vorhanden sind. Dies auf Fig. *317* anzuwenden, sei der erste Kegel parallel zu sich selber versetzt worden, daß sein Scheitel (r, r') in (s, s') sich befindet. Nachdem dies geschehen, wird die versetzte Kegelfläche durch die Horizontalebene wiederum nach einem Kreise geschnitten (im Allgemeinen nach einer der Basis LPK ähnlichen Linie). Es handelt sich, diesen Kreis festzusetzen. Nun ist (a, a') das Centrum von LPK; daher $(r\,a,\ r'\,a')$ die Achse und $(r\,L,\ r'\,l')$ eine gerade Erzeugungslinie der ersten Kegelfläche; erstere kommt durch das Versetzen nach $(s\,\alpha,\ s'\,\alpha')$, letztere nach $(s\,\lambda,\ s'\,\lambda')$, $(s'\,\alpha' \,\#\, r'\,a';\ s'\,\lambda' \,\#\, r'\,l')$. Somit ist (α, α') das Centrum und (λ, λ') ein Umfangspunkt der versetzten Basis. Diese und die Basis IMF der zweiten Kegelfläche kreuzen sich in I, F. Es folgt daraus, daß beide Kegelflächen sich nach zwei ihrer Erzeugungslinien schneiden, welche die Geraden $I\,s\,H$, $F\,s\,G$ als Horizontalprojektion haben. Nachdem die erste Kegelfläche wieder an ihren ursprünglichen Ort zurückversetzt worden, wobei sie die Durchschnittsgeraden mitgeführt, projicirt sich die eine als Parallele $K\,r\,O$ zu $I\,s\,H$, die andere als Parallele $P\,r\,R$ zu $F\,s\,G$.

Somit haben sich auf den beiden Kegelflächen unserer Figur zwei Paare unter sich paralleler Erzeugungslinien zu erkennen gegeben und auf diesen

Fig. 317.



liegen vier Punkte der Durchschnittslinie im Unendlichen, zwei auf dem Durchschnittsaste der oberen Flächennetze, zwei auf dem Aste rechter Hand der unteren Netze.

Wir sprechen gegenwärtig insbesondere von Kegelflächen zweiter Ordnung, d. i. von solchen, welche eine Kurve zweiter Ordnung als Basis haben; da nun zwei derartige Kurven sich in vier, in zwei, selbst in einem Punkte schneiden können, so giebt es auch bei zwei sich durchschneidenden Kegelflächen zweiter Ordnung möglicher Weise vier oder weniger Paare von parallelen Erzeugungslinien. So oft man auf zwei sich schneidenden Kegelflächen zwei gerade Erzeugungslinien E', E'' wählt, welche sich in einem Punkte V der

Durchschnittslinie kreuzen, und man legt durch E', wie durch E'', je eine tangirende Ebene an die zugehörige Kegelfläche, so ist die Durchschnittsgerade dieser Ebenen Tangente der Durchschnittslinie im Punkte V. Wären nun E' und E'' unter sich parallel, so liegt V im Unendlichen und die Tangente wird zur Asymptote, welche wiederum zu E' und E'' parallel sein muß. Von dem einen Paar paralleler Erzeugungslinien schneidet eine in unserer Fig. 317 die obere Basis in einem Punkte, wovon R die Projektion, die andere schneidet die betreffende obere Basis in G. Die tangirende Ebene der ersten Kegelfläche längs der Erzeugungslinie FG hat als Riß oder Schnitt in der oberen Horizontalebene die Kreistangente in R; die tangirende Ebene der zweiten Kegelfläche hat als Riß in der gleichen Horizontalebene die Kreistangente in G. Beide Tangenten kreuzen sich in φ, und eine durch diesen Punkt gehende Parallele zu PR oder FG ist die Projektion der ersten Asymptote unserer Durchschnittslinie. Ingleichen findet man die Parallele zu IH oder KO, welche durch den Kreuzungspunkt ω der Kreistangenten in O und H geht, als die Projektion der zweiten Asymptote.*

442. Noch eine Bemerkung im Allgemeinen über die Fig. 317. Die beiden hier dargestellten Kegelflächen bilden ein symmetrisches Ganzes in Bezug auf die Vertikalebene MQ, in welcher ihre Achsen enthalten sind. Aus diesem Grunde muß auch die gegenseitige Durchschnittslinie dieser Flächen wiederum symmetrisch gestaltet sein gegen die Ebene MQ, sowie deren Horizontalprojektion die Gerade MQ als Symmetrieachse hat. Die Durchschnittslinie im Raume bildet eine Linie vierter Ordnung, denn sie kann von einer Ebene in vier Punkten geschnitten werden, wie dies die Ebenen $H\ldots$ ausweisen. Desgleichen ist die Horizontalprojektion der Durchschnittslinie eine ebene Linie vierter Ordnung und kann mit einer Geraden möglicherweise vier Punkte gemein haben. Anders aber verhält es sich mit deren Vertikalprojektion; denn diese ist in einer Ebene verzeichnet, welche parallel steht mit der Symmetrieebene MQ und kann darum nur halb so viel Punkte haben wie die Linie im Raume, und gehört also zu einer Linie von halb so hoher Ordnung, nämlich vom zweiten Grade. In der That wird die Vertikalprojektion gebildet aus zwei hyperbolischen Bögen und einer Geraden $m'n'$, welche aber von Geraden nur in zwei Punkten getroffen werden können.

Wir haben bis daher den Fall behandelt, wobei die zweite Kegelfläche

---

*) Zu der Horizontalprojektion von Fig. 317 sollte der Hyperbelast zwischen dem Asymptotenwinkel $\omega a \varphi$, weil sichtbar, voll ausgezogen sein.

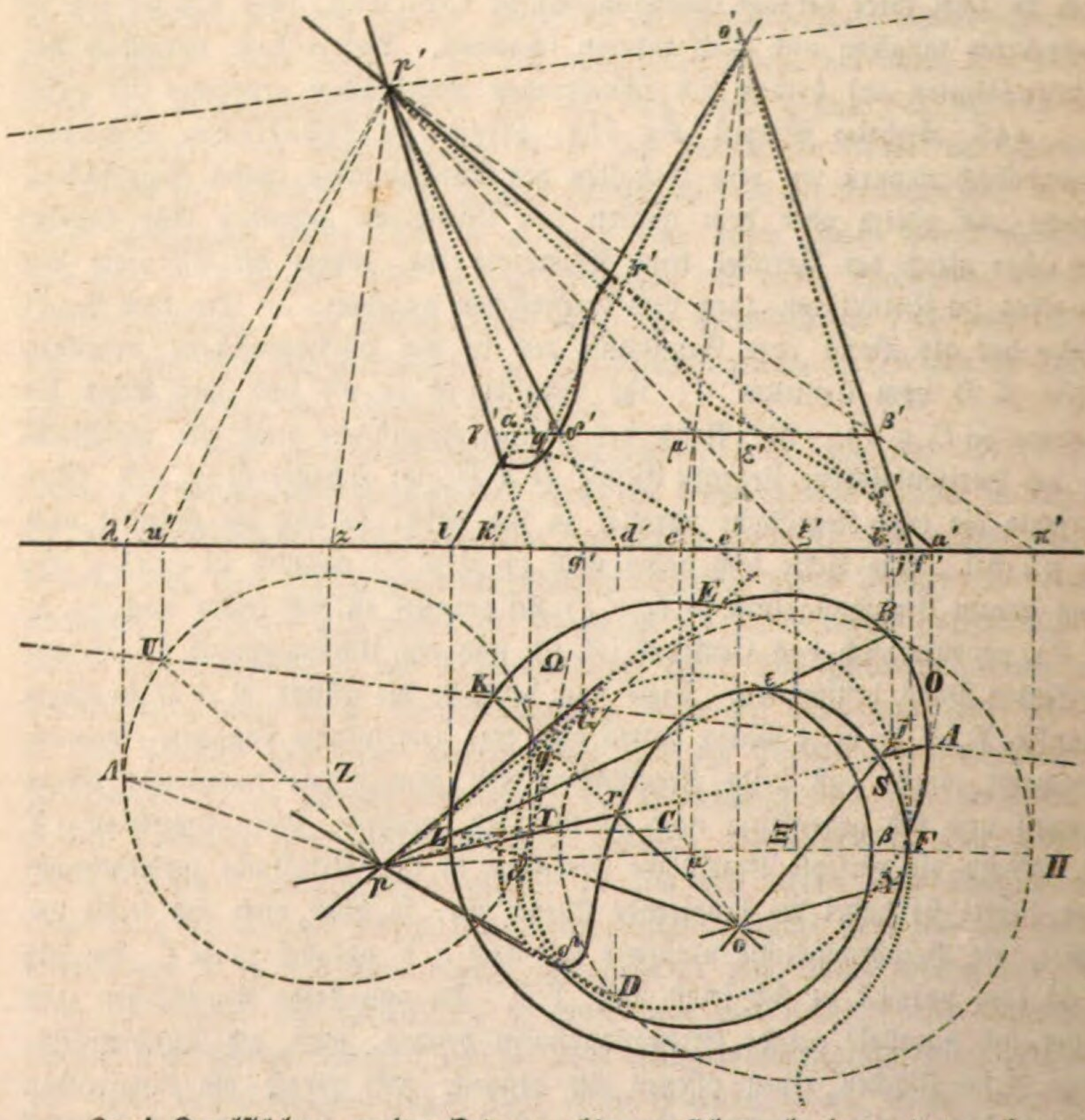
und die parallel versetzte erste sich in einer gewissen Zahl gerader Linien schneiden. Hier sind stets eben so viele Asymptoten der Durchschnittslinie vorhanden, und darin liegt der Grund, warum wir eben diese Art des Durchschnittes hyperbolisch genannt, obwol hier von keiner ebenen Kurve die Rede.

Es ist aber auch möglich, daß die beiden Kegelflächen sich in einer oder in zwei ihrer geraden Erzeugungslinien tangiren, oder daß sie sich in einer Linie tangiren und nach anderen schneiden. Diesem Falle paralleler Berührungslinien auf beiden sich schneidenden Kegelflächen gewidmet ist unser

443. **Sechstes Beispiel** *Fig. 318*, offener parabolischer Schnitt. Parabolisch nennen wir jene Gestalten des Durchschnittes zweier Kegelflächen, welche aus einem oder dem andern ins Unendliche gehenden Aste besteht, der aber gleich der Parabel keine Asymptote hat, indem die Tangente des Punktes im Unendlichen ganz dem Unendlichen angehört. — Die erste Kegelfläche hat als Basis oder Grundlinie den in der Horizontalebene liegenden Kreis KL vom Centrum C; ihr Scheitel ist (o, o') und ihre Achse die Gerade $(o\,C, o'\,c')$. Als Basis der zweiten Kegelfläche dient die gleichfalls in der Horizontalebene liegende Ellipse $B\,A\,D$; ihr Scheitel ist (p, p'). Man versetzte die erste Kegelfläche parallel zu sich selbst, so daß ihr Scheitel nach (p, p') fiel. Die Achse kam dabei nach $(p\,Z, p'\,z')$ parallel zu $(o\,C, o'\,c')$; eine gerade Erzeugungslinie $(o\,L, o'\,l')$ fiel parallel zu sich selber nach $(p\,\Lambda, p'\,\lambda')$, wodurch sich das Centrum (Z, z') und ein Umfangspunkt (Λ, λ') der versetzten Basis bestimmten. Diese nun berührte die Ellipse $B\,A\,D$ in einem Punkte Υ, d. h. beide Linien hatten hier eine gemeinsame Tangente, wodurch angezeigt ward, daß beide Kegelflächen eine gemeinsame tangirende Ebene besitzen und sich gegenseitig nach der Geraden berühren, deren Projektion $p\,\Upsilon$ ist. Ward die versetzte Kegelfläche wiederum in ihre Urstellung zurückgebracht und führte sie dabei die tangirende Ebene mit, so blieb diese sich selbst parallel, die Berührungslinie projicirte sich nach $o\,Y$ parallel zu $p\,\Upsilon$, der Riß $\Upsilon\,\Omega$ kam parallel zu sich selbst nach $Y\,O$. Da nun beide Kegelflächen zwei unter sich parallele gerade Erzeugungslinien besitzen, muß die Durchschnittslinie dieser Flächen einen offenen Ast besitzen; weil jedoch die tangirenden Ebenen längs den genannten Erzeugungslinien unter sich wiederum parallel auftreten, so liegt ihr gegenseitiger Durchschnitt, nämlich die Tangente des Punktes im Unendlichen, selbst im Unendlichen, mit andern Worten dieser Durchschnitt hat keine Asymptote.

Es begreift sich, daß, eine Zeichnung zu erhalten, welche räumliche Beziehungen wie die hier fraglichen dargestellt, man damit beginnen müsse, die zweite Kegelfläche und die versetzte erste der Art anzunehmen, daß ihre Grundlinien sich berühren, und darnach, rückwärts gehend, die endgiltige Stellung der ersten zu bestimmen.

Fig. 318.



Zwei Kegelflächen zweiter Ordnung können sich nach einer oder nach zwei geraden Linien berühren, weil zwei Kurven derselben Ordnung *eine* oder zwei gemeinsame Tangenten besitzen können. Im ersten Falle aber ist es möglich, daß die Kurven sich noch in zwei Punkten schnitten. Fände dieses statt zwischen der Ellipse BAD und dem Kreise $\Upsilon U \Lambda$, dann wäre

angezeigt, daß sie die Kegelfläche nach einer Geraden berührten und nach zwei weiteren durchschnitten, und der gesammte Durchschnitt beider ursprünglich gegebener Flächen bestände aus einem offenen parabolischen Aste ohne Asymptoten, aus einem oder dem andern offenen hyperbolischen Aste mit Asymptoten.

444. Fortsetzung. Punktweise Konstruktion der Durchschnittslinie. Diese bietet im vorliegenden Falle einiges Besondere dar. Erstlich haben die beiden Scheitel (o, o'), (p, p') so geringen Höhenunterschied, daß der früher mit Q bezeichnete Durchschnittspunkt der Verbindungslinie dieser Scheitel und der Horizontalebene weit außerhalb der Zeichnung fällt. Dies nöthigt zu einiger Umständlichkeit des Verfahrens. Angenommen, man wolle die Punkte des Durchschnittes bestimmen, welche auf der Geraden $(o\,K, o'\,k')$ liegen; durch diese Gerade und durch den Scheitel (p, p') muß eine Hilfsebene H gelegt werden; man ziehe durch (p, p') zu $(o\,K, o'\,k')$ eine Parallele $(p\,U, p'\,u')$ und bestimme ihren Durchschnitt (u', U) mit der Horizontalebene. (U wird auf dem Kreise $U\Lambda$ liegen, weil $(p\,U, p'\,u')$ der versetzten Kegelfläche angehört.) $K\,U$ ist der Horizontalriß der fraglichen Ebene H und schneidet die Grundlinien außer K noch in J, sodann in G und A, was als Schnitte in den Kegelflächen die Geraden $(o\,K, o'\,k')$, $(o\,J, o'\,j')$ und $(p\,G, p'\,g')$, $(p\,A, p'\,a')$ anzeigt, durch deren Zusammentreffen vier Punkte des Durchschnittes gefunden werden, wovon jedoch nur zwei (r, r'), (q, q') auf der Zeichnung zugängig sind 2c.

445. Andere Konstruktionsart. Haben zwei sich durchschneidende Kegel- oder Cylinderflächen kreisrunde Grundlinien, welche zusammen in einer Projektionsebene liegen, so gewinnt man Punkte des Durchschnittes in einfacher Weise auch durch Anwenden von Hilfsebenen, welche der genannten Projektionsebene parallel liegen, weil diese Schnitte wiederum Kreise sind und sich in gleicher Gestalt projiciren. Wäre aber, wie in unserem Beispiele, nur die eine Basis kreisrund, so lassen sich mit einiger Modifikation dennoch horizontale Schnitte bequem anwenden. Man schneide beide Flächen durch eine Horizontalebene $\beta'\,\alpha'\,\gamma'$. Der Schnitt in erster Kegelfläche ist ein Kreis vom Durchmesser $\alpha'\,\beta'$, wovon (μ, μ') der Mittelpunkt und dessen Horizontalprojektion der Kreis $\alpha\,\varepsilon\,\beta$. Der Schnitt in zweiter Kegelfläche wäre eine zu $B\,A\,D$ ähnliche Ellipse, welche sich punktweise verzeichnen ließe, und durch ihr Kreuzen mit dem Kreis zwei Punkte $(\varepsilon, \varepsilon')$, (δ, δ') des Durchschnittes geben würde. Vermittelst eines kleinen Kunstgriffes läßt sich das Verzeichnen der Ellipse umgehen und $B\,A\,D$ an deren Stelle in Thätigkeit setzen. Man projicire den Kreis und die Ellipse der Ebene $\alpha'\,\gamma'$ vom Scheitel (p, p')

aus perspektivisch in die Horizontalebene. Dadurch wird die Ellipse sich nach $B\,A\,D$ projiciren und der Kreis nach $B\,\Pi\,D$ [(Ξ, ξ') auf der Geraden ($p'\,\mu'$, $p\,\mu$) ist das Centrum der Projektion und $\xi'\,\pi'$ gleich ihrem Radius). Kreis und Ellipse schneiden sich in B, D, welches die Projektionen sind der zwei Kreuzungspunkte in der Ebene $\alpha'\,\gamma'$. Dadurch bestimmen sich die zwei projicirenden oder erzeugenden Geraden ($p\,B$, $p'\,b'$), ($p\,D$, $p'\,d'$), welche auf dem Umkreise ($\alpha'\,\beta'$, $\alpha\,\varepsilon\,\beta$) die Punkte ($\varepsilon$, ε'), (δ, δ') abschneiden.

Man wird wol erkennen, daß die vorgetragene Methode sich anwenden läßt auf die Konstruktion des Durchschnittes zweier Cylinderflächen, deren eine von kreisrunder Basis, nämlich wenn die Basis der andern, von welcher Gestalt sie sein möge, in gleicher Ebene mit der ersten gegeben ist. Man denkt sich beide Flächen geschnitten durch Hilfsebenen, welche der Ebene G der Grundlinien parallel sind. S' und S'' seien die zwei in einer Ebene H liegenden Schnitte, deren letzter ein Kreis; wenn nun dieser Kreis und der Schnitt S'' sich kreuzen, so gehören die Kreuzungspunkte dem Durchschnitt der beiden Cylinderflächen an. Dies zu erproben, projicirt man S' und S'' in die Ebene G durch Parallelen zu den geraden Erzeugungslinien des nicht kreisrunden Cylinders. Die Projektion von S'' ist identisch mit der Grundlinie dieses Cylinders. Die Projektion von S' dagegen ist ein ihm gleicher Kreis. Kreuzen sich nun die Projektionen von S' und S'' und man zieht die projicirenden Erzeugungslinien der Kreuzungspunkte, so schneiden diese den Kreis S' in Punkten des Durchschnittes beider Cylinderflächen.

Solche Bestimmungsarten einzelner Punkte in dem Durchschnitte zweier Kegel- oder zweier Cylinderflächen mittelst krummliniger Hilfsschnitte können in ihrer Art ganz brauchbare Ergebnisse liefern und gerade in praktischen Fällen wird man bisweilen zu ihnen hingewiesen (vergl. §. 435), allein über die Beschaffenheit des Durchschnittes, ob Durchdringung oder Ausschnitt, ob aus offenen oder aus geschlossenen Aesten bestehend ꝛc., vermögen nur die geradlinigen Hilfsschnitte Auskunft zu gewähren.

Zweite Beispielsreihe gegenseitiger Durchschnitte kreisrunder Kegelflächen.

446. Je einfacher in ihrer Art geometrische Formen sind, je öfter wird man ihnen überall da begegnen, wohin das Gebiet der Formen überhaupt sich erstreckt, und in dieser Bemerkung wird das Vorführen der nächsten Figuren unseres Lehrganges seine Rechtfertigung finden.

447. **Siebentes Beispiel.** *Fig. 319.* Durchdringung zweier kreis-

runder Kegelflächen, deren Achsen in einer Ebene liegen (welche mit A bezeichnet sein soll).

Weil in diesem Falle eine jede der zwei Flächen durch die Ebene A in zwei symmetrische Hälften getheilt wird, muß Gleiches stattfinden bei der gegenseitigen Durchschnittslinie jener Flächen. In Erwägung dieses Umstandes wird es angezeigt erscheinen, die Ebene A als Projektionsebene zu wählen, wie solches in den Fig. *319* bis *321* der Fall, wobei dies A auch als Horizontalebene gelten mag.

Fig. *319*, $O\,C$, $P\,D$ sind die beiden in der Horizontalebene liegenden Achsen, O und P die Scheitel, $V\,C$, $V\,D$ zwei je auf einer Achse senkrecht stehende Ebenen. In der ersten ist, als Basis der ersten Kegelfläche, ein Kreis $T\,C\,U$ gegeben, dessen Centrum der Punkt C, und welcher bei $T\,K'''\,U$ (zur Hälfte) auf die Projektionsebene umgelegt ward. Als Basis der zweiten Kegelfläche dient ein Kreis $Y\,D\,Z$, welcher nach seiner Umlegung in die Projektionsebene bei $Y\,B''\,Z$ erscheint. Die beiden Kreisebenen schneiden sich nach einer Vertikallinie V, welche durch Umlegung mit der ersten Ebene nach $V\,W'''$ senkrecht auf $V\,C$ fällt, und durch Umlegung mit der zweiten Ebene nach $V\,W''$ senkrecht auf $V\,D$. Die Verbindungslinie beider Scheitel trifft die eine Basisebene in Q, die andere in R. Eine Ebene, H durch $R\,Q$ gelegt, schneidet die erste Kegelfläche nach zwei geraden Erzeugungslinien, deren Projektion $e\,O$ und $f\,O$; sie schneidet die zweite Kegelfläche nach zwei geraden Erzeugungslinien, deren Projektionen $a\,P$ und $b\,P$. Die vier Geraden kreuzen sich in vier Punkten der Durchschnittslinie, welche sich nach i, m, n, p projiciren. Hat man nämlich die Gerade $Q\,X'''$ angenommen als umgelegten Durchschnitt der Ebenen H und $R\,V$ und somit die Punkte (E''', e), (F''', f) bestimmt, so findet sich, nachdem $V\,X'' = V\,X'''$ gemacht war, $R\,X''$ als Durchschnitt derselben Ebene H mit der Basisebene $V\,Q$, wodurch (B'', b), (A'', a) festgesetzt werden. Zur Reihe der Ebenen $H\ldots$ gehört auch die Projektionsebene, in welcher das Doppelpaar von Erzeugungslinien $O\,T$, $O\,U$, und $P\,Y$, $P\,Z$ enthalten ist. Diese liefern wiederum vier Punkte des Durchschnittes. Die äußersten von den Ebenen $H\ldots$ müssen eine oder die andere Kegelfläche tangiren. Man erkennt die Gerade $R\,W'''$, welche den Kreis $U\,E'''\,T$ in K''' berührt, als den umgelegten Schnitt einer dieser Gränzebenen mit der Basisebene $V\,R$ und findet $W''\,R$ (die Höhe $V\,W'' = V\,W'''$ genommen) als entsprechenden Schnitt in der Basisebene $V\,Q$, welcher Schnitt die umgelegte Basis in G'', H'' kreuzt. Die fragliche Gränzebene berührt daher die erste Kegelfläche nach einer geraden Erzeugungslinie und schneidet

die andere Fläche nach zwei eben solchen Linien. Diese drei Geraden liefern zwei Punkte des Durchschnittes, deren Projektionen *r* und *s* zugleich Berührungspunkte sind der Kurven *m r i*, *H s t* mit den Geraden *g P*, *h P*. Wird nun beachtet, daß die beiden Halbkreise $T E''' U$, $Y H'' Z$ als Umlegung gelten können, sowol der oberen wie der unteren Kreishälfte, und daß demzufolge irgend ein Punkt *m* z. B. die gemeinsame Projektion von zwei Punkten der Durchschnittslinie sei, eines, welcher über, und eines zweiten, welcher unter der Projektionsebene liegt, so läßt sich daraus schließen:

1. daß die Durchschnittslinie aus zwei geschlossenen Aesten besteht, weil eine und dieselben Kegelfläche von den beiden äußersten Hilfsebenen berührt wird, während auf beiden Flächen keine parallelen Erzeugungslinien vorhanden sind;
2. daß die Durchschnittslinie beider Flächen, welche eine Kurve vierter Ordnung ist, in der Projektion sich als Theil einer Linie zweiter Ordnung darstelle, nämlich als Rücken der zwei Aeste einer Hyperbel.

448. Tangenten der Durchschnittslinie. (Wir sprechen hier von den Projektionen als von den Punkten und Linien selber.) *i* sei der gegebene Berührungspunkt; in ihm kreuzen sich die zwei Erzeugungslinien *O f* und *P b*. Diese treffen ihre bezüglichen Basen in F''' und B''. Man zieht hier die Tangenten $F''' M$, $B'' L$, dann sind *M O* und *L P* die Risse der berührenden Ebenen beider Kegelflächen am Punkte *t*. Diese Risse kreuzen sich in *J* und *i J* ist die gesuchte Tangente.

Bei den vier Punkten *H* auf den Umrissen *O T*, *P Y* . . . führt die vorhergehende allgemeine Methode zu keinem Ergebniß, weil hier, bei *H* z. B., die tangirenden Ebenen beider Kegelflächen auf der Projektionsebene senkrecht stehen und sich als die Geraden *O T*, *P Y* darstellen, während ihre gegenseitige Durchschnittslinie, nämlich die Tangente, sich als der Punkt *H* projicirt. Da man zwar weiß, daß die Kurve *H s t* ein Bogen einer Hyperbel ist, so ließe sich die Tangente in *H* einfach nach dem Gesetze dieser Linien verzeichnen. Davon abgesehen jedoch, daß rein lineare Konstruktionen nicht eigentlich in das Gebiet der darstellenden Geometrie gehören, so läßt sich die Frage im vorliegenden Fall leicht wieder auf die Projektion eines Vorganges im Raume zurückführen, und zwar indem man anstatt der tangirenden Ebenen des Punktes *i* die ihm entsprechende Normalebene der Durchschnittslinie in Betracht zieht. Folgende Vorstellung wolle festgehalten werden: zwei krumme Flächen F' und F'' schneiden sich nach einer Linie *L*; an einem Punkte *P* dieser Linie ist die tangirende Ebene T' der Fläche F' gelegt, sowie die tangirende Ebene T''

Fig. 319.

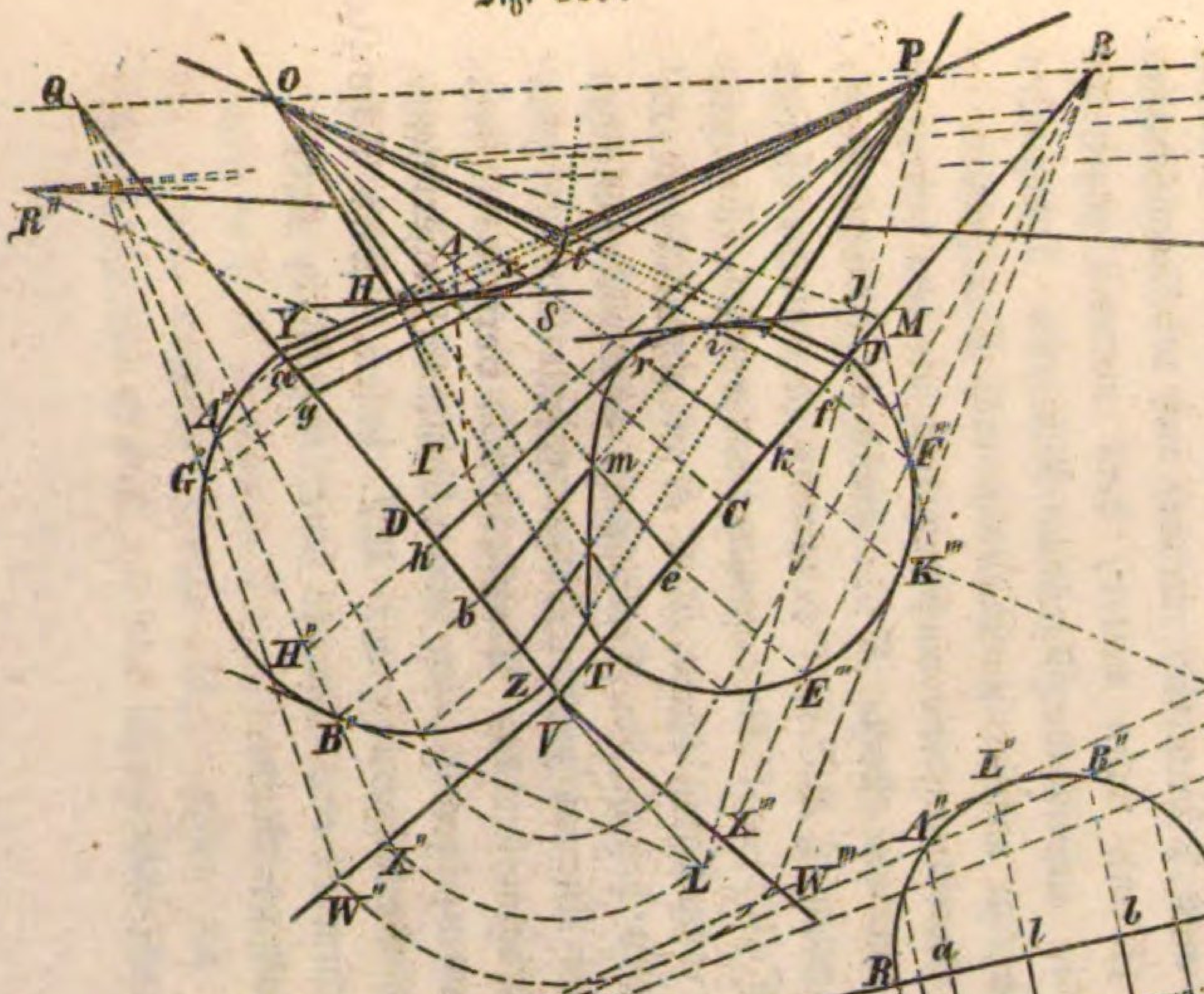
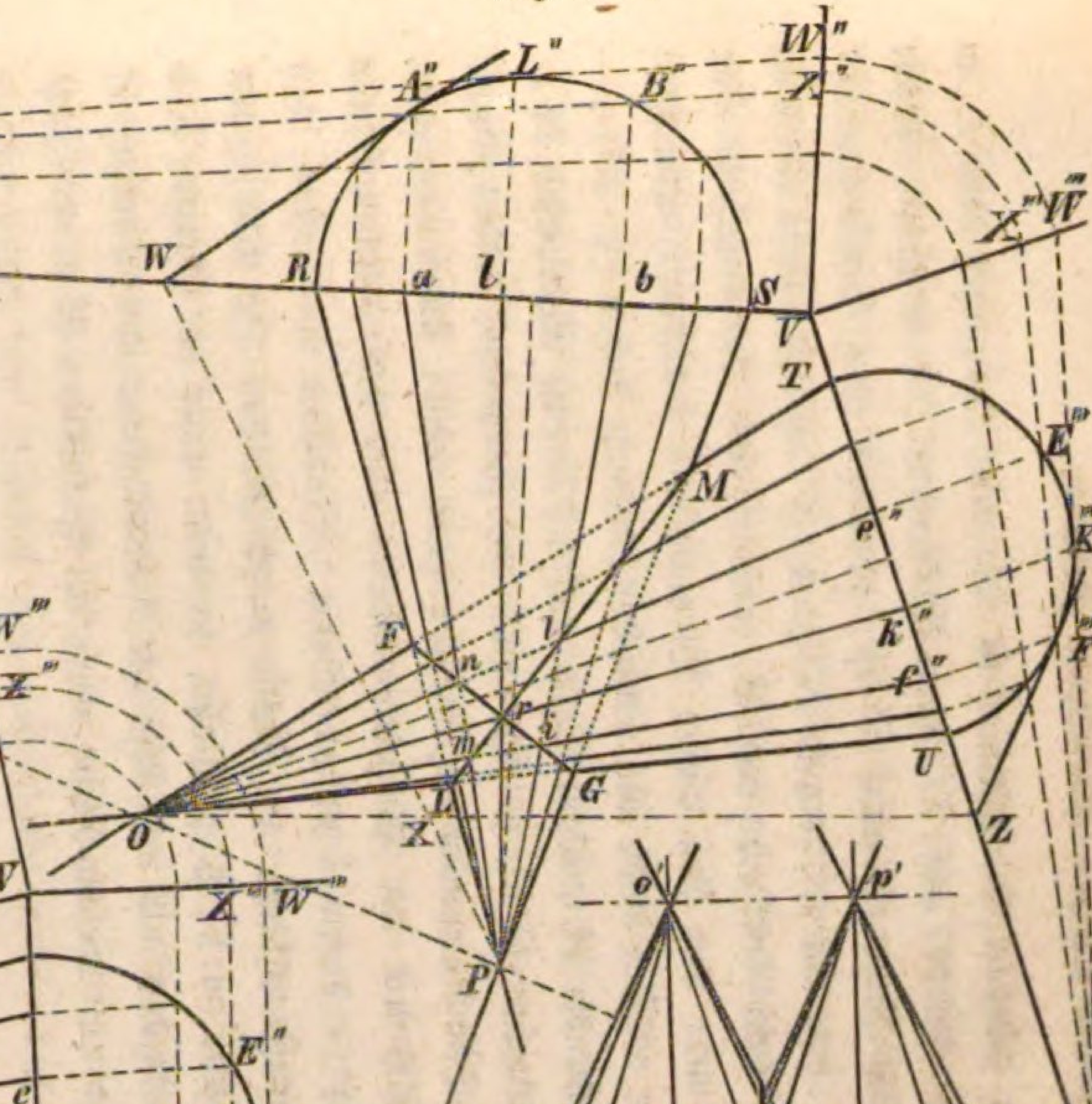


Fig. 320.



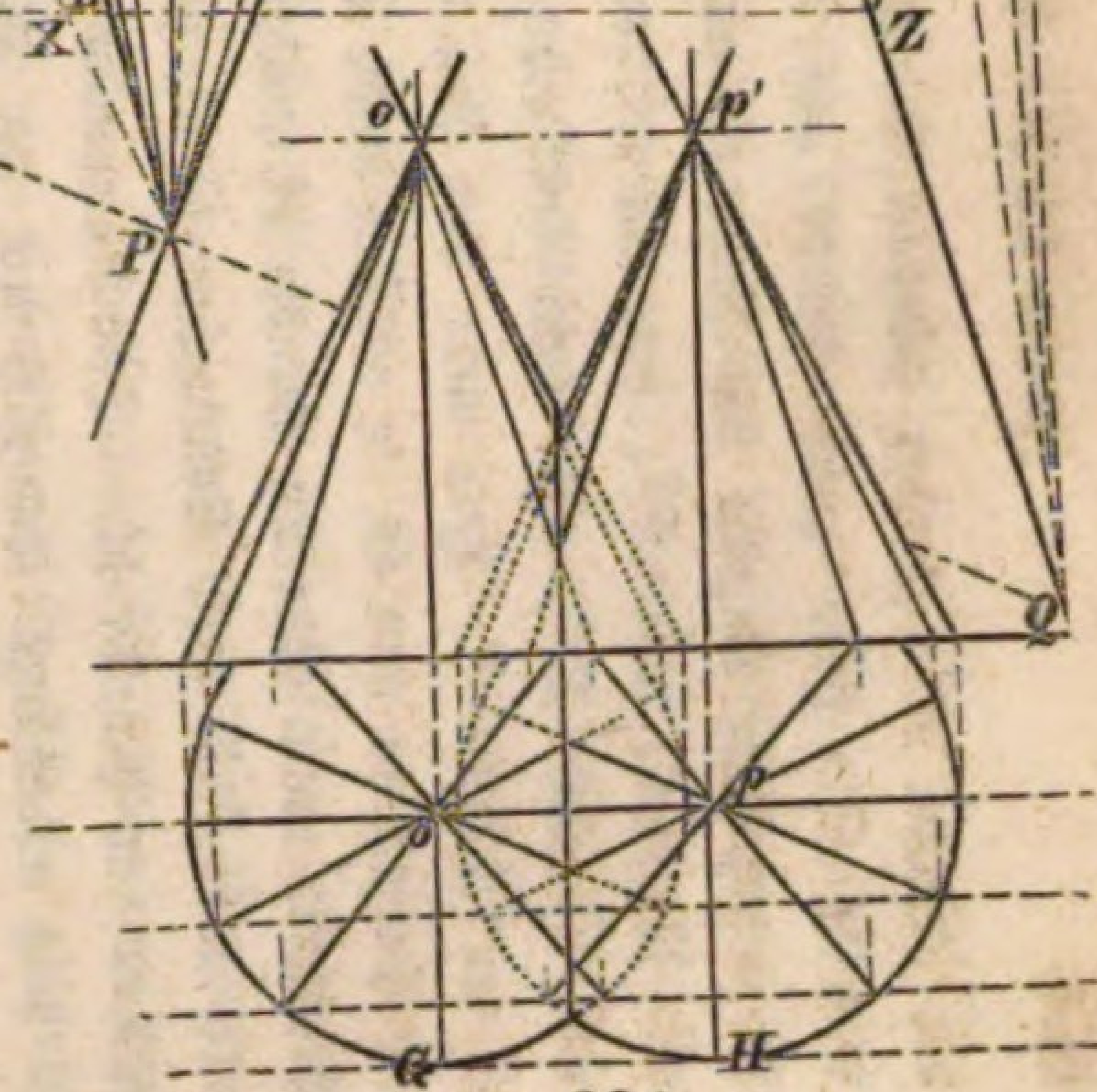


Fig. 321

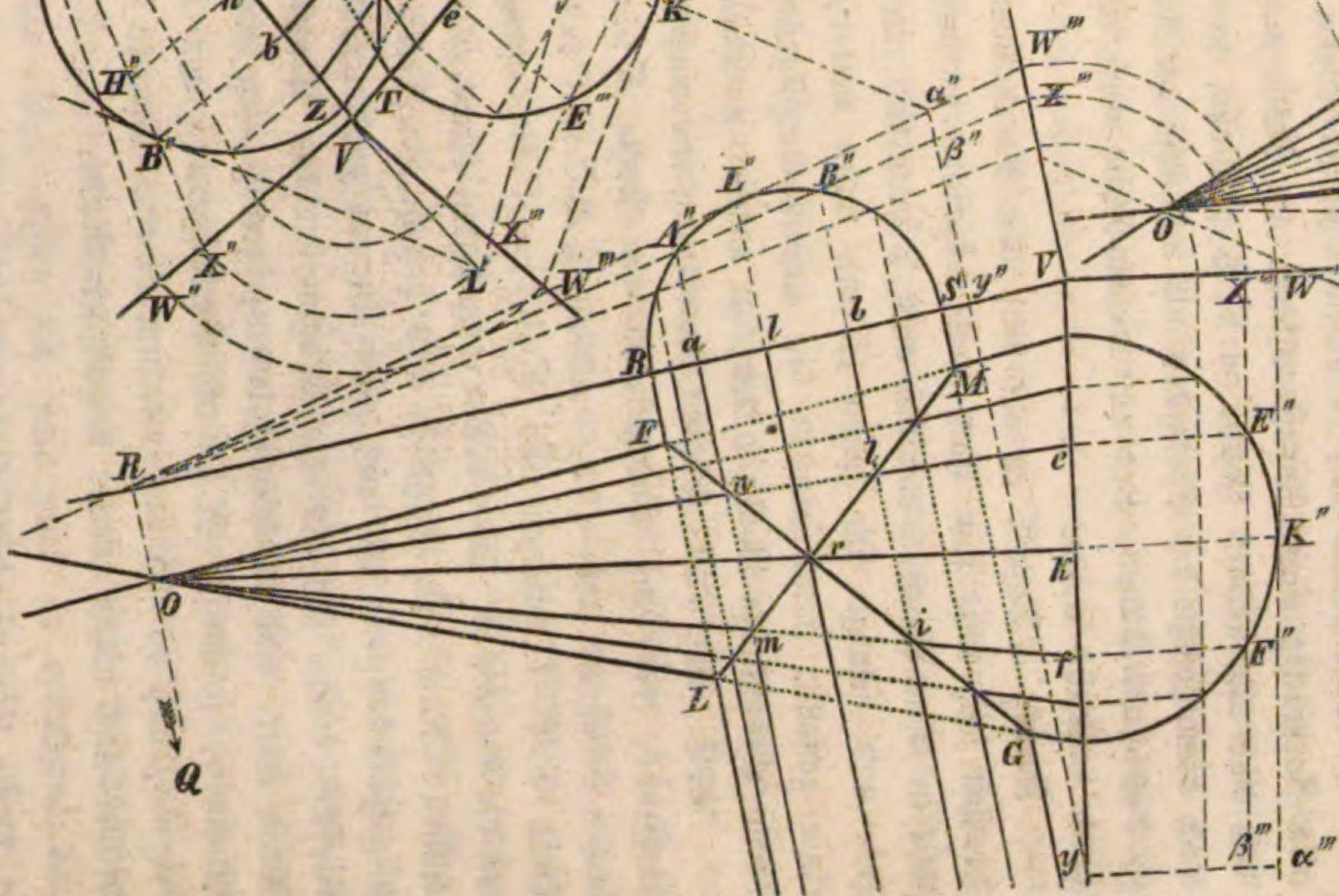


Fig. 326.

der Fläche F''; beider Ebenen Durchschnitt Θ ist die Tangente von L im Punkte P. Hier werde ferner auf T' eine Senkrechte N' errichtet, welche an demselben Punkte die Normale von F' ist, zweitens eine Senkrechte N'' als Normale von F''; eine Ebene, durch N' und N'' gelegt, steht senkrecht auf T' und T'', also auch senkrecht auf Θ, und ist die Normalebene von L im Punkte P. Hat man den Riß dieser Normalebene konstruirt, gleichwie die Projektion von Θ, so müssen beide auf einander senkrecht stehen (§. 30). — Errichtet man nun im Punkte H unserer Figur auf $O\,T$ eine Senkrechte H Δ, und auf $P\,Y$ eine Senkrechte H Γ, so sind dies die Normalen beider Kegelflächen im Punkte H. Die Normalebene, welche durch beide Normalen geht, ist hier allerdings identisch mit der Projektionsebene und hat darum keinen wirklich vorhandenen Riß in dieser letzteren Ebene. Beachtet man aber, daß alle Normalen einer Rotationsfläche die Achse durchschneiden (§. 134), und daß dies auf unserer Figur in Γ, Δ geschieht, so wird man die Gerade $\Gamma\,\Delta$ nach dem Gesetze der Stätigkeit als den Riß der Normalebene des Punktes H zu betrachten haben, und auf diesem Risse muß die Projektion H ρ der Tangente senkrecht stehen.

Zusatz. Daß $\Gamma\,\Delta$ als Riß der Normalebene des Punktes H anzusprechen sei, läßt sich auch nach folgender Auffassung darthun: eine Ebene steht in dem Punkte, der sich nach s projicirt, normal auf der Durchschnittslinie und bewege sich gegen H und dann weiter, stets normal gegen die Linie gestellt; dann werden die aufeinanderfolgenden Risse der beweglichen Ebene eine stätige Reihe bilden, zu welcher nothwendig auch $\Gamma\,\Delta$ gehört.

449. Fig. *320*. Gleiche Anordnung wie vorhin, jedoch mit dem besondern Umstande, daß die Gränzebenen der Reihe $H\ldots$ gleichzeitig beide Kegelflächen berühren, daß also, nachdem $Q\,K'''\,W'''$ tangirend an den umgelegten Kreis $T\,E'''\,U$ gezogen und $V\,W'' = V\,W'''$ genommen worden, ihrerseits nun die Gerade $R''\,W''$*) den umgelegten Kreis $R\,A''\,S$ in einem Punkt L'' berührt. Nach dem Satze §. 429 besteht der Durchschnitt beider Kegelflächen im gegenwärtigen Fall aus zwei Kurven zweiter Ordnung, nämlich aus zwei Ellipsen, welche sich als die Diagonalen des Viereckes $F\,L\,G\,M$ darstellen. Würde man, nach Anleitung des vorigen §., für einen Punkt m die Tangente bestimmen, so müßte X in die Verlängerung von $M\,L$ fallen. Man sieht übrigens, daß es sich hier nur um ebene Schnitte einer Kegelfläche handelt, worüber uns nichts weiter beizufügen bleibt.

---

*) R'' liegt unterhalb Q der Fig. *319*.

Die Fig. *321* behandelt den Fall, in welchem zwei gleiche Kegelflächen sich durchschneiden, deren Achsen unter sich parallel sind, während die Verbindungslinie ($o\,p, o'\,p'$) der zwei Scheitel auf jenen Achsen senkrecht steht. Als Durchschnittslinie dieser Flächen ergiebt sich eine Hyperbel, von welcher unsere Figur nur den unteren Ast zeigt, indem wir die oberen Flächennetze unterdrückten.

Cylinder- und Kegelflächen.

450. In jedem Punkte des Durchschnittes solcher zwei Flächen kreuzt sich eine gerade Ergänzungslinie der einen mit einer geraden Erzeugungslinie der anderen; beide Linien liegen in einer Ebene; weil aber alle durch derartige Linienpaare bestimmten Ebenen sämmtlich den Scheitel der Kegelfläche gemeinsam haben, so müssen sie sich nach der einen geraden Linie schneiden, welche parallel ist mit den Erzeugungslinien der Cylinderfläche und durch den Scheitel der Kegelfläche geht. Sollen daher umgekehrt Punkte der Durchschnittslinie bestimmt werden, so wird auf einfachste Weise verfahren werden, wenn man zuerst jene Parallele zu den Erzeugungslinien der Cylinderfläche bestimmt, welche durch den Scheitel der Kegelfläche geht, und dann schneidende Hilfsebenen $H\ldots$ anordnet, welche sämmtlich durch diese Parallele gehen; denn die Schnitte beider Flächen durch solche Ebenen sind geradlinig und die Kreuzungspunkte der in einer Ebene H liegenden Geraden gehören der Durchschnittslinie an.

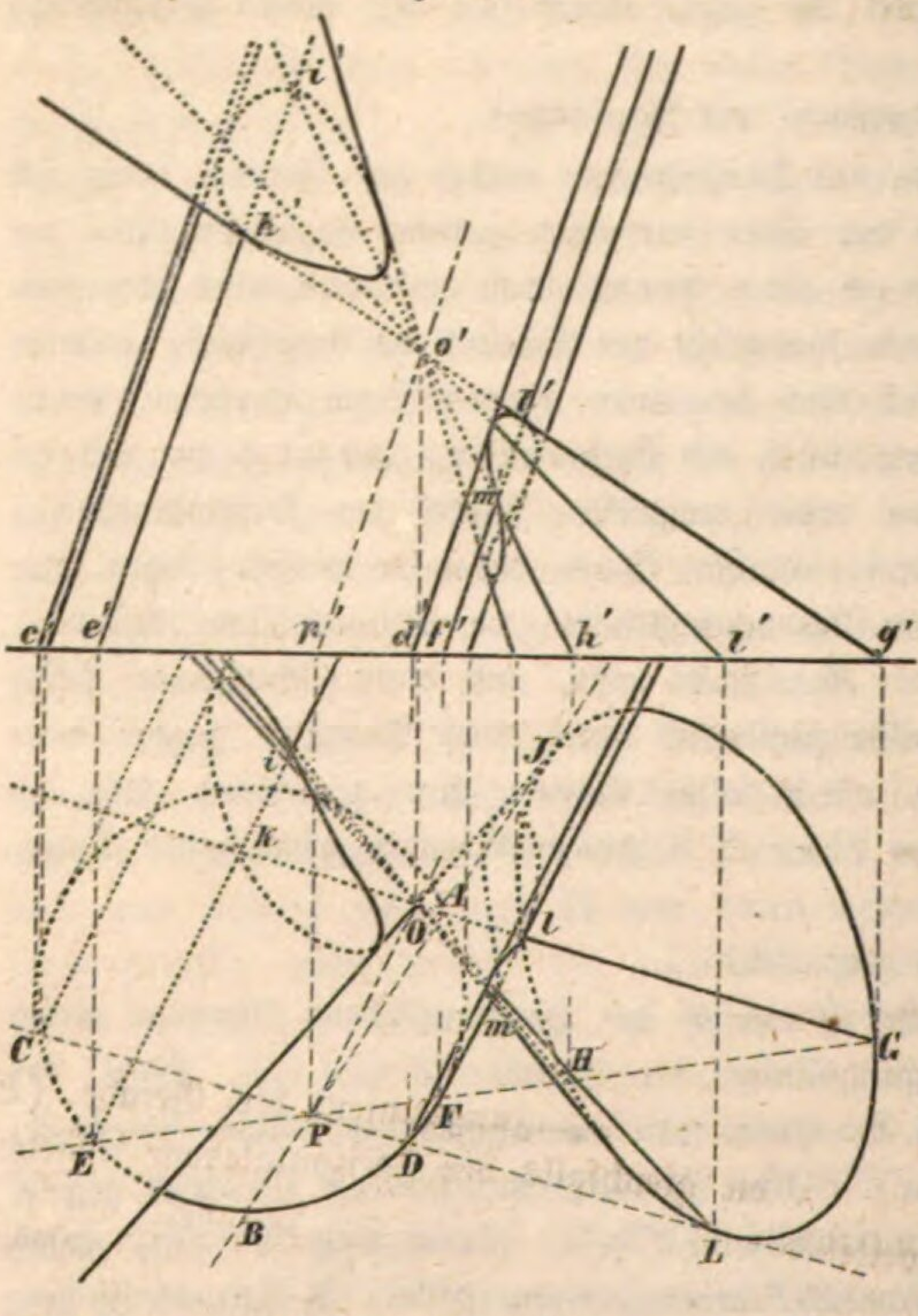
451. **Erstes Beispiel.** Fig. *322*.

Basis der Cylinderfläche ist ein in der Horizontalebene liegender Kreis $A\,B\,C$; eine ihrer Erzeugungslinien die Gerade ($E\,i, e'\,i'$). Basis der Kegelfläche ist die gleichfalls der Horizontalebene angehörige Ellipse $J\,G\,L\,H$, ihr Scheitel der Punkt (o, o'). Eine Parallele mit ($E\,i, e'\,i'$) durch (o, o') gelegt schneidrt die Horizontalebene in (P, p'). Durch diese Parallele gahen alle Hilfsebenen $H\ldots$ und durch P deren Horizontalrisse. $E\,P\,G$ ein solcher; er kreuzt die erste Basis in E, F, die zweite Basis in H, G. Die Ebene H, zu welcher dieser Riß $E\,G$ gehört, schneidet also die Cylinderfläche nach zwei Erzeugungslinien, welche durch die Punkte (E, e'), (F, f') gehen; sie schneidet die Kegelfläche nach den zwei Erzeugungslinien, welche durch (G, g'), (H, h') gehen und das Doppelpaar von Geraden kreuzt sich in den vier Punkten (i, i'), (k, k'), (l, l'), (m, m') des Durchschnittes beider Flächen. Weitere durch ($o\,P, o'\,p'$) gelegte Hilfsebenen liefern weitere Punkte dieses Durchschnittes.

Als äußerste Ebenen $H\ldots$ geben sich jene zwei zu erkennen, deren Horizontalrisse $C\,P\,L$, $B\,P\,J$ Tangenten sind der Basis $J\,G\,H$. Eine jede

von ihnen berührt die Kegelfläche nach einer Geraden und schneidet die Cylinderfläche nach zwei dergleichen Geraden, welche letztere als Tangenten der Durchschnittslinie auftreten. Diese selbst hat zwei geschlossene Aeste, weil ein völliges gegenseitiges Durchdringen beider Flächen stattfindet. Durch die Risse JB, LC der angränzenden Hilfsebenen werden auf der Cylinderbasis zwei Bogen AD, CB abgeschnitten und von den cylindrischen Erzeugungslinien durchdringen jene, welche dem Bogen AD entsprechen, das untere Netz der Kegelfläche, während diejenigen, welche von Punkten des Bogens CB ausgehen, mit dem oberen Kegelnetze zusammentreffen. Von den übrigen Erzeugungslinien der Cylinderfläche hat keine mehr einen Punkt mit der Kegelfläche gemein.

Fig. 322.

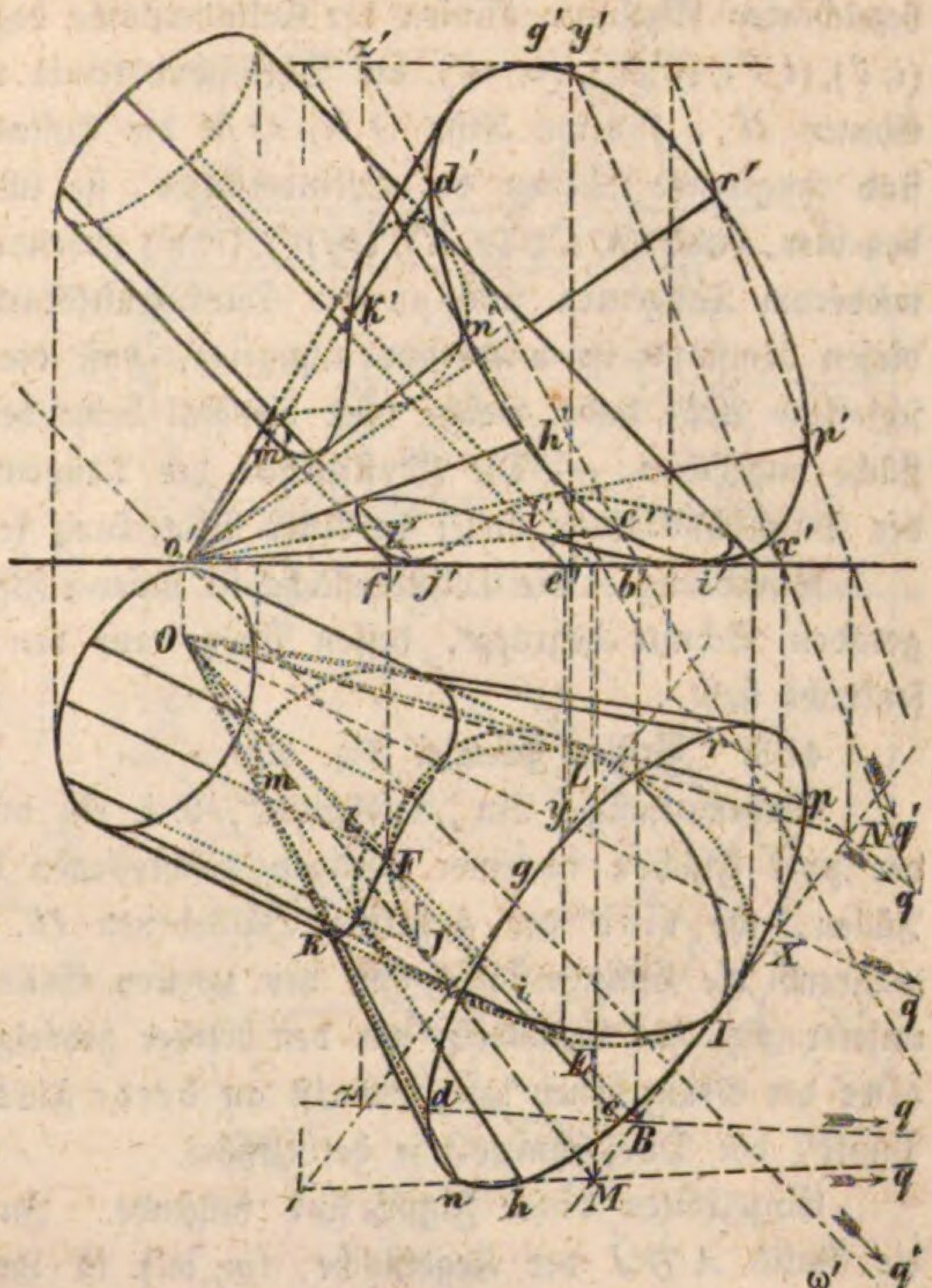


Sollte an irgend einem Punkte (i, i') z. B. die Tangente der Durchschnittskurve konstruirt werden, so würde man sich folgendermaßen zu benehmen haben: die cylindrische Erzeugungslinie des Punktes (i, i') trifft ihre zugehörige Basis in E, wo die Kreistangente zu verzeichnen bleibt; die konische Erzeugungslinie trifft ihre zugehörige Basis in H, wo die Ellipstangente zu verzeichnen ist. Beide Tangenten kreuzen sich in einem Punkte, welcher X heißen soll und welchen man auf die Grundlinie nach x zu projiciren hat. $(i\,X, i'\,x')$ ist die verlangte Tangente, weil die Durchschnittslinie der zwei Ebenen, welche durch (i, i') berührend an die Cylinder- und Kegelfläche gelegt worden.

452. Zweites Beispiel. Fig. 323.

Basis der Cylinderfläche ist eine in der Horizontalebene liegende Ellipse EFL; $(Ek, e'k')$ eine ihrer geraden Erzeugungslinien. Die Basis der Kegelfläche ist ein in schiefer Ebene liegender Kreis $(Igr, i'g'r')$, welcher in (I, i') den Horizontalriß NM dieser Ebene berührt. Eine zu MN parallele Tangente $(gy, g'y')$ dient, die Kreisebene der graphischen Konstruktion zugängiger zu machen. (Zur Zeichnung des Kreises nahm man eine Seitenprojektion zu Hilfe, deren Ebene auf NM senkrecht stand.) Der Scheitel (O, o') liegt gleichfalls in der Horizontalebene, so daß diese und die Kegelfläche sich nach der Geraden OI berühren. $(OXq, o'\omega'q')$ ist die Parallele zu den Erzeugungslinien der Cylinderfläche, welche durch den Scheitel (O, o') geht; sie schneidet die Basisebene der Kegelfläche in einem (unzugängigen) Punkte (q, q'), der sich folgenderweise gewinnen läßt: die projicirende Ebene OX und die Kreisebene schneiden sich nach einer Geraden, von welcher $y'x'$ die Vertikalprojektion; diese Projektion

Fig. 323.



und $o'\omega'$ treffen in q' zusammen (der Leser wolle den Punkt nachtragen) und q' bleibt auf die Gerade OX nach q zu projiciren. — Wir bezeichnen die Parallele $(OX, o'\omega')$ der Kürze wegen mit II und ihren Punkt (q, q') mit Q. Die Horizontalrisse aller durch II gelegten Hilfsebenen H... gehen durch O und ihre Schnitte in der Kreisebene kreuzen sich in Q. OB sei der Riß einer der Ebenen H; er kreuzt die cylindrische Basis in F, E, und die Ebene selbst

schneidet die Cylinderfläche nach den zwei durch diese Punkte gehenden Erzeugungslinien. Man zieht sofort $q\,B\,z$ und denkt sich durch diese Gerade die projicirende Ebene gelegt, welche die Kreisebene nach einer Geraden schneidet, deren verlängerte Vertikalprojektion $z'\,b'$ durch q' gehen wird. $(q\,B\,z, q'\,b'\,z')$ ist somit der Schnitt von H und der Kreisebene und kreuzt die Kegelbasis in zwei Punkten (c, c'), (d, d'). H schneidet also die Kegelfläche nach den zwei durch letztere Punkte gehenden Erzeugungslinien. Diese und die vorhin bezeichneten Erzeugungslinien der Cylinderfläche begegnen sich in vier Punkten (i, i'), (l, l'), (k, k'), (m, m') der Durchschnittslinie u. s. w. — Die äußersten Ebenen $H\ldots$, deren Risse $O\,N$, $O\,M$ die Cylinderbasis in J, L berühren, sind tangirende Ebenen der Cylinderfläche, sie schneiden die Kegelfläche nach den vier, durch (h, h'), (n, n'), (p, p'), (r, r') gehenden Erzeugungslinien, welche wiederum Tangenten sind an die Durchschnittskurve beider Flächen. Durch diesen Umstand ist wiederum angezeigt, daß die fragliche Kurve zwei geschlossene Aeste habe, welche aber diesmal beide dem e i n e n Netze der Kegelfläche angehören. — Die Konstruktion der Tangente an irgend einem Punkte der Durchschnittslinie bietet zu einer Bemerkung keinen Anlaß.

Bemerkung. Die Cylinderfläche in unserer Figur ward oben durch einen geraden Schnitt begränzt, dessen Ebene auf den geraden Erzeugungslinien senkrecht steht.

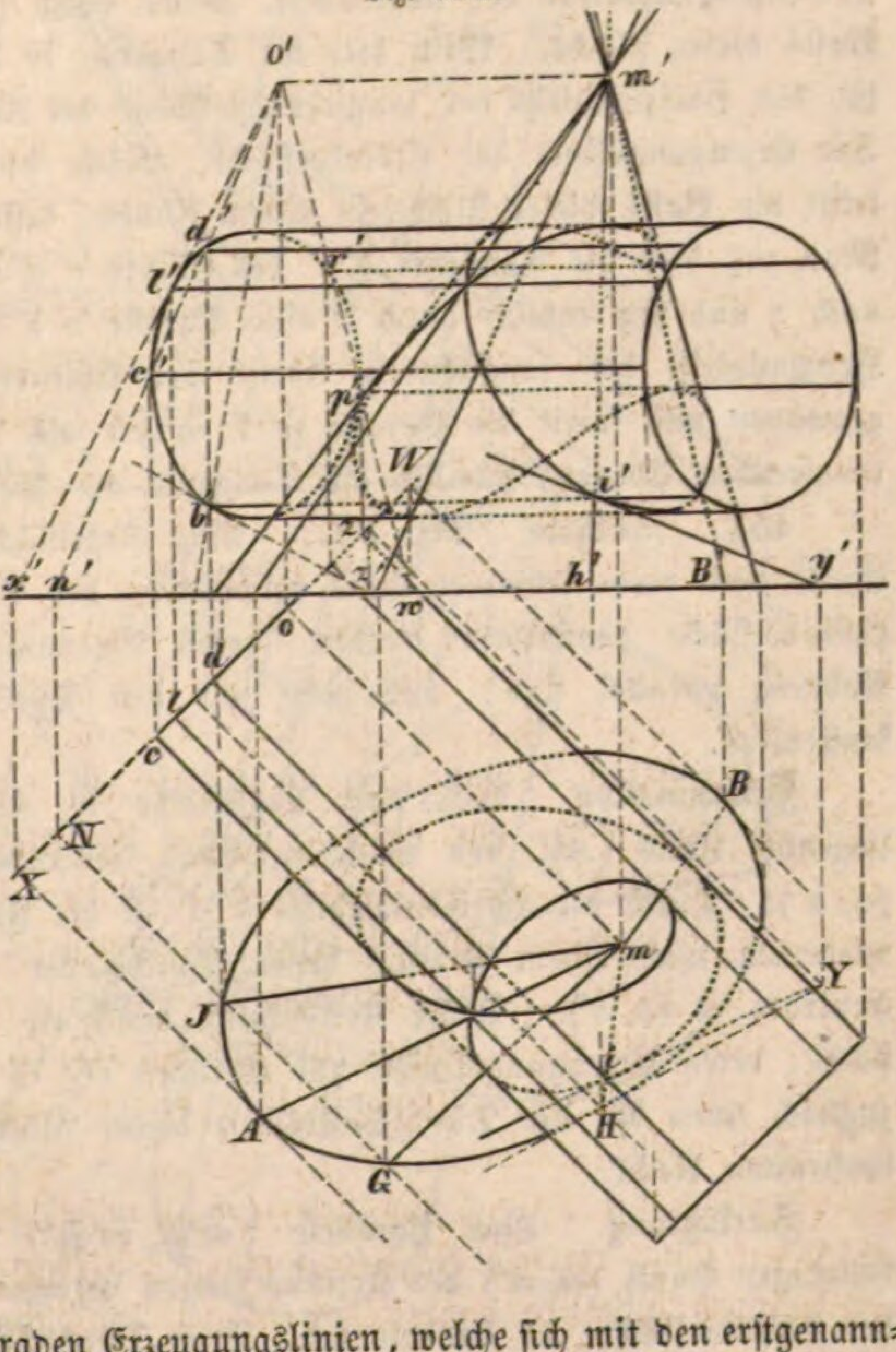
453. **Drittes Beispiel** *Fig. 324.*

Vorbemerkung. Ein „Ausschnitt", d. i. ein nur theilweises Durchdringen der zwei Flächen in einer einzigen geschlossenen Linie findet statt in allen Fällen, wo e i n e der äußersten Hilfsebenen $H\ldots$ die Kegelfläche berührt, während die Cylinderfläche von der zweiten Gränzebene berührt wird. In unserer *Fig. 324* behandeln wir den hierher gehörigen Sonderfall, in welchem e i n e der Gränzebenen tangirend ist an b e i d e Flächen, was einen „doppelten Punkt" der Durchschnittslinie herbeiführt.

Einzelheiten dieser Figur sind folgende. In der Horizontalebene liegt die Basis $A\,B\,J$ der Kegelfläche, (m, m') ist ihr Scheitel. Die Cylinderfläche ist gerade, kreisrund; ihre Basis liegt in der Vertikalebene $W\,X$, und ihre geraden Erzeugungslinien sind deshalb horizontal, sowie ihre Horizontalprojektionen senkrecht auf $W\,X$ stehen. — Durch den Scheitel geht eine Parallele $(m\,o, m'\,o')$ mit den Erzeugungslinien der Cylinderfläche, welche in (o, o') deren Basisebene schneidet. Man zog $A\,X$ parallel zu $m\,o$ und in A tangirend an die Kegelbasis, und betrachtete dies $A\,X$ als den Horizontalriß einer durch $(o\,m, o'\,m')$ gelegten tangirenden Ebene der Kegelfläche. Indem

X nach x' projicirt und $o'\,x'$ gezogen wurde, war dies letztere die Vertikalprojektion des Schnittes der tangirenden Ebene und der Vertikalebene $W\,X$. $o'\,x'$ mußte Tangente sein an die Ellipse $c'\,d'\,p'$ und dieselbe in einem Punkte l' berühren. Dies ist die Grundbedingung, denn die Gränzebene, deren Riß $A\,X$, sollte auch die Cylinderfläche tangiren, was in unserer Figur nach der durch (l', l) gehenden geraden Erzeugungslinie dieser Fläche geschieht. Die Berührungslinien kreuzen sich in dem doppelten Punkte ihrer gegenseitigen Durchschnittslinie. Bei allen durch $(o\,m, o'\,m')$ gehenden Hilfsebenen, welche beide Flächen schneiden sollen, sind die Horizontalrisse zu $m\,o$ oder $A\,X$ parallel. $G\,N$ ist der Riß einer derartigen Ebene; sie schneidet die Kegelfläche nach zwei durch G und J gehenden geraden Erzeugungslinien, macht in der Vertikalebene $W\,X$ einen Schnitt, dessen Vertikalprojektion die Gerade $n'\,o'$, und schneidet die Cylinderfläche nach den zwei durch die Punkte

Fig. 324.



(c', c), (d', d) gehenden geraden Erzeugungslinien, welche sich mit den erstgenannten Linien der Kegelfläche in vier Punkten der Durchschnittslinie kreuzen, wie das Nähere aus der Figur deutlich zu entnehmen sein wird. Als zweite äußerste Hilfsebene ergab sich diejenige, deren Horizontalriß $B\,W$ die Kegelbasis in B berührt. Diese tangirende Gränzebene macht in der Basisebene $W\,X$ einen Schnitt, von welchem $w'\,o'$ die Vertikalprojektion, welche die Kurve

$d' c' b'$ in p', r' kreuzt. Hierdurch sind zwei Punkte der Cylinderbasis angezeigt, und die Erzeugungslinien der Cylinderfläche, welche durch diese Punkte gehen, bilden den Schnitt dieser Fläche mit der zweiten Gränzebene. Sie berühren die Durchschnittskurve der zwei Flächen in ihren Kreuzungspunkten mit der Berührungslinie $(o\,B\,o'\,B')$. — (i, i') sei irgend ein Punkt der Durchschnittskurve, an welchem die Tangente derselben bestimmt werden soll. Die Erzeugungslinie der Kegelfläche, welche durch $(i\,i')$ geht, kreuzt in H die Basis dieser Fläche. Wird hier die Tangente $H\,Y$ gezogen, so hat man in ihr den Horizontalriß der tangirenden Ebene der Kegelfläche im Punkte (i, i'). Die Erzeugungslinie der Cylinderfläche, welche durch denselben Punkt geht, trifft die Basis dieser Fläche in einem Punkte, dessen Vertikalprojektion b' ist. Man zog hier die Tangente $b'\,z'$ der Ellipse $r'\,d'\,c'$, projicirte z' auf $W\,X$ nach z und zog endlich durch z eine Paralle $z\,Y$ zu $o\,m$. Damit war der Horizontalriß der tangirenden Ebene der Cylinderfläche am Punkte (i, i') gewonnen und somit die Gerade $(t\,Y, w'\,y')$ als Durchschnittslinie der zwei tangirenden Ebenen, nämlich als Tangente am Punkte (i, i').

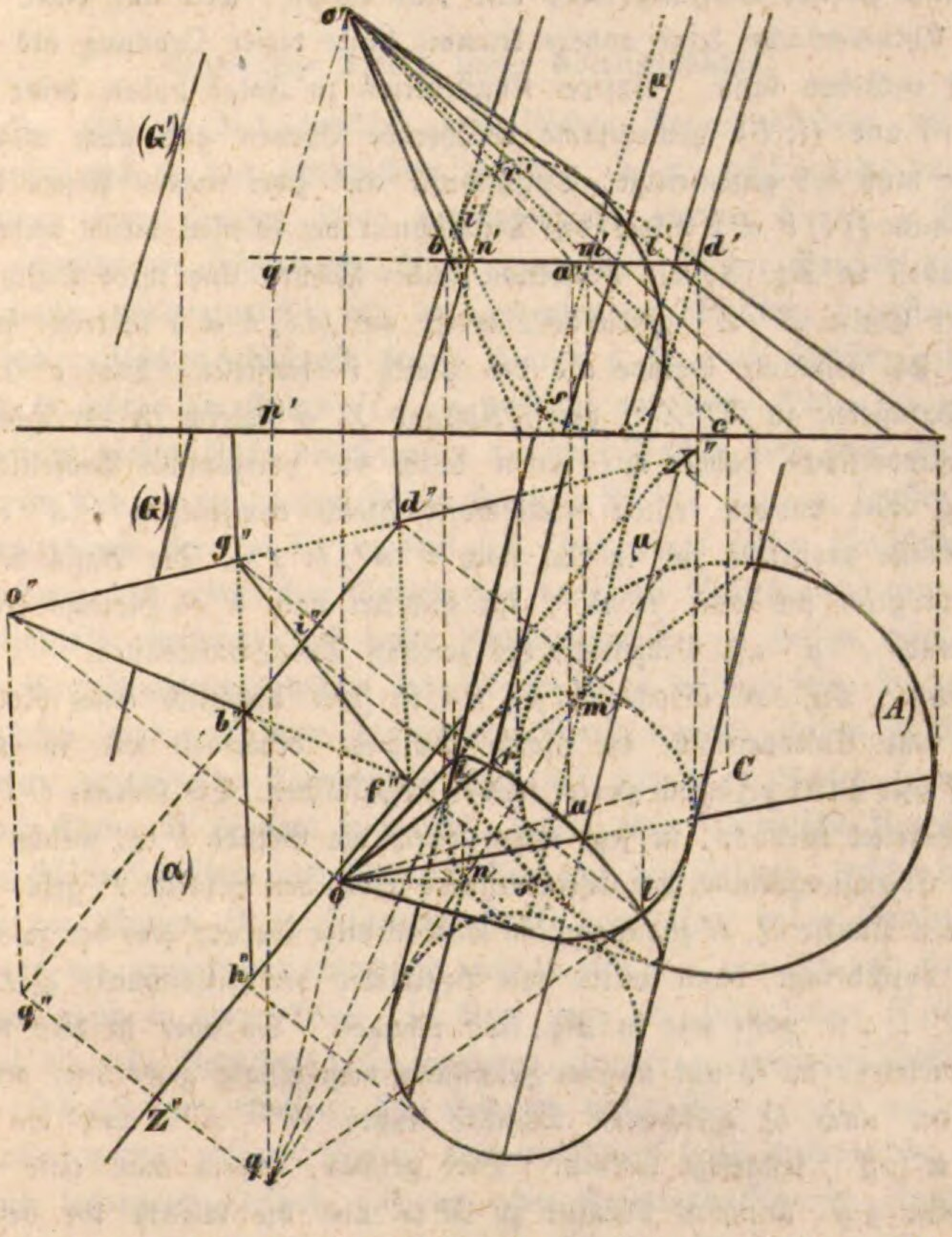
454. **Aufgabe.** Fig. *325.* Eine Kegelfläche ist durch irgend eine Ebene nach einer krummen Linie geschnitten; der Schnitt soll als Basis einer Cylinderfläche genommen werden, deren Erzeugungslinien einer gegebenen Richtung parallel sind, und man soll den Durchschnitt der zwei Flächen konstruiren.

Determination. Basis der Kegelfläche ist ein in der Horizontalebene liegender Kreis (A), von welchem C das Centrum, ihr Scheitel der Punkt (o, o'). Durch die Horizontalebene $b'\,d'$ ist die Fläche geschnitten und zwar wiederum nach einem Kreise, dessen Durchmesser gleich $b'\,d'$, und dessen Centrum in (a, a'). Dieser Kreisschnitt dient als die Basis einer Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien zur Geraden (G, G') parallel sind; er bildet zugleich einen Ast der Durchschnittslinie beider Flächen, deren zweiter Ast zu konstruiren bleibt.

Ausführung. Eine Parallele $(m\,\mu, m'\,\mu')$ zu (G, G') durch einen beliebigen Punkt (m, m') des Kreisumfanges gezogen, ist eine Erzeugungslinie der Cylinderfläche; es handelt sich, ihren Durchschnittspunkt (s, s') mit der Kegelfläche zu bestimmen, welcher Punkt der verlangten Linie angehört. Zu dem Ende wird man sich benehmen entsprechend wie in den Figuren *322* und *323.* Durch den Scheitel (o, o') wird man eine Parallele zu (G, G') führen und ihren Schnitt (q, q') mit der Ebene $d'\,b'$ bestimmen. Eine Ebene H, durch die Parallelen $(m\,\mu, m'\,\mu')$ und $(o\,q, o'\,q')$ gedacht, schneidet

die Ebene $d'b'$ (welche für den Augenblick als Projektionsebene betrachtet werden wolle) nach der Geraden mq, welche den Kreis noch einmal in n kreuzt. Daraus giebt sich zu erkennen, daß H die Cylinderfläche sowie die Kegelfläche jede nach zwei durch (m, m') und (n, n') gehenden geraden Erzeugungslinien schneidet, welche vier Gerade sich außer in den genannten

Fig. 325.



beiden Punkten noch in (r, r') und (s, s') durchdringen. Andere Ebenen H geben jedesmal weitere Punkte der zu bestimmenden Durchschnittslinie. — Aeußerste Ebenen der Reihe H... sind jene beiden, deren Schnitte qi, ql den gegebenen Kreis berühren; diese Ebenen tangiren in (i, i'), (l, l') zu

gleicher Zeit sowol die Cylinder- wie die Kegelfläche und hier kreuzen sich die zwei Aeste des Durchschnittes der beiden Flächen.

455. **Fortsetzung.** Den Kreis ($m\,i\,n$, $b'\,d'$) kann man als die gemeinsame Basis unserer zwei Flächen betrachten, diese gehören also zur zweiten Ordnung und der Kreis bildet einen Ast ihres Durchschnittes. Aus solchem Grunde muß, nach §. 429, der andere Ast dieses Durchschnittes wiederum eine Linie zweiter Ordnung sein, also eine Ellipse, weil auf einer kreisförmigen Cylinderfläche keine andere krumme Linie dieser Ordnung als schräger Schnitt entstehen kann. Unserer Konstruktion zu Folge haben beide Flächen in (i, i') und (l, l') gemeinsame berührende Ebenen und auch aus diesem Grunde muß ihr gegenseitiger Durchschnitt aus zwei ebenen Aesten bestehen. Die Gerade ($i\,l$, $b'\,d'$) bildet den Durchschnitt der Ebenen dieser beiden Aeste. Wir haben in Fig. (α) die Projektion beider Flächen und ihres Durchschnittes in einer Ebene $X''\,Z''$ gezeichnet, welche auf ($i\,l$, $b'\,d'$) senkrecht steht und worauf sich genannte Gerade als der Punkt i'' darstellt. Dies i'' liegt auf einer Parallelen zu $X''\,Z''$, deren Abstand $Z''\,q''$ gleich ist der Höhe $p'\,q'$. Die Cylinderfläche haben wir unten durch die horizontale Projektionsebene begränzt und dadurch einen Kreisschnitt gleich demjenigen $b'\,d'$ erhalten; beide Kreise projiciren sich in (α) nach $b''\,d''$, $h''\,f''$. Die Basis der Kegelfläche projicirt sich nach $f''\,X''$, ihr Scheitel nach o''. Hieraus ergab sich die Gerade $f''\,g''$ als Projektion des zweiten Durchschnittsastes.

456. Fig. *326* (Seite 557). Es ist hier bezüglich einer Rotations-, Kegel- und Cylinderfläche die gleiche Aufgabe behandelt wie in Fig. *320* (§. 447 und 449) bezüglich zweier solcher Kegelflächen. Die Gerade $O\,P$, welche beide Scheitel verband, ist jetzt ersetzt durch die Gerade $P\,Q$, welche parallel zu den Erzeugungslinien der Cylinderfläche durch den Scheitel P geht. Wären die beiden Punkte Q, R zugängig, in welchen diese Gerade jede der zwei Basisebenen durchdringt, dann würde das Bestimmen der Hilfsschnitte $Q\,L''\,W'''$, $W''\,K''$ ... rc. ganz wie in Fig. *320* erfolgen. So aber ist dies nicht der Fall, vielmehr da Q auf unserer Zeichnung unzugängig geworden, mußte für jeden der nach Q gerichteten Schnitte außer W''', X''' noch ein zweiter Punkt α''', β''', festgesetzt werden. Dies geschah, indem man eine vertikale Hilfsebene $y\,y''$ annahm parallel zu $M\,G$ und die mittelst ihr bestimmten Höhen $y''\,\alpha''$, $y''\,\beta''$ ... von y aus nach $y\,\alpha'''$, $y\,\beta'''$ abtrug. Alles Uebrige sieht man in Fig. *320* und *326* mit gleichen Buchstaben bezeichnet.

Im Uebrigen konnte Fig. *326* auch gelten als der graphische Ausdruck von Aufgabe 454, wenn sie also lautete: „Es ist eine Rotations-Kegel-

oder eine solche Cylinderfläche gegeben, deren Achse in einer Projektionsebene liegt, und ein Schnitt FG oder LM derselben, dessen Ebene auf der Projektionsebene senkrecht steht. Dieser Schnitt ist zu nehmen als Basis einer Cylinder- oder Kegelfläche, deren Achse wiederum in der Projektionsebene enthalten ist. Man soll die Projektion LM oder FG des zweiten Astes der Durchschnittslinie beider Flächen konstruiren. — Auch auf Fig. *320* würde sich eine entsprechende Formulirung der Aufgabe anwenden lassen.

Gegenseitige Schnitte zweier Rotationsflächen.

457. Es ist hier zunächst von solchen Rotationsflächen die Rede, welche nicht auch zu den scheitrechten gehören, d. h. welche nicht durch die Umdrehung einer geraden Linie hervorgebracht werden können. Welches System schneidender Hilfsebenen $H\ldots$ man unter solcher Voraussetzung zu wählen habe, wird zunächst von der gegenseitigen Stellung der Rotationsachsen beider Flächen abhängig sein. Wären z. B. diese Achsen unter sich parallel, so würde die Ebene $H,\ldots$ senkrecht auf beide Achsen anzuordnen sein, weil in diesem Falle die Schnitte der zwei Flächen und jeder Hilfsebene zwei Kreise sind, deren gegenseitiges Kreuzen Punkte der zu konstruirenden Durchschnittslinie liefert. Es begreift sich, daß unter diesen Umständen zur Vereinfachung der graphischen Arbeit eine der zwei Projektionsebenen, z. B. die horizontale, senkrecht auf beide Rotationsachsen zu stellen wäre. Als vertikale Projektionsebene würde jene Ebene M zu wählen sein, welche durch beide Achsen geht, also eine gemeinsame Meridianebene beider Flächen ist, weil deren gegenseitige Durchschnittslinie bei parallelen Achsen symmetrisch gegen die Ebene M gebildet sein muß, indem diese sämmtliche Parallelkreise der zwei Flächen halbirt und senkrecht steht auf den Sehnen, welche die zwei in einer der Ebenen $H\ldots$ liegenden Kreise gemeinsam haben können.

Sind die zwei Rotationsachsen nicht zu einander parallel und liegen sie überhaupt nicht in einer Ebene, so kann man die Hilfsebenen $H\ldots$ senkrecht auf die erste Rotationsachse anordnen, in der zugehörigen Fläche kreisförmige Schnitte zu erhalten; die Schnitte dieser Ebenen und der zweiten Fläche aber werden anderer Natur, und punktweise festzusetzen sein.

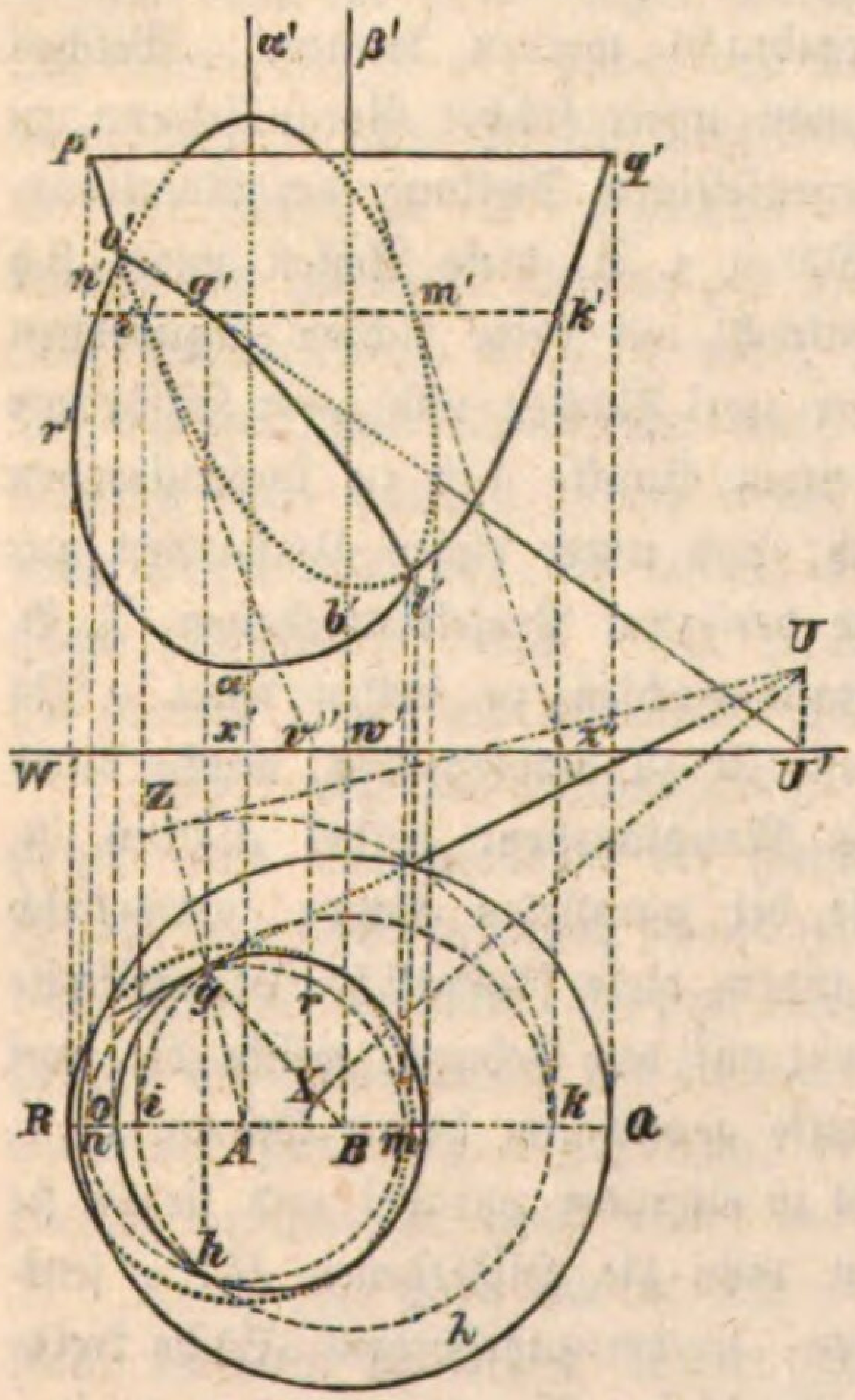
Des besonderen Falles, daß die zwei Rotationsachsen in einer Ebene liegen, ohne parallel zu sein, werden wir alsbald gedenken.

Wie bei zwei krummen Flächen überhaupt, wird auch bei zwei Rotationsflächen ihr gemeinsamer Durchschnitt im Allgemeinen eine krumme Linie bilden, deren Theile nicht in einer Ebene liegen. Es kann ein völliges

Durchdringen der einen Fläche durch die andere stattfinden oder nur ein gegenseitiges Einschneiden von beiden. Im einen wie im andern Falle kann die Durchschnittslinie aus einem oder aus mehreren Aesten bestehen und diese Aeste können geschlossen oder offen sein. Erörterungen hierüber bleiben den einzelnen Fällen vorbehalten.

458. **Erstes Beispiel.** Parallele Rotationsachsen Fig. 327 ($A, a'\,\alpha'$) die erste, ($B, b'\,\beta'$) die zweite Rotationsachse, beide vertikal stehend. $R \cdot A\,B\,Q$ eine durch die Achsen gehende Meridianebene; sie sollte, wie vorhin gesagt, auch als vertikale Projektionsebene dienen; doch haben wir letztere nach $W\,U$ parallel zu $R\,Q$ gestellt, unsere beiden Projektionen der Deutlichkeit wegen mehr auseinander zu halten. $m'\,a'\,n'$ Hauptmeridian der ersten, $p'\,b'\,q'$ Hauptmeridian der zweiten Fläche. Beide Meridiane kreuzen sich in o' und l', welche Punkte auf $R\,Q$ nach o, l herabzuprojiciren sind (l konnte nicht mehr bezeichnet werden). (o, o') und (l, l') gehören dem Durchschnitte beider Flächen an, welche an diesen Orten die Ebene $R\,Q$ rechtwinklig durchdringt. — Zwischenpunkte dieses Durchschnittes zu erhalten, wenden wir horizontale Hilfsebenen an; eine derselben, $n'\,k'$, schneidet die erste Fläche nach einem Kreise, dessen Durchmesser gleich ist der Sehne $n'\,m'$ und der sich in die Horizontalebene nach $n\,r\,m$ projicirt. $n'\,k'$ schneidet die zweite Fläche nach einem Kreise vom Durchmesser $i'\,k'$, dessen Horizontalprojektion $i\,\lambda\,k$ ist. Beide Kreise kreuzen sich in zwei Punkten (g, g'), (h, g'), welche g' als gemeinsame Vertikalprojektion haben. Andere Ebenen wie $n'\,k'$ liefern weitere Punkte des Durchschnittes beider Rotationsflächen, welcher in vorliegendem Fall aus einer einzigen geschlossenen Linie besteht, deren Vertikalprojektion $l'\,g'\,o'$ jedoch als Bogen einer offenen Linie auftritt.

Fig. 327.



Die Tangente ($U\,g$, $U'\,g'$) an einem Punkte (g, g') der Durchschnitts-

linien liegt in den beiden Ebenen, welche in (g, g') tangirend an je eine der zwei Rotationsflächen gelegt werden können. Diese Ebenen zu bestimmen, legte man durch (g, g') eine Meridianebene $A\,g\,Z$ der ersten und eine Meridianebene $B\,X\,g$ der zweiten Fläche. In der ersten Meridianebene dachte man sich die Meridiantangente des Punktes (g, g') und bestimmte den Fußpunkt Z dieser Tangente, dann war die auf $A\,g$ senkrecht stehende Gerade $Z\,U$ Horizontalriß der ersten tangirenden Ebene. Desgleichen dachte man sich in der Meridianebene $B\,g$ die Meridiantangente der zweiten Rotationsfläche am Punkte (g, g'); man bestimmte ihren Kreuzungspunkt X mit der Horizontalebene, und $X\,U$ senkrecht auf $B.g$ war der Horizontalriß der zweiten tangirenden Ebene. Mit U, dem Kreuzungspunkte beider Risse, war die Tangente bestimmt. Es blieben somit Z und X festzusetzen. Durch Drehung der Meridianebene $A\,g$ in die Ebene $A\,R$ fiel der Berührungspunkt (g, g') nach (m, m') und die Meridiantangente nach $m'\,z''$. Der Abstand $x'\,z''$ war nach $A\,Z$ zu tragen. Durch Drehung der Meridianebene $B\,g$ in die Ebene $A\,R$ fiel (g, g') nach (i, i') und die Meridiantangente nach $i'\,v''$. Der Abstand $B\,X$ mußte gleich genommen werden der Entfernung $w'\,v''$ ꝛc.

459. **Zweites Beispiel.** — Rotationsachsen, welche zusammen nicht in einer Ebene liegen. Fig. *328.*

$(A, A'\,B')$, die Achse der ersten Fläche, steht senkrecht auf der Horizontalebene, $A'\,C'\,B'\,D'$ ist der Hauptmeridian dieser Fläche, $(I\,K, E'\,F')$ die Achse der zweiten Fläche; sie steht schräg gegen die Horizontalebene, aber ihre Horizontalprojektion $I\,K$ ist parallel zur Grundlinie $X\,Z$, und eine solche Anordnung der Projektionsebenen kann, wie Eingangs gesagt, in vorliegendem Fall stets herbeigeführt werden; $F'\,H'\,E'\,G'$ der in der Vertikalebene $I\,K$ liegende Hauptmeridian der zweiten Fläche. Eine beliebige Horizontalebene $m'\,p'$ schneidet die erste Fläche nach einem ihrer Parallelkreise vom Durchmesser $m'\,n'$, welcher sich in die Horizontalebene nach wahrer Gestalt projicirt. Dieselbe Ebene $m'\,p'$ schneidet die zweite Fläche nach einer Linie, deren Horizontalprojektion $o\,r\,n\,g$ punktweise zu verzeichnen bleibt, indem man die Begegnungsorte der Ebene $m'\,p'$ und einer Reihe von Parallelkreisen der zweiten Fläche festsetzt. Einer dieser letztern Kreise projicirt sich vertikal als die auf $E'\,F'$ senkrechte Gerade $q'\,q''$ und hat mit der Ebene $m'\,p'$ die zwei Punkte (ϱ', r), (ϱ', r') gemein. Diese zu erhalten, wurde der Kreis durch Drehung um seinen Durchmesser $(q'\,q'', I\,K)$ in die Hauptmeridianebene $I\,K$ umgelegt, wobei er nach $q'\,r''\,q''$ fiel, und der Punkt, dessen Projektion ϱ', nach r''; die Ordinate $\varrho'\,r''$ bleibt in der Horizontalprojektion nach $\varrho\,r$

zu tragen ꝛc. Die in der Hilfsebene $m'\,p'$ gefundenen Schnitte kreuzen sich in y, z, welche Punkte auf $m'\,p'$ nach y', z' zu projiciren sind, und (y, y') und (z, z') gehören dem Durchschnitte beider Rotationsflächen an. Durch Anordnung anderer Ebenen, wie $m'\,p'$, fand sich die nöthige Zahl von Punkten des gesuchten Durchschnittes, welcher Durchschnitt im vorliegenden Fall aus zwei geschlossenen Aesten besteht.

Fig. 328.

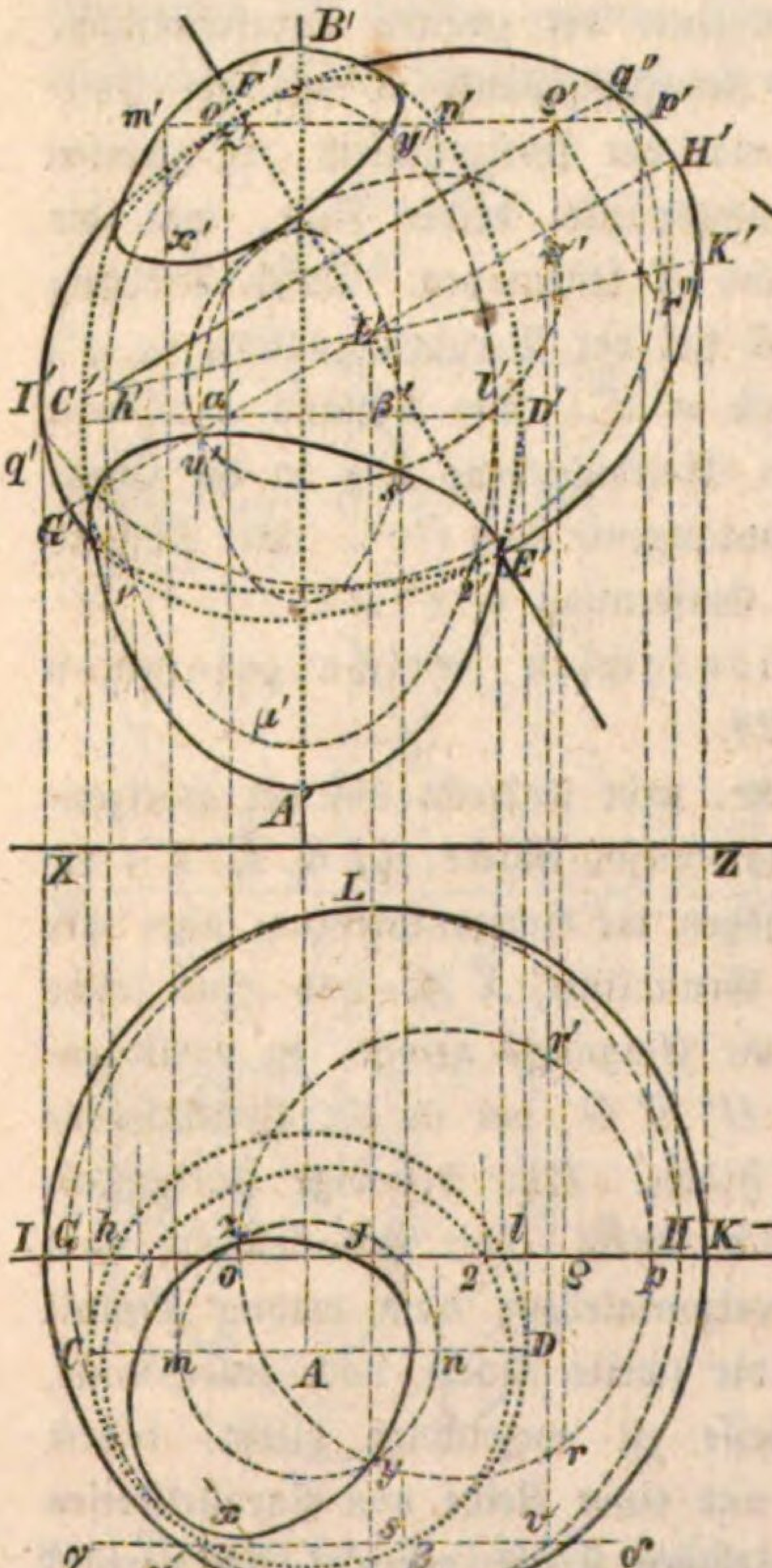
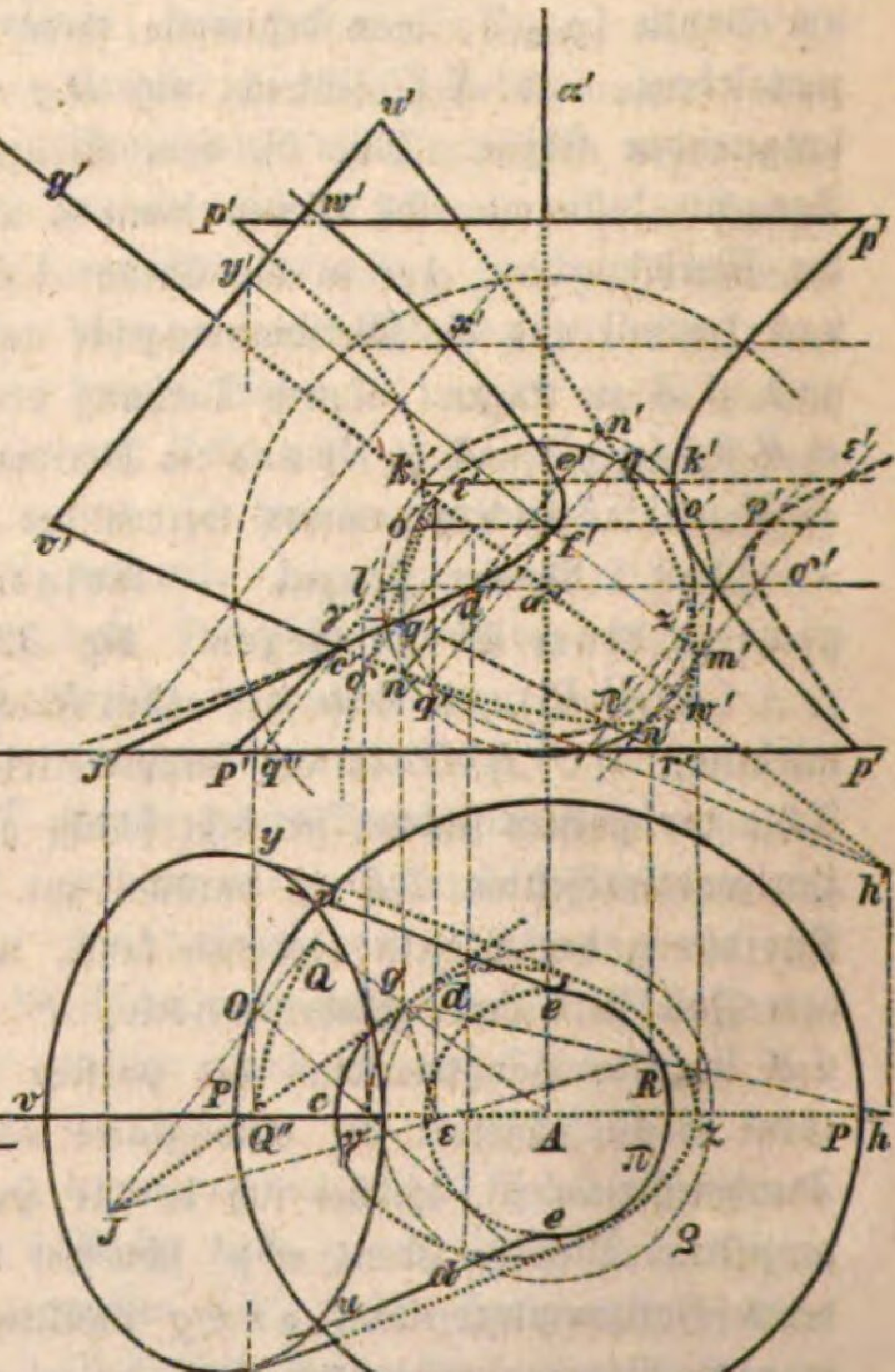


Fig. 329.



460. Man könnte jene Punkte der Durchschnittslinie verlangen, welche einer der zwei Hauptmeridianebenen CD oder IK angehören, z. B der letzteren. $(1, 1')$, $(2, 2')$ sind zwei derselben. Ihre Vertikalprojektionen $1', 2'$ liegen auf der Linie $F'\,H'\,E'\,G'$ und auf $h'\,\mu'\,l'$ der Projektion des Schnittes,

welchen die Ebene IK in der ersten Umdrehungsfläche macht. Dieser letztere Schnitt ist gebildet durch die Bezeugungspunkte der Ebene IK mit den Parallelkreisen der ersten Fläche, und seine Verzeichnung bedarf kein weiteres Erklären. Etwas umständlicher würde die Konstruktion ausfallen, wenn die Punkte der Durchschnittslinie begehrt würden, welche in der verlängert gedachten Meridianebene CD liegen; weil der Schnitt, welchen diese Meridianebene in der zweiten Rotationsfläche hervorbringt mit Hilfe der Kurven ($o'p'$, orp) festzusetzen bliebe.

Die Bestimmung der Tangente an einem Punkte der Durchschnittslinie erforderte das Konstruiren der tangirenden Ebene beider Flächen an jenem Punkte und würde sich in den Einzelheiten dieser Konstruktion nur wenig von Demjenigen unterscheiden, was wir in dem nächstfolgenden Beispiele über den entsprechenden Fall zu sagen haben werden.

461. Insofern die Rotationsfläche mit schiefstehender Achse nicht zu den Flächen zweiter Ordnung gehörte, so müßte der Umriß ihrer Horizontalprojektion nach der Art und Weise von §. 150 gewonnen werden. Da aber genannte Fläche als abgeplattetes Ellipsoid wirklich jener Ordnung beizählt, so kommt hier der Satz von §. 391 (Seite 480) zur Anwendung. Denn der Umriß $ILK\ldots$ ist die Horizontalprojektion der Berührungslinie des Ellipsoides und einer tangirenden Cylinderfläche mit vertikalen Erzeugungslinien. Diese Berührungslinie ist eine diametrale und beigeordnet dem vertikalen Durchmesser der Fläche; ihre Ebene muß bei der Stellung der Projektionsebenen in unserer Figur senkrecht stehen auf der Meridianebene IK. Werden daher die Berührungspunkte I', K' der Ellipse $F'H'E'$ und ihrer vertikalen Tangenten festgesetzt, so ist der Durchmesser $I'K'$ die Vertikalprojektion jener Diametralellipse, deren Horizontalprojektion ILK gesucht wird. Von letzterer bestimmt man sofort die eine Achse IK, während die zweite Achse LL an Länge dem Durchmesser $G'H'$ des größten Parallelkreises gleicht.

Da nun auch die erste Fläche unserer Figur ein Ellipsoid ist, so sind die Schnitte der beiden Flächen durch solche Ebenen, welche mit der Hauptmeridianebene CD oder IK parallel stehen, den entsprechenden Hauptmeridianen ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, und jede von ihnen ist bestimmt, sobald man nur den Endpunkt einer ihrer Achsen kennt. Hat man z. B. für den Schnitt des ersten Ellipsoides und der Ebene IK den Endpunkt (h, h') bestimmt, so wird eine durch h' geführte Parallele mit der (zu ziehenden) Konstruktionslinie $C'A'$ auf $A'B'$ den Endpunkt μ' der andern Achse

abschneiden. — Zur Verzeichnung entsprechender Schnitte in dem zweiten Ellipsoid erscheint es nützlich, zuvor die Horizontalprojektion $G\,L\,H\,L$ ihres größten Parallelkreises, dessen Vertikalprojektion der Durchmesser $G'\,H'$ ist, zu bestimmen. Dies vorausgesetzt, sei $\gamma\,\delta$ eine zu $I\,K$ parallele Vertikalebene; sie schneidet das Ellipsoid nach einer zu $A'\,C'\,B'\,D'$ ähnlichen Ellipse, deren Vertikalprojektion $\alpha'\,u'\,\beta'$ wie vorhin $h'\,\mu'\,l'$ bestimmt wird. Dieselbe Ebene schneidet das zweite Ellipsoid nach einer zu $F'\,G'\,E'\,H'$ ähnlichen Ellipse, deren Vertikalprojektion $v'\,s'\,u'$ ist. Die Kreuzungspunkte v, w der Geraden $\gamma\,\delta$ und der Ellipse $G\,L\,H$ projicirt man auf die Durchmesser $G'\,H'$ nach v', w' (letzterer Punkt war in der Figur nicht mehr anzugeben); ward nun aus v' z. B. eine Parallele mit $K'\,E'$ gezogen, so schnitt diese Parallele auf $F'\,E$ den Endpunkt der zweiten Achse der Ellipse $v'\,s'\,u'$ ab. Die Kreuzungspunkte $u'\,s'$ beider Ellipsen waren herab auf $\gamma\,\delta$ zu projiciren, um damit zwei Punkte des Durchschnittes beider Ellipsoide zu erhalten. — Man sieht, wie in dem Fall des Durchschnittes zweier Ellipsoide die Anwendung schneidender Hilfsebenen, welche zur Vertikalebene $I\,K$ parallel stehen, fast gleich einfache Konstruktionen herbeiführt wie der Gebrauch horizontaler Hilfsebenen.

462. **Dritter, besonderer Fall.** Die Achsen der beiden Rotationsflächen durchschneiden sich. — Der Begegnungspunkt beider Achsen heiße A und P sei ein Punkt im Durchschnitt der zwei Flächen. Durch P geht ein Parallelkreis der ersten Fläche und alle Punkte dieses Kreises haben von A einen Abstand gleich $A\,P$. Durch P geht auch ein Parallelkreis der zweiten Fläche und wiederum haben alle Punkte dieses zweiten Kreises einen Abstand von A gleich $A\,P$. Man kann sich also denken, daß die genannten zwei Parallelkreise einer Kugelfläche angehörten, von welcher A das Centrum und deren Radius die Länge von $A\,P$ hat. Von dieser Vorstellung rückwärts schließend, bietet sich folgende Konstruktion dar: man nimmt den Kreuzungspunkt A beider Rotationsachsen als das gemeinsame Centrum einer Reihe von Kugelflächen an, deren jede die zwei Flächen schneidet, was jedesmal in einem oder in mehreren Kreisen geschehen muß. Insofern sich diese Kreise auf einer und derselben Kugel paarweise kreuzen, gehören die Punkte, wo solches geschieht, dem Durchschnitt der zwei Rotationsflächen an. — Eine Ebene M durch beide Achsen gelegt, ist eine gemeinschaftliche Meridianebene und halbirt die Parallelkreise der zwei Flächen, woraus wieder hervorgeht, daß deren gegenseitige Durchschnittslinie symmetrisch gebildet sein müsse gegen die Ebene M. Aus solchem Grunde wird man bei einem Studienentwurfe M oder eine ihr

parallele Ebene als Projektionsebene nehmen und die andere Projektionsebene wieder senkrecht gegen eine der zwei Achsen stellen.

Beispiel. *Fig. 329.* Die Ebene $v\,h$ steht parallel zur vertikalen Projektionsebene und in ihr liegen 1. die Achse $(A, a'\,\alpha')$ und der Hauptmeridian $p'\,k'\,p'$ der ersten Rotationsfläche; 2. die schiefliegende Rotationsachse $g'\,h'$ der zweiten Fläche und ihr Hauptmeridian $v'\,w'\,u'$. Beide Achsen kreuzen sich in (A, a'). Man beschrieb aus a' mit einem passenden Radius $a'\,n'$ einen solchen Kreis, daß er jeden der zwei Hauptmeridiane durchschnitt; dies geschah bei dem ersten Meridian in k', k' und l', l', bei dem zweiten Meridian in n', n' und m', m'. Den Kreis als Meridian einer Kugel betrachtet, so schneidet diese die erste Rotationsfläche nach zwei Kreisen, deren Vertikalprojektionen die Sehnen $k'\,k'$, $l'\,l'$ sind und deren Horizontalprojektionen bei $d\,\rho\,d$, $e\,\pi\,e$ verzeichnet werden können ($e\,\pi\,e$ fällt in unserer Figur sehr nahe zusammen mit dem kleinsten Kreise der Fläche). Dieselbe Kugel schneidet die zweite Rotationsfläche nach zwei Kreisen, als deren Vertikalprojektionen die Sehnen $n'\,n'$, $m'\,m'$ sich zu erkennen geben. Von diesen vier Kreisen kreuzen sich drei auf der Kugel in vier Punkten, wovon zwei als gemeinsame Vertikalprojektion den Punkt e' haben, die beiden andern den Punkt d'. e' wird in die Horizontalebene auf den entsprechenden Kreis herabprojicirt nach e, e; d' wird herabprojicirt nach d, d. Damit sind vier Punkte (d, d'), (d, d'), (e, e'), (e, e') der Durchschnittslinie beider Flächen gewonnen, und weitere Punkte finden sich bei wiederholtem Verfahren, indem man das Centrum der schneidenden Kugelfläche unverändert läßt, ihren Radius aber dienlich ändert. Indem der fragliche Radius also wächst oder abnimmt, wird man an eine Gränze gelangen, wo der angenommene Kreis den einen Hauptmeridian nicht mehr schneidet, sondern tangirt, während er den andern Hauptmeridian noch schneidet, möglicherweise auch wieder tangirt. So findet sich in unserer Figur ein kleinster Kreis vom Radius $a'\,o'$, welcher den ersten Hauptmeridian in o', o' berührt, den zweiten in q', q', z', z' schneidet. Die hiedurch bestimmte Kugelfläche liefert noch zwei Punkte der Durchschnittslinie, deren gemeinsame Vertikalprojektion f' ist. Kugeln von kleinerem Radius als $a'\,o'$ treffen die erste Rotationsfläche nicht mehr, während solche Hilfsflächen von jedwedem größeren Radius die beiden Rotationsflächen erreichen und Punkte ihres Durchschnittes liefern. Diese Beziehungen hängen ab von der Lage und der eigenthümlichen Gestalt der Hauptmeridiane. Wenn diese selbst sich durchkreuzen, was in *Fig. 329* in (c', c) geschieht, so ist dies abermal ein Punkt der Durchschnittslinie. — Zur Bestimmung der Tangente $(J\,g, j'\,g')$ an einem

beliebigen Punkte (g, g') dieser Linie kennt man erstlich die beiden Parallelkreise, welche in (g, g') sich kreuzen. Der erste trifft den entsprechenden Hauptmeridian in (γ', γ) und die hier zu ziehende Tangente des Meridianes schneidet die Horizontalebene in (q'', Q''). Man trägt den Abstand $A\,Q''$ auf $A\,g$ nach $A\,Q$, wo eine Senkrechte $Q\,J$ auf $A\,g$ errichtet wird, hiemit den Horizontalriß der tangirenden Ebene im Punkte (g, g') der ersten Fläche zu erhalten. Der durch (g, g') gehende Parallelkreis der zweiten Fläche kreuzt deren Hauptmeridian in δ'; man zieht hier erstlich die Meridiantangente $\delta'\,h'$ und markirt deren Durchschnitt (h', h) mit der Achse, so ist $(g\,h, g'\,h')$ die Meridiantangente des Punktes (g, g') der zweiten Fläche. Man errichtet zweitens auf $\delta'\,h'$ eine Senkrechte $\delta'\,\varepsilon'$ und markirt deren Fußpunkt $(\varepsilon', \varepsilon)$ auf der Achse, so ist $(g\,\varepsilon, g'\,\varepsilon')$ die Normale der zweiten Fläche am Punkte (g, g'). Die Tangente $(g\,h, g'\,h')$ durchdringt die Horizontalebene in (r', R) und dieser Punkt liegt auf dem Horizontalrisse $R\,J$ der zweiten tangirenden Ebene des Punktes (g, g'), welcher Riß senkrecht stehen muß auf der Projektion $g\,\varepsilon$ der Normalen. Der Kreuzungspunkt J beider Risse bestimmt die Tangente $(J\,g, j'\,g')$.

463. **Fortsetzung.** Die beiden Rotationsflächen, worauf sich unsere Fig. *329* bezieht, gehören zu den Flächen zweiter Ordnung und ihr gegenseitiger Durchschnitt zu den Linien vierter Ordnung. Sie besteht hier aus einem einzigen offenen Aste. Weil aber diese Linie symmetrisch gegen die gemeinsame Hauptmeridianebene $v\,h$ gebildet erscheinen muß, welches auch der geometrische Grad der zwei sich durchdringenden Flächen sei, so ist die Projektion $c'\,d'\,f'\,x'\,w'$ stets eine Linie von halb so hoher Ordnung wie die Durchschnittslinie im Raume. Dies $c'\,f'\,w'$ ist also im gegenwärtigen Fall eine Kurve zweiten Grades und zwar ein Stück einer Hyperbel. Dies erkennt man aus dem bemerkenswerthen Umstande, daß das Gesetz, nach welchem die Punkte $\delta', f', e' \ldots$ erhalten werden, in seiner Allgemeinheit durchgeführt, auch noch Punkte des zweiten Hyperbelastes $\delta'\,\varphi'\,\varepsilon'$ liefert. In der That sind d', e' die Kreuzungspunkte der Sehnen $n'\,n'$ mit den beiden andern Sehnen $k'\,k', l'\,l'$. Aber demselben Kreise entspricht noch die Sehne $m'\,m'$, welche die vorgenannten, wenn sie verlängert werden, nochmals in δ', ε' kreuzt. Diese Punkte entsprechen zwar keinen wirklichen Punkten im Durchschnitt der zwei Rotationsflächen, aber nach dem Gesetze der linearen Konstruktion gehören sie derselben geometrischen Kurve an wie d, e. Vermittelst des kleinsten Hilfskreises unserer Figur werden nur noch zwei Punkte $f'\,\varphi'$ erhalten, an welchen die beiden Kurvenäste von den bezüglichen Sehnen $q'\,q', z'\,z'$ tangirt werden.

Denn man kann sich vorstellen, daß die beiden Punkte d', e' der Sehne $n' n'$, wenn diese in die Stellung $q' q'$ gekommen, sich in dem einen Punkte f' vereint hatten, so wie δ', ε' sich bei φ' zu einem einzigen Punkte vereint haben; aber eine Sehne oder Sekante ist zur Tangente geworden, sobald ihre beiden Durchschnittspunkte auf der Kurve in Eins zusammengefallen.

Durchschnitte von Rotationsflächen mit einigen Flächen anderer Gattung.

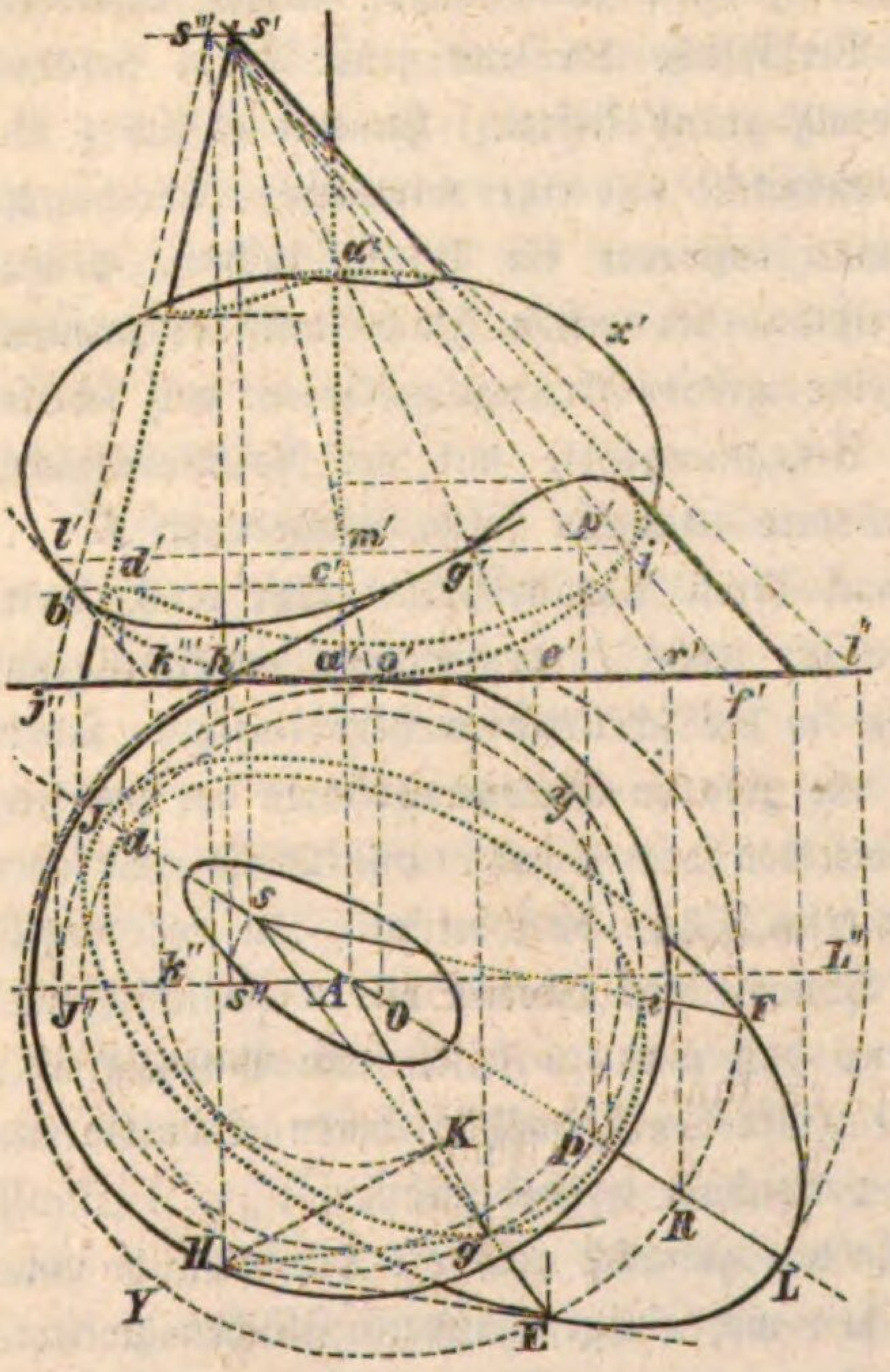
464. Nicht im Allgemeinen, sondern nur in gegebenen bestimmten Fällen läßt sich sagen, welche Art von Hilfsebenen anzuordnen seien, Punkte der Durchschnittslinien zweier krummer Flächen zu erhalten, indem entweder die Einfachheit, oder das praktisch Verläßliche der aus jener Wahl hervorgehenden Konstruktionen den Entscheidungsgrund liefert. Handelt es sich z. B. um die Durchschnittslinie einer Rotationsfläche und einer windischen, überhaupt einer scheitrechten Fläche, so wird man entweder die Punkte suchen, welche einzelne Parallelkreise oder auch Meridiane der ersten Fläche mit der zweiten gemein haben, oder man wird einzelne gerade Erzeugungslinien der scheitrechten Fläche auswählen und ihre Begegnungsorte mit der Rotationsfläche festsetzen. Mit andern Worten: man wird entweder solche Hilfsebenen $H\ldots$ anwenden, welche die erste Fläche nach ihren Parallelkreisen oder nach ihren Meridianen schneiden, und man wird für jedes H den Schnitt punktweise zu konstruiren haben, welchen diese Ebene in der scheitrechten hervorbringt. Oder aber man wird die Hilfsebenen durch die geraden Erzeugungslinien der zweiten Fläche gehen lassen, und für jede derselben den Schnitt punktweise zu konstruiren haben, nach welchem sie die erste Fläche durchdringt. In der Regel wird man keine der genannten zwei Systeme von Ebenen $H\ldots$ ausschließlich anwenden. Ja, es kann sich begeben, daß man zu keiner von ihnen greift, sondern schlechtweg etwa horizontale Hilfsebenen wählt, deren Schnitte in beiden gegebenen Flächen punktweise verzeichnet werden müssen.

In dem Nachfolgenden behandeln wir zunächst noch die Durchschnitte von Rotations-, Kegel- oder Cylinderflächen mit einigen andern Flächen zweiter Ordnung.

465. Erstes Beispiel. Fig. 330. $(A, a' \alpha')$ ist die Achse, $a' x' \alpha'$ der Hauptmeridian einer Rotationsfläche, JEF die in der Horizontalebene liegende Basis und (s, s') der Scheitel einer Kegelfläche. Es soll deren beiderseitige Durchschnittslinie verzeichnet werden. Irgend eine Horizontalebene $l' i'$ schneidet die erste Fläche nach einem Parallelkreise $(l' i', g i y)$. Dieselbe Ebene schnitte die Kegelfläche nach einer ihrer Basis ähnlichen Kurve, welche,

nachdem sie verzeichnet worden, den Kreis in zwei Punkten (g, g'), (i, i') der verlangten Durchschnittslinie kreuzen würde. In der Eigenthümlichkeit der Kegelfläche findet sich das Mittel, die Verzeichnung ihres Schnittes mit der Ebene $l'\,i'$ zu umgehen. Dazu denkt man sich, der Schnitt sei vom Scheitel (s, s') aus in die Horizontalebene perspektivisch projicirt worden, so wird er daselbst mit der Basis $J\,E\,F$ zusammenfallen. Man projicirt auf gleiche Weise den Kreis $(l'\,i', g\,i\,y)$ in die Horizontalebene, wo er sich als der Kreis $R\,Y$ darstellen wird [das Centrum (A, m') projicirt sich nach (O, o') und ein Umfangspunkt (p, p') nach (R, r')]. Der Kreis und die Kegelbasis kreuzen sich in E, F und dies sind die perspektivischen Projektionen von (g, g'), (i, i') in der Horizontalebene. Letztere Punkte liegen deshalb auf den zwei Erzeugungs- oder projicirenden Linien $(s\,E, s'\,e')$, $(s\,F, s'\,f')$. Ein mittelst anderer Horizontalebenen $l'\,i'$ wiederholtes Verfahren bringt weitere Punkte der Durchschnittslinie zum Vorschein.

Fig. 330.



$(H\,g, h'\,g')$ ist die Tangente der Durchschnittslinie an einem ihrer Punkte (g, g'), H ist der Begegnungspunkt der Horizontalrisse beider tangirenden Ebenen, welche in (g, g') an die Kegel- wie an die Rotationsfläche gelegt werden können ($K\,H$ steht senkrecht auf der Meridianebene $A\,g$, während $A\,K = a'\,k''$ gemacht werden mußte).

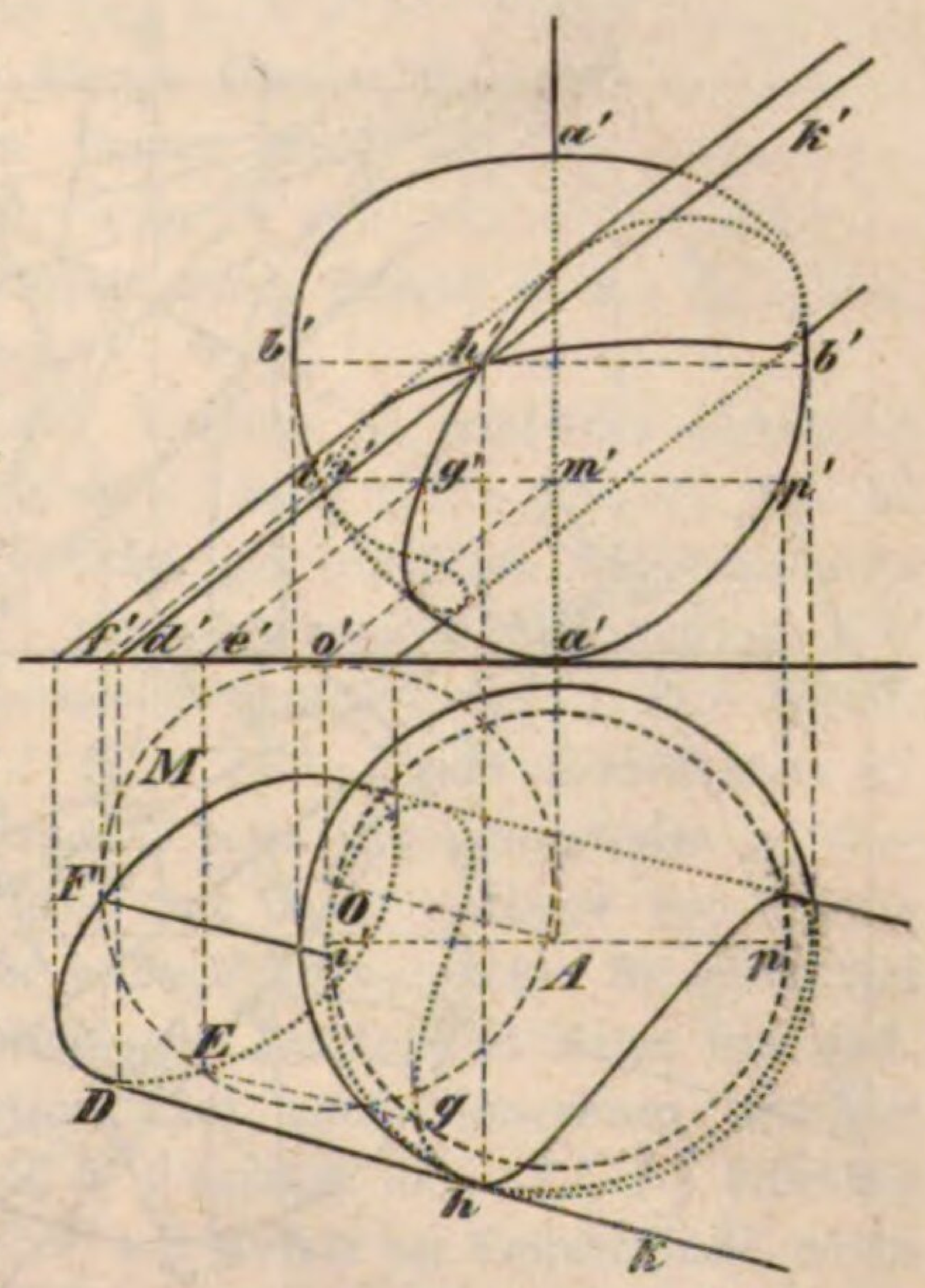
Die Achse der Kegelfläche liegt (zufällig) in einer Meridianebene $J\,A\,L$ der Rotationsfläche. Diese Meridianebene theilt demzufolge beide Flächen, wie ihre Durchschnittslinie, in zwei symmetrische Hälften. Es könnten die Punkte der Durchschnittslinie verlangt werden, welche zugleich der Ebene $J\,L$ angehören. Dem zu entsprechen, würde man den Schnitt des Kegels und dieser Ebene um die Achse $(A, a'\,\alpha')$ drehen, sie in die Hauptmeridianebene

umzulegen. Dabei wird der Scheitel (s, s') nach (s'', s''') fallen, die Punkte L, J nach (L'', l''), (J'', j''), also die zwei Geraden nach $l'' s'' j''$. Hier schneiden sie den Hauptmeridian in vier Punkten, wodurch vier Parallelkreise festgesetzt werden, auf deren jeglichem einer der gesuchten Punkte liegt. Aus b' z. B. ergiebt sich der Punkt (d, d'). In diesen Punkten müssen die Tangenten der Durchschnittslinie auf der Meridianebene $J L$ senkrecht stehen, weshalb jedem von ihnen ein Maximum oder Minimum der Höhe zukommt.

466. Zweites Beispiel. Durchschnitt einer Rotationsfläche und einer Cylinderfläche Fig. *331*.

$(A, a' a')$ ist die vertikalstehende Achse der ersten Fläche und $a' b' a' b'$ ihr Hauptmeridian; eine Ellipse $E D F$ ist die Basis der Cylinderfläche und $(D k, d' k')$ eine ihrer geraden Erzeugungslinien. — Punkte des Durchschnittes. — Man wählte eine wagerechte Hilfsebene $l' p'$; sie schneidet die Rotationsfläche nach einem Kreise, dessen Horizontalprojektion $p g i$ sofort verzeichnet werden kann. $l' p'$ und die Cylinderfläche würden sich nach einer der Basis $E D F$ gleichen Kurve durchschneiden, und beide Schnitte würden sich in zwei Punkten (g, g'), (i, i') der Durchschnittslinie kreuzen. Wir haben indeß den cylindrischen Schnitt nicht verzeichnet, vielmehr denselben durch Parallelen mit $(D k, d' k')$ in die Horizontalebene projicirt, wo derselbe mit $E D F$ in Eins zusammenfällt. Auch der Kreis $(l' p', i g p)$ ward durch Parallelen zu $(D k, d' k')$ in die Horizontalebene projicirt, wo er sich als gleichgroßer Kreis $E M$ darstellte, dessen Centrum O auf der Parallelen $(A O, m' o')$ zu $(D k, d' k')$ liegt. Die Kreuzungspunkte E, F des Kreises und der Cylinderbasis sind die Parallelprojektionen von (i, i'), (g, g'), und diese letztern liegen auf den projicirenden Geraden $(E g, e' g')$, $(F i, f' i')$.

Fig. *331*.

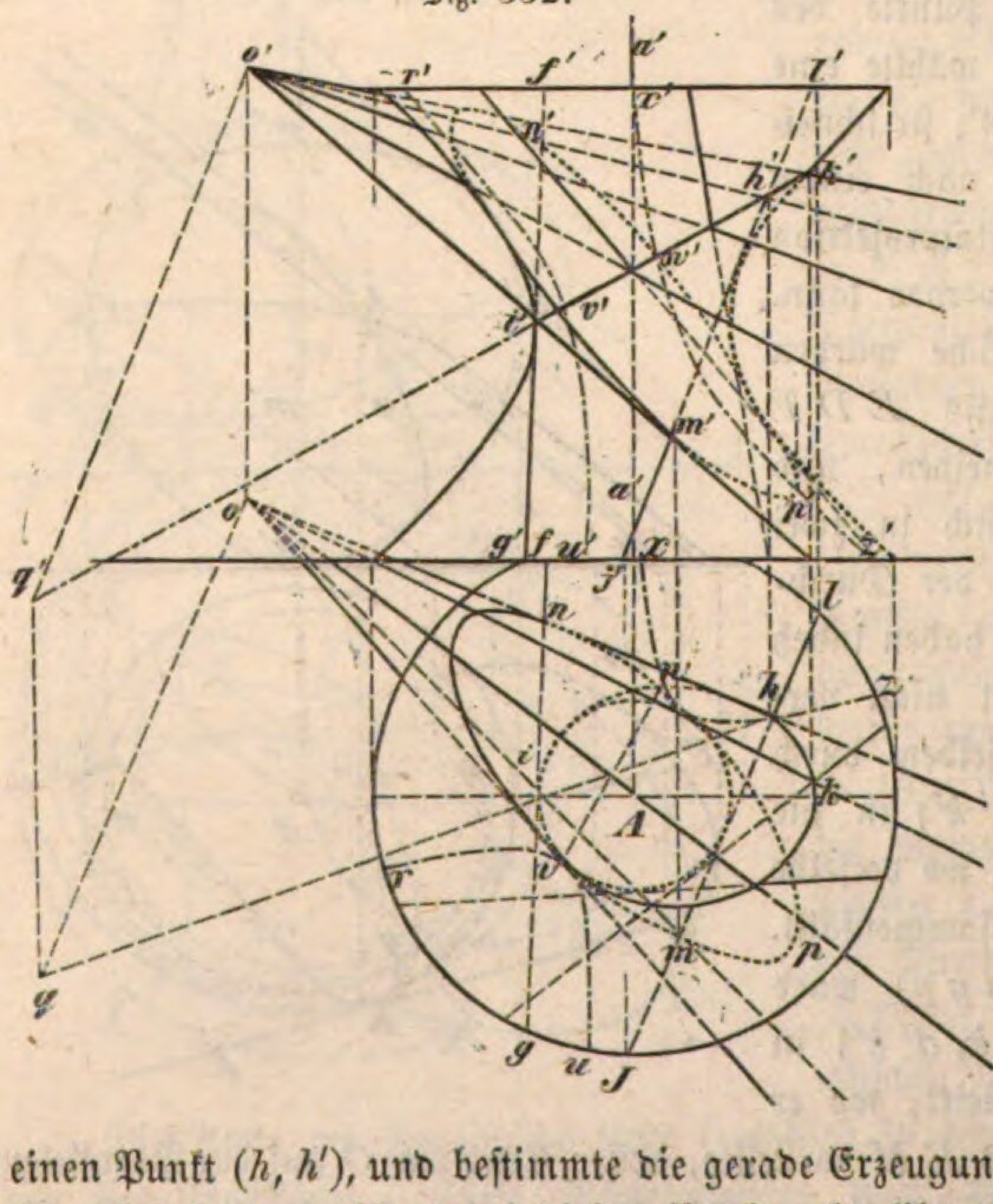


Man wird die übereinstimmende Behandlung des jetzigen Falles mit dem Vorhergehenden erkennen.

Als Eigenthümlichkeit der Fig. 331 muß hervorgehoben werden, daß eine der geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche Tangente ist an die Rotationsfläche, indem die Projektion $D\,k$ und die Projektion des größten Parallelkreises sich in h berühren, welcher Punkt auf $b'\,b'$ nach h' projicirt ward. (h, h') ist ein besonderer Punkt (ein doppelter Punkt) des Durchschnittes, welcher darum die Form einer Schleife angenommen hat.

467. **Drittes Beispiel.** Fig. 332. Es ist hier gegeben ein windisches Rotations-Hyperboloid mit vertikaler Achse und geschnitten durch eine schiefe Ebene. Die vertikale Projektionsebene ward rechtwinklig gestellt gegen diese schiefe Ebenen, so daß deren Vertikalprojektion als eine Gerade $i'\,k'$ erscheint, und die Kurve $i\,h\,k$ als Horizontalprojektion ihres Durchschnittes mit dem Hyperboloid. (o, o') ist der gegebene Scheitel einer Kegelfläche, welcher der Schnitt $(i'\,k', i\,h\,k)$ als Basis dienen soll. Diese Kegelfläche wird das Hyperboloid noch in einer zweiten, gleichfalls ebenen Kurve $(n\,m\,p, n'\,m'\,p')$ durchdringen, deren Projektionen zu verzeichnen bleiben. — Man nahm auf der gegebenen Basis irgend

Fig. 332.



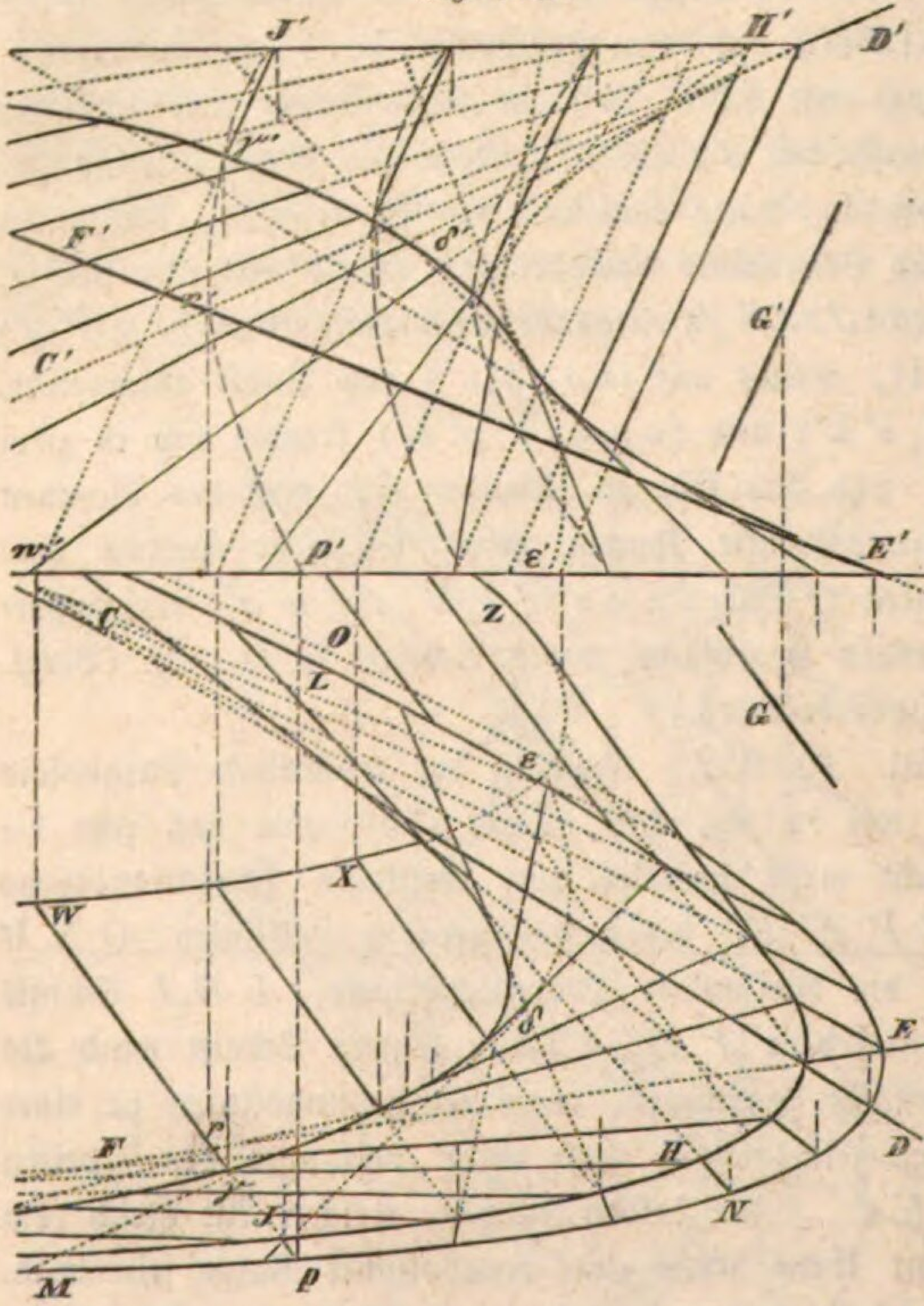
einen Punkt (h, h'), und bestimmte die gerade Erzeugungslinie $(J\,h\,l, j'\,h'\,l')$ des Hyperboloides, welche durch diesen Punkt geht (ihre Horizontalprojektion $l\,h\,J$ muß bekanntlich als Tangente der Projektion des Kehlkreises erscheinen). Diese Erzeugungslinie wird die Kegelfläche noch in einem Punkte (m, m') des gesuchten zweiten Durchschnittsastes durchdringen. Diesen Punkt zu bestimmen, legte man

durch den Scheitel eine Parallele ($o\,q$, $o'\,q'$) zu ($J\,l$, $j'\,l'$), man markirte deren Begegnungspunkt (q', q) mit der Ebene $i'\,k'$. Man verband q mit h, so hatte man damit die Projektion des Durchschnittes der Ebene $i'\,k'$ und jener Ebene, welche durch ($J\,l$, $j'\,l'$) und durch den Scheitel der Kegelfläche gedacht wird. Die Gerade und die Kurve ($i'\,k'$, $i\,h\,k$) kreuzte sich noch in einem Punkte (i, i') (welcher in der Figur zufällig mit dem gegebenen (i, i') zusammenfällt). Die Gerade ($o\,i$, $o'\,i'$) liegt mit ($J\,h$, $j'\,h'$) in einer Ebene und schneidet darum auf letzterer den Punkt (m, m') ab. Nachdem die Kegel-Erzeugungslinie ($h\,o$, $h'\,o'$) gezogen worden, hätte man auch den Punkt (n, n') bestimmen können, in welchem sie das Paraboloid durchdringt. Hierzu war nur nöthig, die zweite in der Ebene ($o\,l\,J$, $o'\,l'\,j'$) liegende Erzeugungslinie ($f\,g$, $f'\,g'$) zu verzeichnen (§ 117, III), welche auf ($h\,o$, $h'\,o'$) den Punkt abschneidet. Die beiden Kurven ($i\,h\,k$, $i'\,k'$) und ($n\,p\,m$, $n'\,p'\,m'$) kreuzen sich in zwei Punkten (v, v'), (w, w') und ihre Ebenen schneiden sich nach der Geraden ($v\,w$, $v'\,w'$). Diese Kreuzungspunkte können direkt festgesetzt werden vermittelst der Berührungslinien ($r\,v\,u\,..\,x\,w\,z$, $r'\,v'\,u'\,..\,x'\,w'\,z'$) des Hyperboloides und jener tangirenden Kegelfläche, deren Scheitel in (o, o'). (Vergl. tang. Cylinderfläche des Hyperboloides.)

468. **Viertes Beispiel.** *Fig. 333.* Gegeben ein windisches Paraboloid nach ähnlicher Anordnung wie in *Fig. 166* (Seite 279), nur daß jetzt die Axe $O\,A$ jener Figur nicht mehr parallel zur vertikalen Projektionsebene steht. ($C\,D$, $C'\,D'$), ($E\,F$, $E'\,F'$) die beiden geraden Leitlinien, $O\,N\,M$ Schnitt der Fläche durch die horizontale Projektionsebene, $L\,H\,J$ Schnitt derselben durch die Horizontalebene $J'\,H'$. Dieser letztere Schnitt ward als die Leitlinie einer Cylinderfläche genommen, deren Ergänzungslinien zu einer Geraden (G, G') parallel sein sollen, und man verlangte den zweiten Durchschnittsast ($\gamma\,\delta\,\varepsilon$, $\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'\,..$) der beiden Flächen, welcher Ast gleich dem ersten ($J'\,H'$, $L\,H\,J$) eine ebene Linie und parabolischer Natur sein wird. Man fand die Punkte dieses zweiten Astes durch Anwendung vertikaler Hilfsebenen, welche der Geraden (G, G') parallel sind. (J, J') beliebiger Punkt auf der oberen Parabel; ($J\,W$, $J'\,w'$) Gerade der Cylinderfläche, welche diesem Punkte entspricht. Die Vertikalebene $p\,J\,r$ schneidet das Parabeloid nach einem hyperbolischen Aste, dessen Vertikalprojektion die Kurve $J'\,r'\,p'$. Diese letztere wird von $J'\,w'$ in γ' geschnitten, welches auf $J\,W$ herab zu projiciren war nach γ, und (γ, γ') war einer der geforderten Punkte. $W\,X\,Z$, eine der $J\,H\,L$ gleiche Parabel, ist der Durchschnitt des Cylinders durch die horizontale Projektionsebene. — Die Kurve ($\gamma\,\delta\,\varepsilon\,..$, $\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'\,..$)

und die obere Parabel können sich, genugsam verlängert, in einem Punkte durchschneiden, welcher sich direkt konstruiren ließe, weil er der Begegnungspunkt sein muß der Parabel und der Berührungslinie des Parabeloides mit einer tangirenden Cylinderfläche, deren gerade Erzeugungslinien wiederum zu (G, G') parallel sind. Punkte dieser Berührungslinie würden sich leicht finden, sobald eine Anzahl von Schnitten wie $(p\,r, p'\,r'\,J')$ verzeichnet sind, weil dazu nur nöthig wäre, an die Vertikalprojektionen Tangenten parallel mit G' zu ziehen und die Berührungspunkte durch eine Kurve zu verbinden.

Fig. 333.



469. **Einige Beziehungen des Vorhergehenden auf die zeichnende Kunst.** Sind hohle Körper durch divergirende oder durch parallele Strahlen beleuchtet, so wird meistens auf der hohlen Wendung ein Schlagschatten entstehen, weil die Strahlen theilweise durch den Stand der Höhlung selber am Eindringen in das Innere verhindert werden. Es ist eine Aufgabe des geometrischen Theiles der Schattenlehre, die Umrisse dieser Schlagschatten zu bestimmen. Wir sprechen ohne weiteren Eingang sogleich von einigen konkreten Fällen.

Die Fig. 334 stellt eine Höhlung oder Grube dar, deren innere Wand von einer Kugelhaube gebildet wird, wovon (C, c') das Centrum, und welche sich mit der Horizontalebene nach dem Kreise $(B'\,D', B\,K\,D)$ schnei-

det, der ihren oberen Rand bildet. Die Grube wird durch Strahlen beleuchtet, welche dem Punkte (l, l') entströmen. Unter diesen Umständen läßt sich immer die Anordnung treffen, daß die vertikale Projektionsebene durch (l, l') und (C, c') geht oder mit dieser Stellung parallel ist, was in unserer Figur also angenommen worden. Die Vertikalprojektion ist dabei behandelt als ein Durchschnitt der Grube durch die Ebene $l\,C\,D$. Diese Ebene schneidet die Kugelhaube nach dem Bogen $B'\,E'\,D'$. Nimmt man auf der rechten Seite dieses Bogens einen Punkt (w, w') und verbindet denselben mit (l, l'), so läßt sich ersehen, daß jener von (l, l') ausgehende Strahl, welcher in der Richtung $(l\,w, l'\,w')$ wirkt, ungehindert bis (w, w') gelangen und diese Stelle der Kugelfläche erhellen kann. Man verzeichne den Strahl, welcher durch den Punkt (B', B) des Bogens $(B'\,E'\,D', B\,D)$ geht;

Fig. 335.

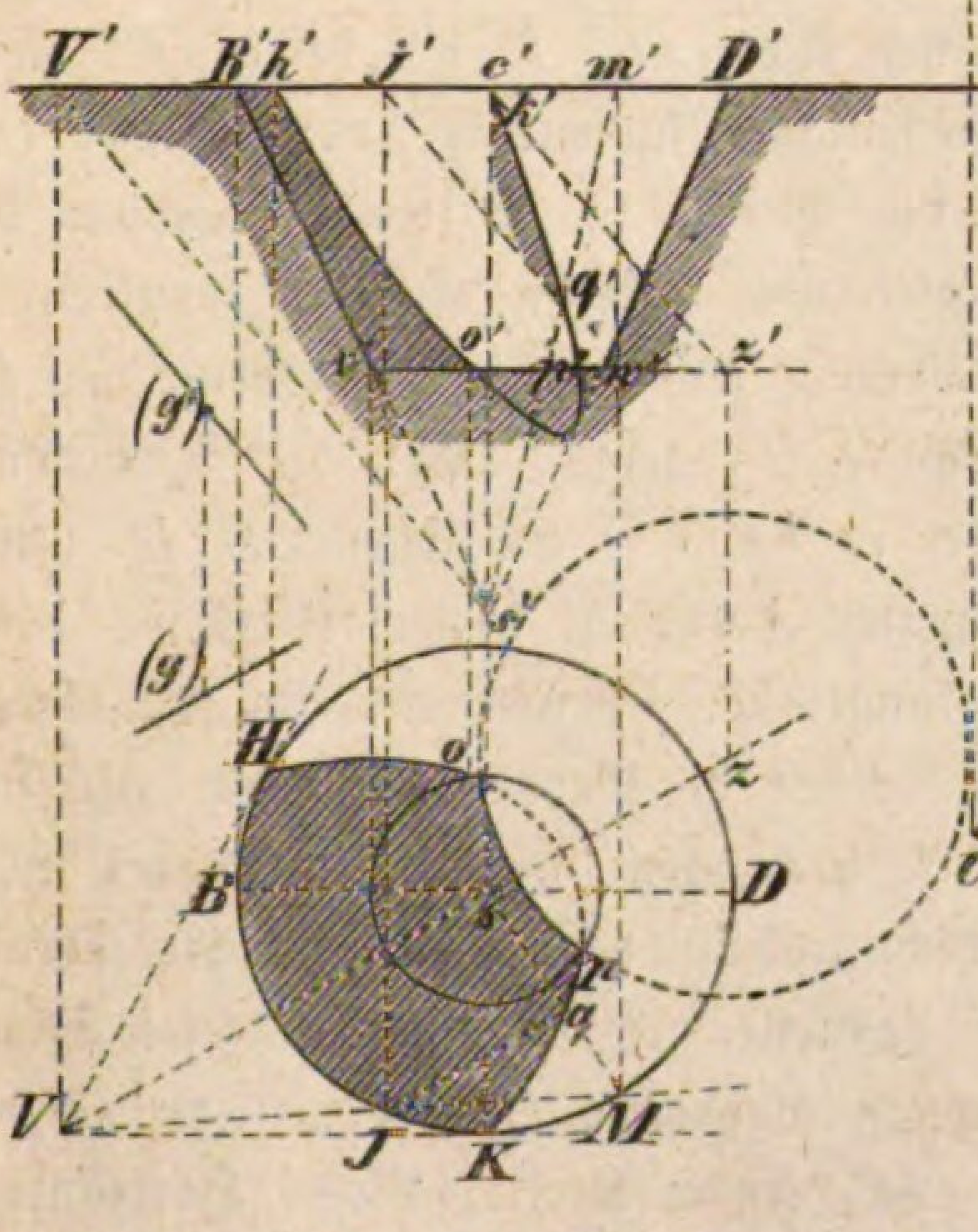
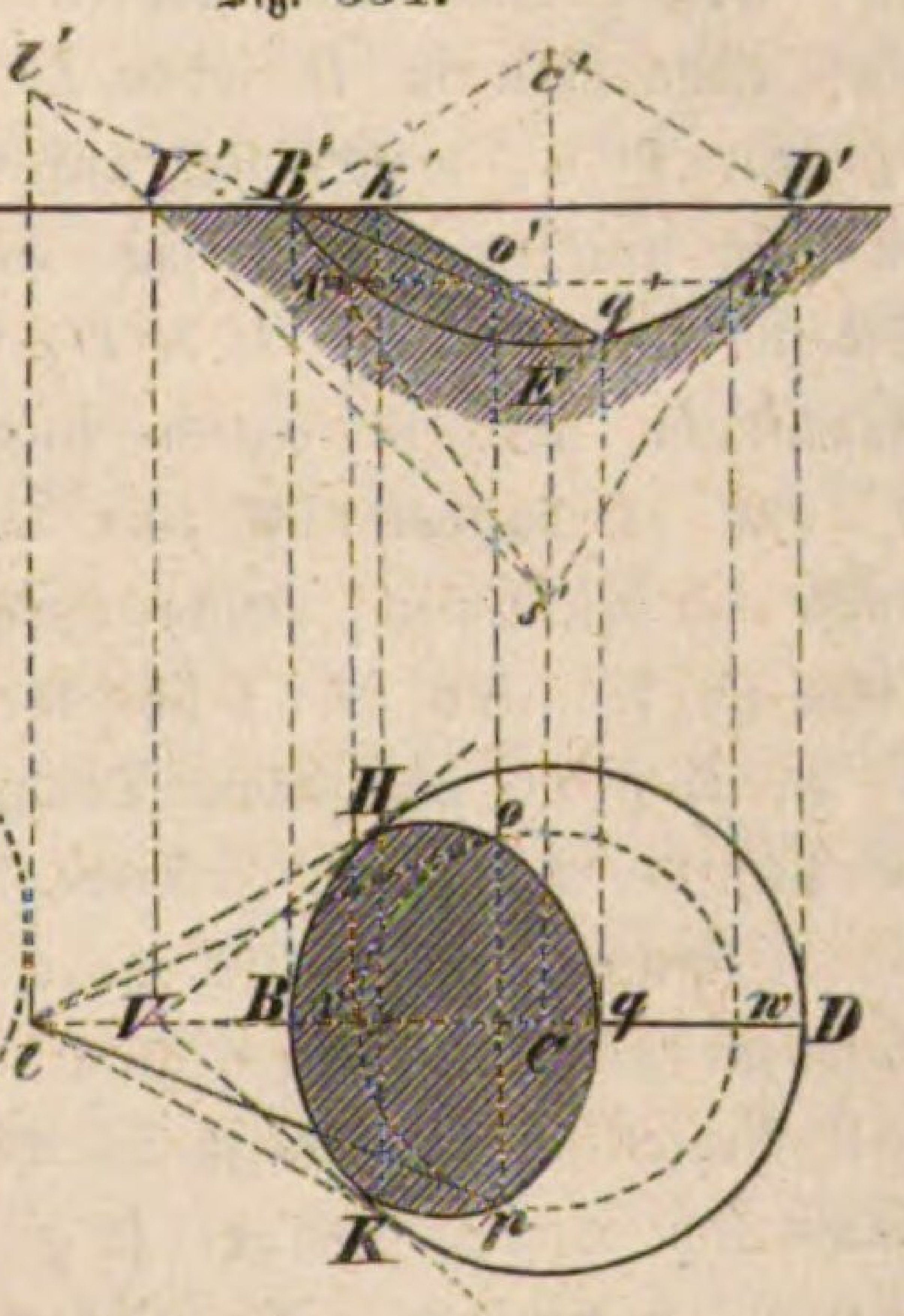


Fig. 334.



er schneidet den Bogen in $(q'\,q)$ und nun zeigt sich, daß nach einem Punkte desselben Bogens links von $(q'\,q)$, nach E' z. B. ein von (l, l') ausgehender Strahl nicht mehr gelangen könne, weil ihm die körperliche Masse außerhalb der Kugelfläche dies nicht verstattet. Es scheidet sich somit auf der Kugelhaube ein erhellter Theil von einem andern im Schatten befindlichen, und der Umriß dieses letzteren bildet sich durch die Reihe von Punkten, wie (q, q'), (o, o'), wo Strahlen, welche den Rand $H\,B\,K$ streifen,

die Kugelfläche zum zweitenmale schneiden. Die Gesammtheit aller Strahlen, welche durch Punkte des Kreises ($B' D'$, $B K D$) gehend gedacht werden können, bilden aber eine Kegelfläche, deren Scheitel der leuchtende Puukt. Diese Kegelfläche, welche mit der Kugel den Kreis $B' D'$ gemein hat, schneidet sie noch in einer zweiten ebenen Linie, also nach einem zweiten Kreise, von welchem die Bogen ($k' o' q'$, $H q K$) auf der Kugelhaube den entstandenen Schlagschatten begrenzt. — Man wird zunächst nach den Punkten H, K fragen, den Ursprüngen des Schlagschattens. Es sind die Kreuzungspunkte der beiden Kurven, nach welchen Kugel und Kegel sich schneiden; und diese Kreuzung findet statt in den Berührungspunkten der Kugel- und der Kegelfläche mit den zwei ihnen gemeinsamen berührenden Ebenen. Die letzte Bedingung läßt sich auch so umschreiben: es sind die beiden, dem Kreise $H K D$ angehörigen Berührungspunkte der Kugel mit jenen tangirenden Ebenen, welche durch den Scheitel der Kugelfläche gehen. Diese zu konstruiren, ziehe man in B' oder D' an den Bogen $B' E' D'$ die Tangente $B' s'$, oder $D' s'$, welche sich auf der Achse (C, $E' c'$) in (s, s') kreuzen. Indem man nun der Kugel jene Kegelfläche substituirt, von welcher (s, s') der Scheitel und ($B' D'$, $H K D$) die Basis, so ist jede berührende Ebene der Kegelfläche auch in einem Punkte des letzteren Kreises tangirend zur Kugel, und es handelt sich nur darum, jene tangirende Ebene der Hilfskegelfläche zu bestimmen, welche durch (l, l') geht. Aber die Verbindungslinie von (s, s') und (l, l') schneidet in (V, V') die Ebene $B' D'$ und die aus V an $H K D$ gezogenen Tangenten berühren diesen Kreis in den gesuchten Punkten H, K &c. (Siehe tangirende Ebenen der Rotationsflächen.) H und K müssen symmetrisch liegen gegen die Gerade $l D$, sich also in die Vertikalebene als ein einziger Punkt k' projiciren, wodurch angezeigt ist, daß in dieser Projektion die zweite Durchschnittslinie der Kugel und der Strahlenkegelfläche sich als die Gerade $k' q'$ darstelle. Zwischenpunkte dieses Schnittes zu erhalten, wendet man am einfachsten wagrechte Hilfsebenen an. $v' w'$ ist eine solche, sie schneidet die Kugel nach einem Kreise, dessen Horizontalprojektion $v w p$ ist und worauf sich o' nach o oder p projicirt &c.

470. Ein zweites Beispiel des Schlagschattens auf hohlen Körpern. Fig. 335. Diese Figur stellt eine kegelförmige Höhlung vor, wie solche in der Befestigungskunst unter dem Namen „Wolfsgruben" bekannt sind. Die Kegelfläche reicht nicht bis zu ihrer Spitze (s, s'), ist vielmehr bei $v' w'$ uch eine Horizontaleb ene begränzt. Im Uebrigen ward die Figur der vorhergehenden entsprechend behandelt. Die Grube ist beleuchtet durch Strahlen,

welche der Geraden (g, g') parallel, also schräg gegen den Horizont gerichtet sind; dadurch entstand auf der inneren Grubenwandung ein Schlagschatten, dessen Umriß $(H o q K, h' o' q' k')$ zu betrachten und zu behandeln ist als Durchschnitt der Kegelfläche mit einer Cylinderfläche, deren Basis der Kreis $(B' D', B K D)$ und deren Erzeugungslinie zu (g, g') parallel sind. Kegel wie Cylinderfläche gehören der zweiten Ordnung an; sie haben den Kreis $(B' D', H K D)$ gemeinsam; schneiden sich also noch in einer zweiten gleichfalls ebenen krummen Linie, welche elliptisch sein muß, weil einer kreisrunden Cylinderfläche angehörig. Seinen Ursprung nimmt der Schlagschatten in H und K, wo beide Flächen von zwei gemeinsamen tangirenden Ebenen berührt werden. Man konstruirt die Punkte als jenen tangirenden Ebenen der Kegelfläche angehörig, welche der Geraden (g, g'), also den Lichtstrahlen parallel sind. Eine Parallele zu diesen durch den Scheitel (s, s') gehend, nämlich die Gerade $(s V, s' V')$ liegt in dieser tangirenden Ebene, deren Risse $V H, V K$ durch (V, V') gehen und den Kreis in (H, h'), (K, k') berühren. Somit ist der schattenwerfende Kegelrand $H B K$ abgegränzt. (J, j') irgend ein Punkt auf diesem Bogen $(J q, j' q')$ parallel zu (g, g') oder der durch (J, j') gehende Strahl (q, q') sein Begegnungspunkt mit der Kegelfläche. Diesen zu bestimmen, dachte man sich durch (J, j'), den Scheitel (s, s') und parallel zu (g, g') eine Hilfsebene gelegt, $V J$ muß deren Horizontalriß sein: er schneidet den Kegelrand zum zweitenmale in (M, m'). Daraus folgt, daß die Kegelfläche und die Hilfsebene sich nach der Geraden $(M s, m' s')$ schneiden, auf welcher (q, q') liegen muß. In (o, o') und (p, p') erreicht der Schlagschatten die waagrechte Bodenfläche der Grube, um hier die Form eines Kreisbogens von gleichem Durchmesser wie $C D$ anzunehmen, denn dieser Bogen ist zu betrachten als ein Stück des Durchschnittes der Strahlen-Cylinderfläche mit der Ebene $v' w'$) und sein Centrum (z', z) liegt auf der Parallelen zu (g, g'), welche durch das Centrum (s, c') geht. Auf gleiche Weise wie (o, o'), (p, p') ließen sich beliebige andere Punkte der Schattengrenze gewinnen.

471. Zusatz in Betreff der Fig. *332* und *333*. Man denke sich in der Erstgenannten das Hyperboloid durch die Ebene $i' k'$ begrenzt, indem der obere Theil hinweggenommen wird und (o, o') sei ein leuchtender Punkt, von welchem die Fläche erhellt wird, so erscheint der Bogen $(v m p w, v' m' p' w')$ als die Grenze des Schlagschattens, welcher im Inneren der Fläche hervorgebracht werden muß, und die hyperbolischen Bogen $(v u, v' u')$, $(w z, w' z')$ würden auftreten als die Grenzen von Schatten und Licht auf der Außenseite

der Fläche, diese selbst als undurchsichtig angenommen. Nimmt man in Fig. 333 die zu (G, G') parallelen Erzeugungslinien der Cylinderfläche als beleuchtende Strahlen, dann wird die Durchschnittslinie $(\gamma\,\delta\,\varepsilon\,.., \gamma'\,\delta'\,\varepsilon'\,..)$ als die Grenze des Schlagschattens erscheinen, welchen die Fläche selbst auf ihre Außenseite werfen muß. Auf der inneren Seite der immer als undurchsichtig angenommenen Fläche würde eine Trennungslinie von Schattan und Licht zum Vorschein kommen, welches die Berührungslinie des Paraboloides war und einer zu (G, G') parallelen tangirenden Cylinderfläche. (Man vergleiche übrigens das Seite 406 u. ff. über Schattenkonstruktionen Gesagte.)

Von einigen Durchschnittslinien krummer Flächen mit charakteristischer Horizontalprojektion.

472. Fig. 336. Durchschnitt eines windischen Conoides und einer Ringfläche. $(A, A'A')$ sei die vertikal stehende Achse, und der Bogen NK ein Stück der Basis einer Rotations-Cylinderfläche. In C steht eine Vertikalebene YCX tangirend an die Cylinderfläche, und man stellt sich vor, letztere sei in diese Ebene aufgewickelt worden. Eine horizontale Ebene Θ schneidet die Cylinderfläche nach einem Kreise, welcher sich durch die Aufwickelung in eine gerade Linie umwandelt. $n'k'$ ist ein Stück dieser letzten Geraden; über ihr hat man in der Aufwickelungsebene einen Kreis verzeichnet. Der Kreis ward auf die Cylinderfläche gewickelt, sodaß $n'k'$ auf den vorhin genannten Kreisschnitt der Ebene Θ fiel, und sein vertikaler Durchmesser $A'A'$ auf die Vertikale A. Nachdem daher die Länge von $C'n'$ oder $C'k'$ auf dem Kreise von C nach N und auch nach K getragen worden, stellte der Bogen NCK die Horizontalprojektion des der Cylinderfläche umwickelten Kreisumfanges dar. Diese letztere Linie nun und die Vertikale $(A, A'A')$ sind die Leitlinien eines Conoides mit horizontaler Leitebene. Man zog sofort in der Aufwickelungsebene einige Waagrechte, $a'a'$, $b'b'$ in paarweisen gleichen Abständen über und unter $n'k'$ und verband die Punkte a', a'; b', b' durch senkrechte Linien, welche auf $n'k'$ die Theilpunkte $1', 2'$.. abschnitten. Die Abstände $C'1', 1'2'$ .. wurden auf $n'k'$ entnommen, um auf dem Kreise NK von C nach 1, von 1 nach 2 &c. getragen zu werden; endlich hat man die also erhaltenen Punkte $K\,2\,1\,C\,..\,N$ mit A verbunden und damit die Horizontalprojektionen solcher geraden Erzeugungslinien des Conoides erworben, welche den Theilpunkten n', b', a' ... der Aufwickelung entsprechen. Die Gerade $2\,A$ z. B. stellt die gemeinsame Projektion von

zwei Erzeugungslinien dar, deren Abstände über oder unter der Ebene Θ gleich sind der Kreisordinate $2' b'$ 2c. — Für die Ringfläche sind folgende Generations-Momente gegeben: ihr Centrum liegt in der Ebene Θ und auf der Achse A; ihr größter Radius hat die Länge $A\,C$, und ihr Meridianschnitt ist ein Kreis von gleichem Durchmesser wie $n'\,k'$. Auf dem beliebig genommenen Radius $A\,P$ hat man die Länge $n'\,k'$ von P nach O getragen; über $O\,P$ einen Halbkreis beschrieben, welcher betrachtet werden konnte als die Umlegung eines halben Erzeugungskreises der Ringfläche in die Ebene Θ. $\alpha'\,\alpha'$, $\beta'\,\beta'$ sind Parallelen zu $O\,P$ in Entfernungen von ihr

Fig. 336.

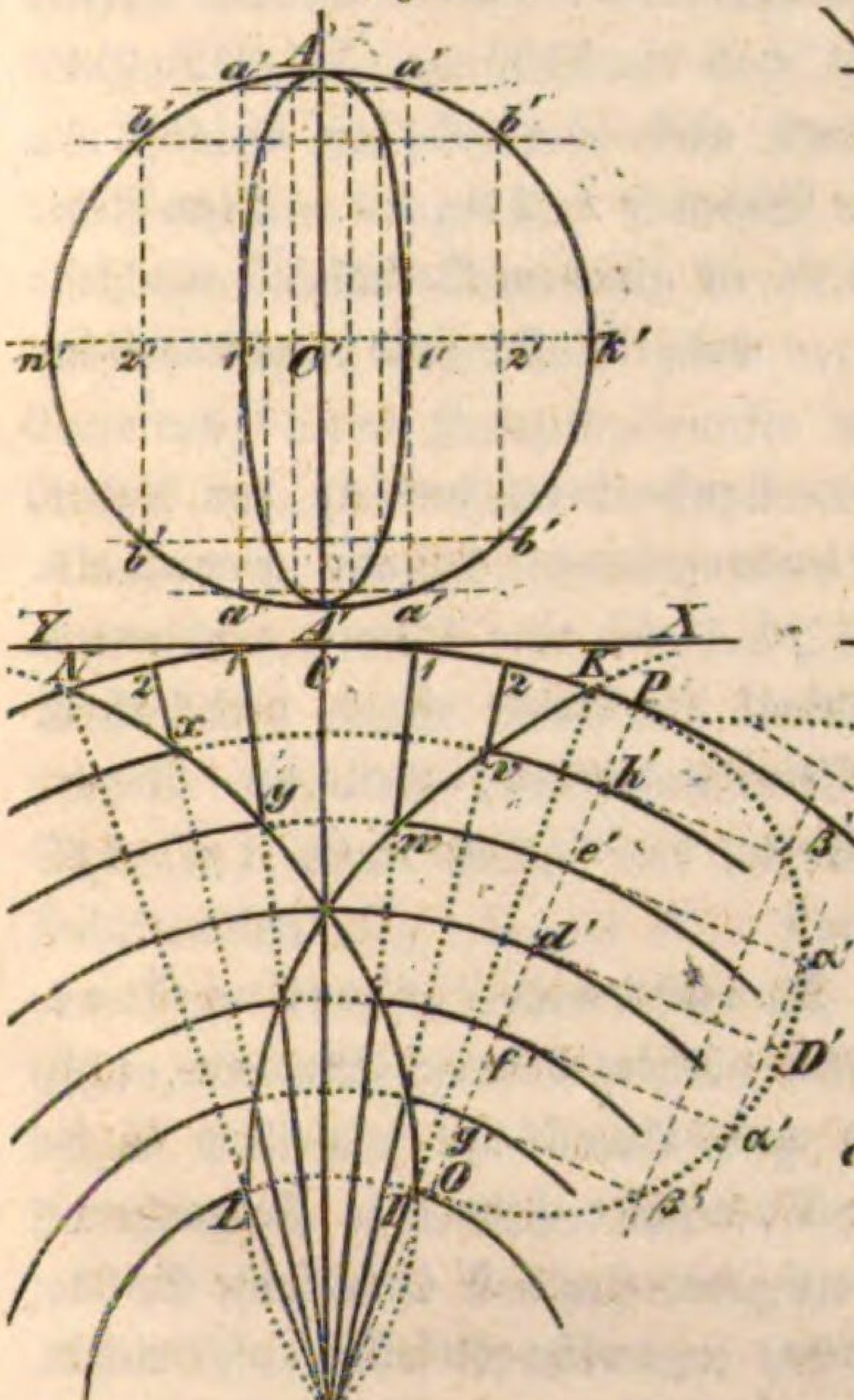
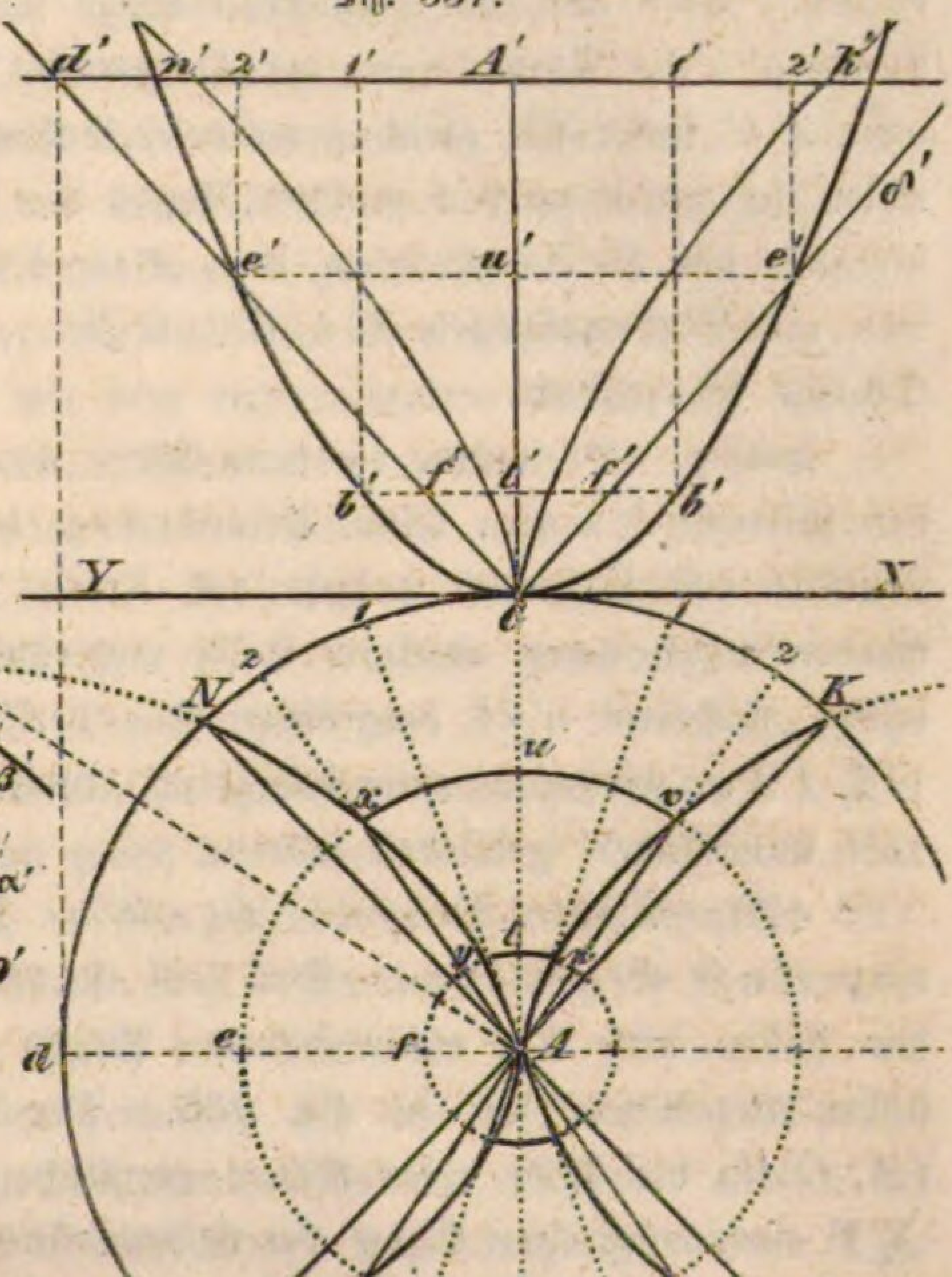


Fig. 337.



gleich den Abständen der Parallelen $a'\,a'$, $b'\,b'$ von $n'\,k'$. Die Punkte β', α'.. hat man auf $O\,P$ nach g', h', f', e'.. projicirt und endlich mit den Radien $A\,O$, $A\,g'$, $A\,f'$ ... Kreise beschrieben. Diese Kreise sind die Horizontalprojektionen von Parallelkreisen der Ringfläche, welche paarweise in gleicher Horizontalebene liegen mit Paaren der vorher bestimmten geraden Erzeu-

gungslinien des Conoides, jedes Paar wird sich in Punkten des Durchschnittes beider Flächen kreuzen. Man erkennt x und v, y und w als die Projektionen solcher Punkte, und die Kurven $N x y I$, $K v w L$ als Projektionen der Durchschnittslinien des Conoides und der Ringfläche. — Würde man die Ringfläche sich nach herwärts schließen lassen und in gleicher Richtung das zweite Flächennetz des Conoides bilden, so entständen zwei weitere Aeste des Durchschnittes dieser Flächen von gleicher Form wie die ersten, aber symmetrisch gestellt gegen die Achse A. Das Gesammte bestände somit aus vier geschlossenen Aesten, jeglicher eine Linie von doppelter Krümmung; ihre Horizontalprojektionen aber sind Bögen archimedischer Spiralen. Dies auf dem einfachsten Wege nachzuweisen, haben wir die Theilpunkte a' b' der Aufwickelung der Art gewählt, daß die Abstände $C'1'$, $1'2'$, $2'k'$ oder $2'n'$ unter sich gleich geworden, wodurch auch $d'e'$, $d'f'$, $e'h'$, $f'g'$... unter sich gleich werden müßten, sowie die Bögen $c\,1$, $1\,2$ .. ꝛc. Man sieht hieraus, daß die Fahrstrahlen $A y$, $A x$, $A N$ in gleichem Verhältniß wachsen wie die Drehungsbögen $C\,1$, $C\,2$, $C N$ .., wodurch sich die archimedische Spirale kennzeichnet.

Zusatz. Es würde in dem Wesen der Konstruktion und in der Natur der Kurven $N x y$ .. keine Veränderung hervorgebracht haben, wenn als Leitlinie des Conoides anstatt des Kreises $n' A' K'$ eine Ellipse genommen worden wäre, deren vertikale Achse unverändert die Größe $A' A'$ beibehalten hätte, während $n' k'$ vergrößert oder verkleinert worden, weil die Bögen $C\,1$, $1\,2$ .. wiederum unter sich gleich geworden, die Radien $A\,O$, $A\,g'$, $A f'$ aber unverändert geblieben wären.

473. **Zweites Beispiel.** Fig. 337. Durchschnitt eines Conoides und einer Kegelfläche. Der Fall ist dem vorhergehenden verwandt, und wir haben auch die entsprechenden Punkte und Linien mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie in Fig. 336. Der Unterschied besteht in Folgendem: $(A, C A')$ die Achse eines Rotationscylinders, der Kreis $N C K$ seine Basis; $X Y$ eine tangirende Ebene der Cylinderfläche, in welche dieselbe aufgewickelt gedacht ward. Die vorige Ebene Θ ist jetzt die horizontale Projektionsebene; also die Gerade $X Y$ die aufgewickelte Basis der Cylinderfläche. Als krumme Leitlinie des Conoides ist jetzt eine Linie getreten, deren Aufwickelung die Parabel $n' b' C k'$, und deren Achse $C A'$ nach dem Wiederumwickeln auf den Cylinder mit der Berührungslinie C zusammenfällt. Man hat in der Aufwickelung mehrere Horizontalen $n' k'$, $e' e'$, $b' b'$ ... gezogen; in deren Begegnungspunkten mit der Kurve die Senkrechten $b' 1'$, $e' 2'$ ... errichtet, und

wiederum die Abstände $A'1'$, $1'2'$, $2'n'$ ... auf dem Kreise von C nach 1, von 1 nach 2, von 2 nach N... ꝛc. getragen. In den Radien AC, $A1$, $A2$, AN ꝛc. hat man jetzt die Projektionen von geraden Erzeugungslinien des Conoides, welche in Horizontalebenen liegen, deren Höhen durch die Entfernungen Ct', Cu', CA' ꝛc. ihr Maß finden. Das vorliegende Conoid wird sich nach aufwärts ins Unendliche erstrecken können. — Die Kegelfläche, welche jetzt an die Stelle des vorigen Ringes getreten, hat gleichfalls die Vertikale A als Achse, ihre Spitze liegt mit dem Scheitel C der Parabel in gleicher Horizontalebene und als ihre Basis kann der Kreis vom Radius Ad genommen werden, welcher in der Ebene $A'd'$ liegt, sodaß $d'C\delta'$ den Hauptmeridianschnitt der Fläche vorstellt. $d'C$ und die Wagrechten $A'n'$, $u'e'$, $t'b'$ kreuzen sich in den Punkten d', e', f', und nachdem mit $A'd'$, $u'e'$, $t'f'$... als Radien aus A koncentrische Kreise beschrieben worden, hat man in ihnen die Projektion wagrechter Schnitte der Kegelfläche, deren Ebenen in den Höhen Ct', Cu', CA' über der Projektionsebene liegen. In jeder von diesen Ebenen liegen aber auch zwei der vorhin bestimmten Erzeugungslinien des Conoides, deren Kreuzungspunkte mit dem entsprechenden Kreise dem Durchschnitt der zwei Flächen angehören. Man erkennt somit in N und K, x und v ꝛc. die Horizontalprojektionen solcher Punkte, und in den Kurven $AyxN$, $AwvK$, $A\pi$.., $A\zeta$.. die Projektionen der Durchschnittslinie. Diese selbst besteht aus vier unendlichen Ästen, welche gemeinschaftlich in (A, C) ihren Ursprung nehmen. Die Projektionen $AyxN$... ꝛc. sind Spiralen, deren Gesetz aus folgenden Erwägungen hervorgehen wird. Die Fahrstrahlen Ay, Ax, AN.. sind gleich den Kegelradien $t'f'$, $u'e'$, $A'd'$.. und diese letzteren stehen unter sich in dem gleichen Verhältniß wie die Abscissen oder Abschnitte Ct', Cu', CA'... Andererseits sind die Drehungsbögen $C1$, $C2$, CN an Länge gleich den Ordinaten $t'b'$, $u'e'$, $A'n'$... der Parabel. In dieser Kurve aber verhalten sich die Abscissen Ct', Cu'... wie die Quadrate der zugehörigen Ordinate $t'b'$, $u'e'$... Daher endlich ist $AyxN$.. eine Spirale von der Beschaffenheit, daß die Fahrstrahlen Ay, Ax... sich verhalten wie die Quadrate der Drehungsbögen $C1$, $C2$.... Man hat diese Linien parabolische Spiralen genannt, und wir formuliren das Ergebniß unserer Konstruktionen dahin: die Horizontalprojektion der Durchschnittslinie des vorliegenden Conoides und der Kegelfläche besteht aus vier parabolischen Spiralen, welche in A ihren Ursprung finden. (Vgl. §. 176.)

Von einigen cylindrischen und konischen Schnitten der Kugelfläche.

474. In Bezug auf ihre Berührungen mit Ebenen und krummen Flächen, wie auf ihre Durchschnitte mit denselben könnte die Kugel einfach den Sphäroiden beigezählt werden, ohne ihrer besondere Erwähnung zu thun. Aber in ihrer einfachen Gestalt wurzeln eigenthümliche Beziehungen zu andern Flächen der zweiten Ordnung, wovon im Nachstehenden einige hervorgehoben werden sollen. Jeder ebene Schnitt der Kugel hat die Kreisform, und kann als ein Parallelkreis angesprochen werden, indem man den auf der schneidenden Ebene senkrecht stehenden Kugeldurchmesser als Rotationsaxe der Fläche betrachtet. Handelt es sich nun um die Intersektion einer Kugel- und einer Cylinderfläche, so wendet man Hilfsebenen an, welche mit den geraden Erzeugungslinien der letzteren parallel sind, wodurch die Punkte jener Intersektion durch das Kreuzen von Kreisen und geraden Linien sich kenntlich machen. Weil indeß durch die einzige Bedingung, mit einer geraden Linie parallel zu sein, die Stellung einer Ebene keineswegs völlig bestimmt ist, so läßt sich stets mit geringer Mühe eine Projektionsebene festsetzen, parallel mit den Geraden der Cylinderfläche, und mit welcher die Hilfsebenen parallel sind. Einen Fall solcher Behandlung soll Fig. *338* geben.

Den unteren Theil dieser Figur mag man als eine Horizontale oder als eine Vertikalprojektion nehmen; die Projektionsebene ist den geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche parallel und in dem oberen Theil der Figur erblicke man eine zweite Projektion, deren Ebene auf denselben Geraden senkrecht steht. Beide Flächen sind durch Ebenen parallel zur ersten Projektionsebene geschnitten, wodurch sich die Kugelkreise in wahrer Gestalt auf dieselbe projiciren und durch ihr Zusammentreffen mit den entsprechenden geradlinigen Schnitten des Cylinders die Punkte der beiderseitigen Durchschnittslinien festsetzen. Diese hat im vorliegenden Falle zwei geschlossene Aeste, über welche uns weiter nichts anzuführen bleibt.

475. Mehr Interesse gewinnt der Fall, wenn wie in Fig. *339* die Axe $a\,a$ der Cylinderfläche und das Centrum (C, c') in einer Ebene liegen, welche hier als horizontale Projektionsebene genommen werden kann. Die vertikale Projektionsebene $X'\,Y'$ ist wiederum senkrecht gegen die Geraden der Cylinderfläche gestellt und die angewandten Hilfsebenen sind der ersten Projektion parallel. Die Durchschnittslinie beider Flächen, deren Punkte mittelst dieser Hilfsebenen gewonnen werden, besteht wiederum aus zwei geschlossenen Aesten, welche zusammen eine Linie vierter Ordnung bilden. Weil diese

Fig. 338.

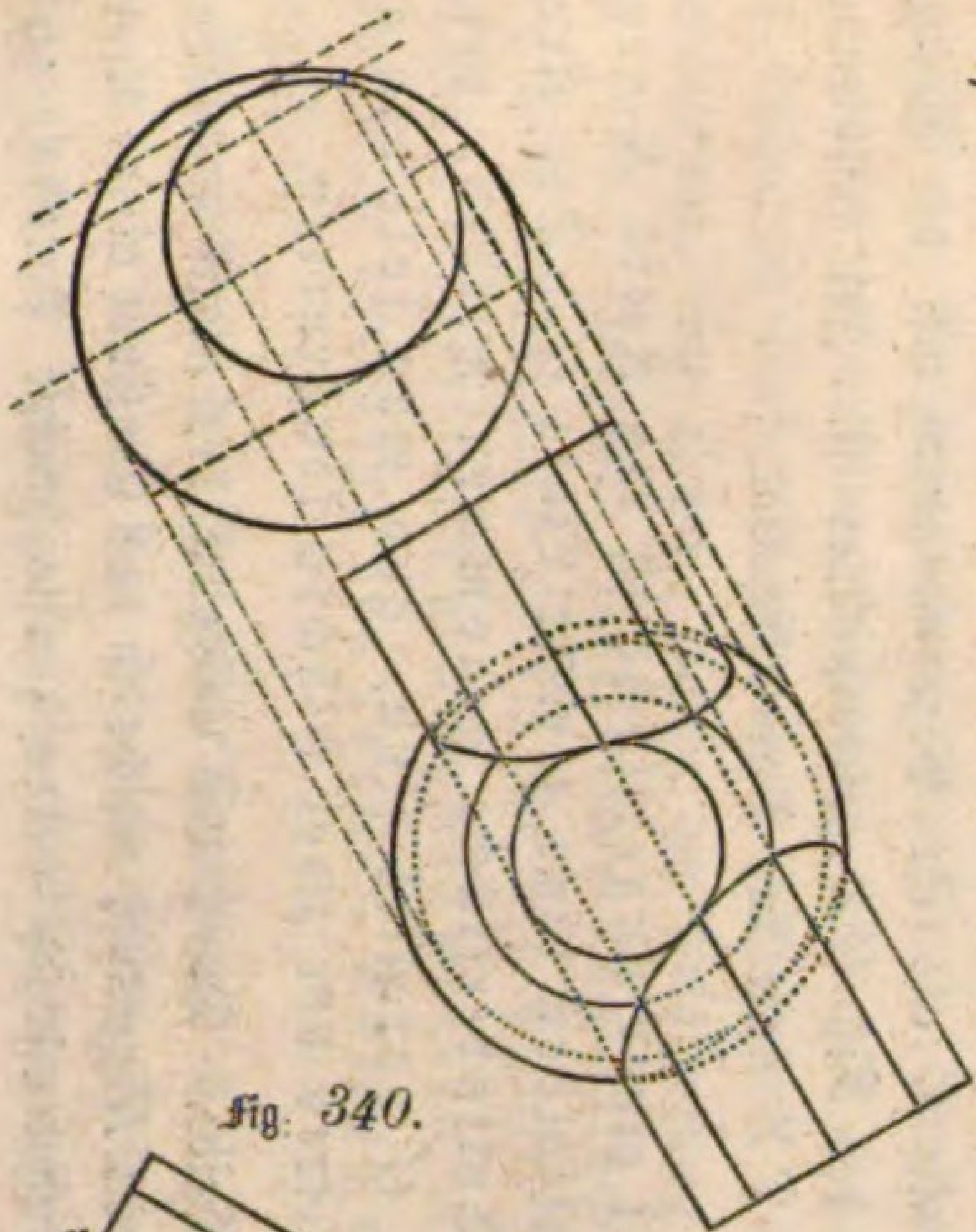


Fig. 339.

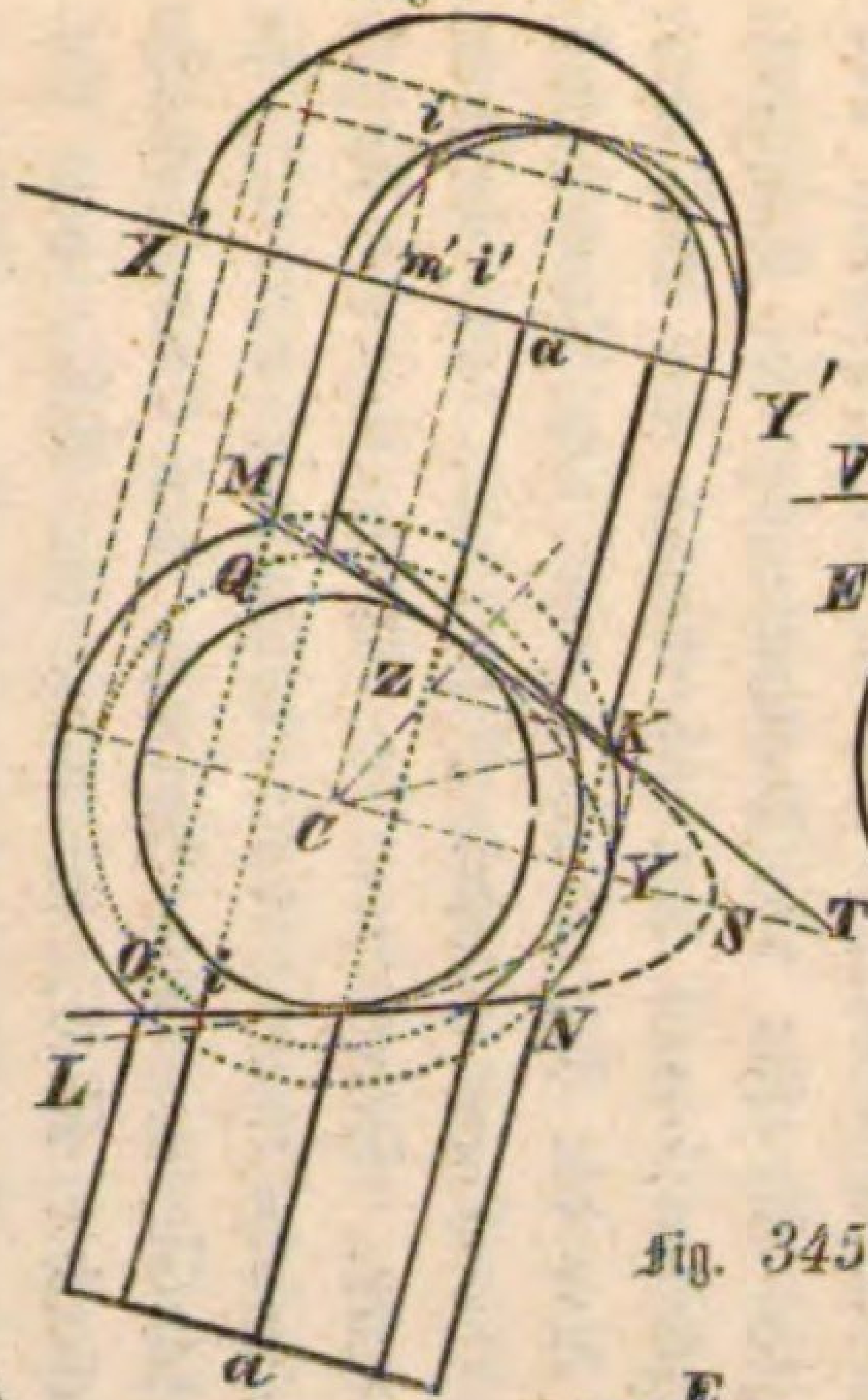


Fig. 341.

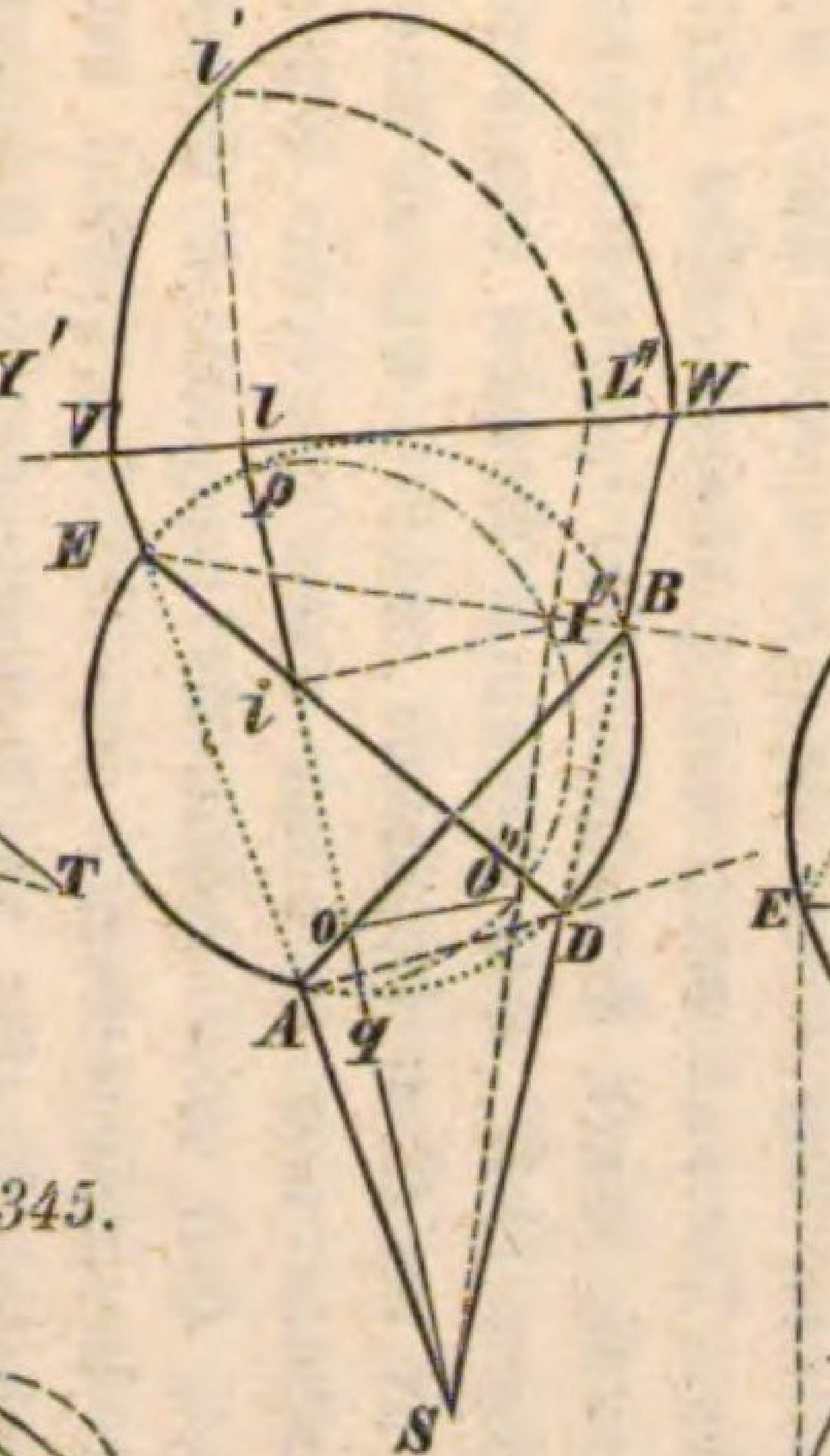


Fig. 342.

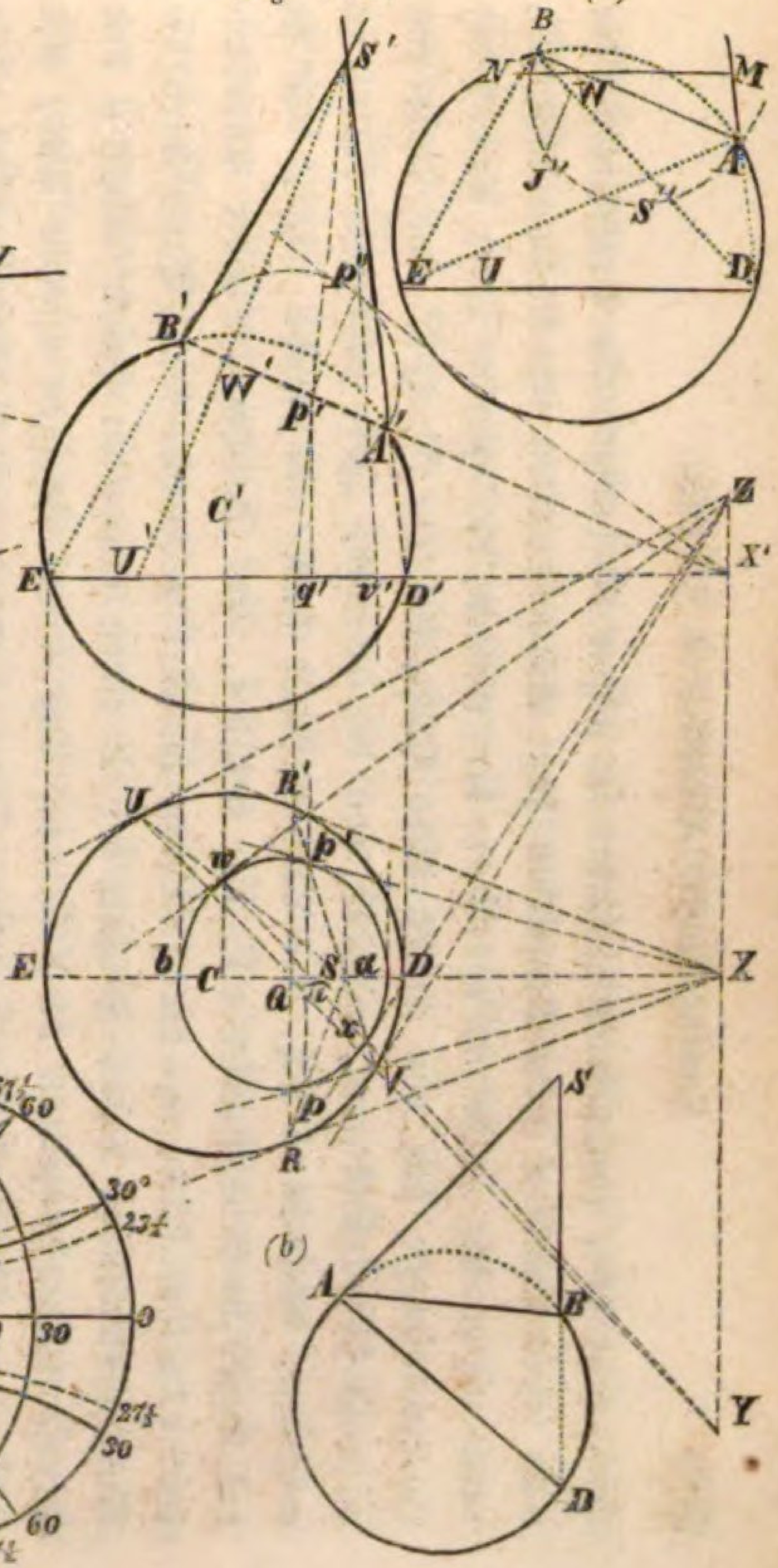


Fig. 345.

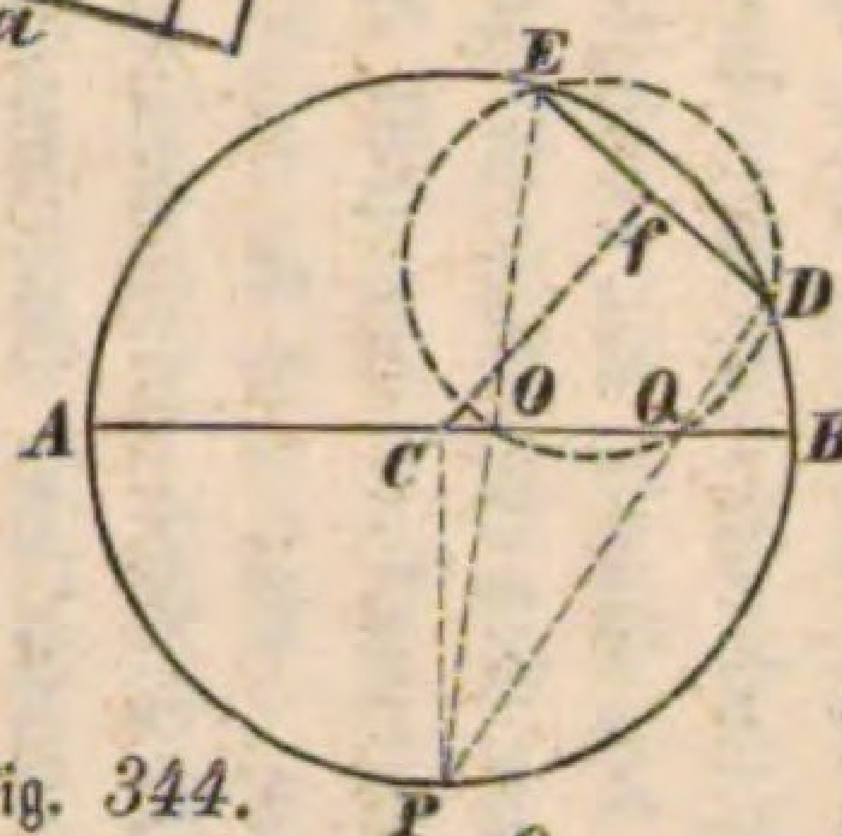


Fig. 340.

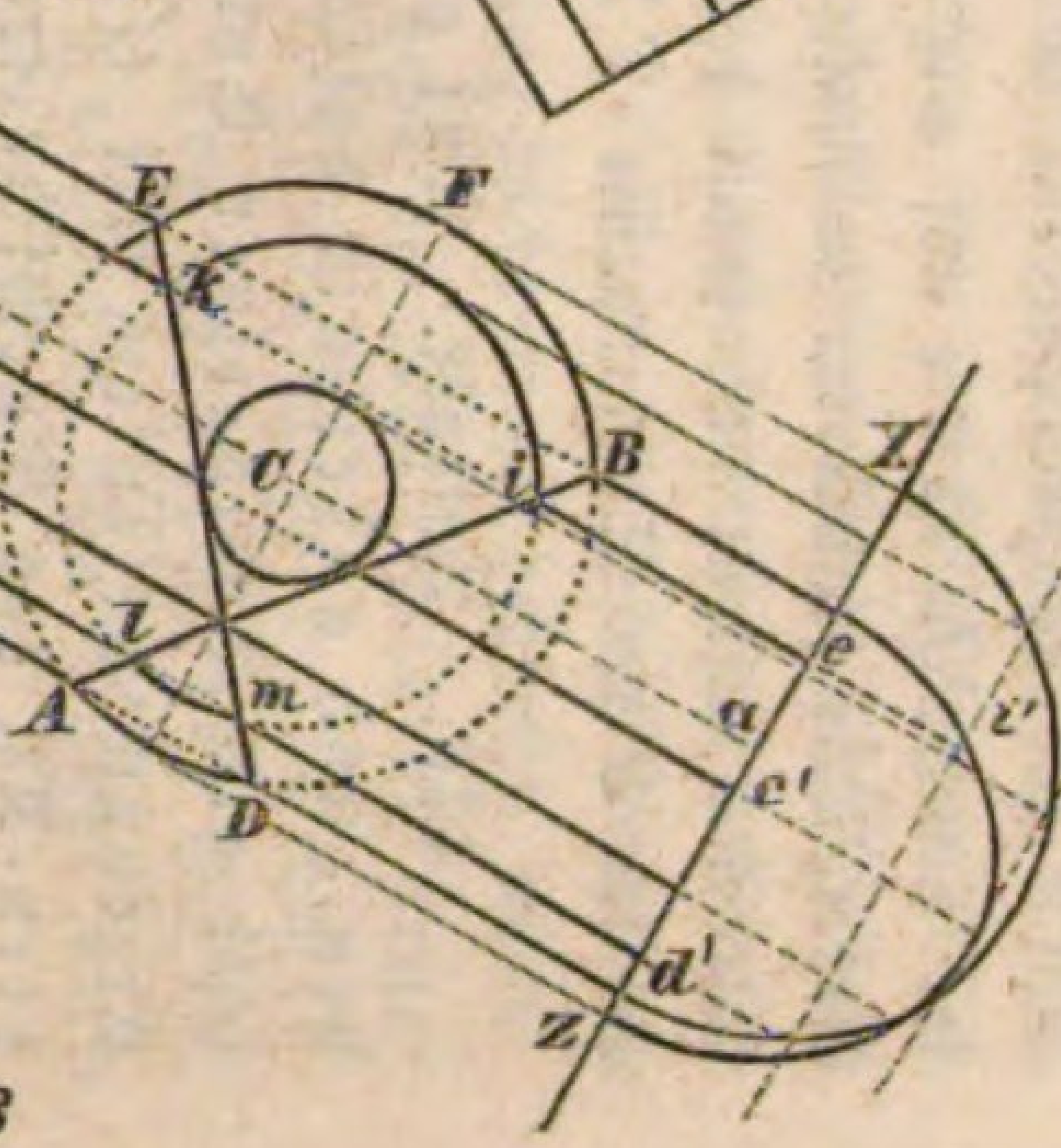


Fig. 346.

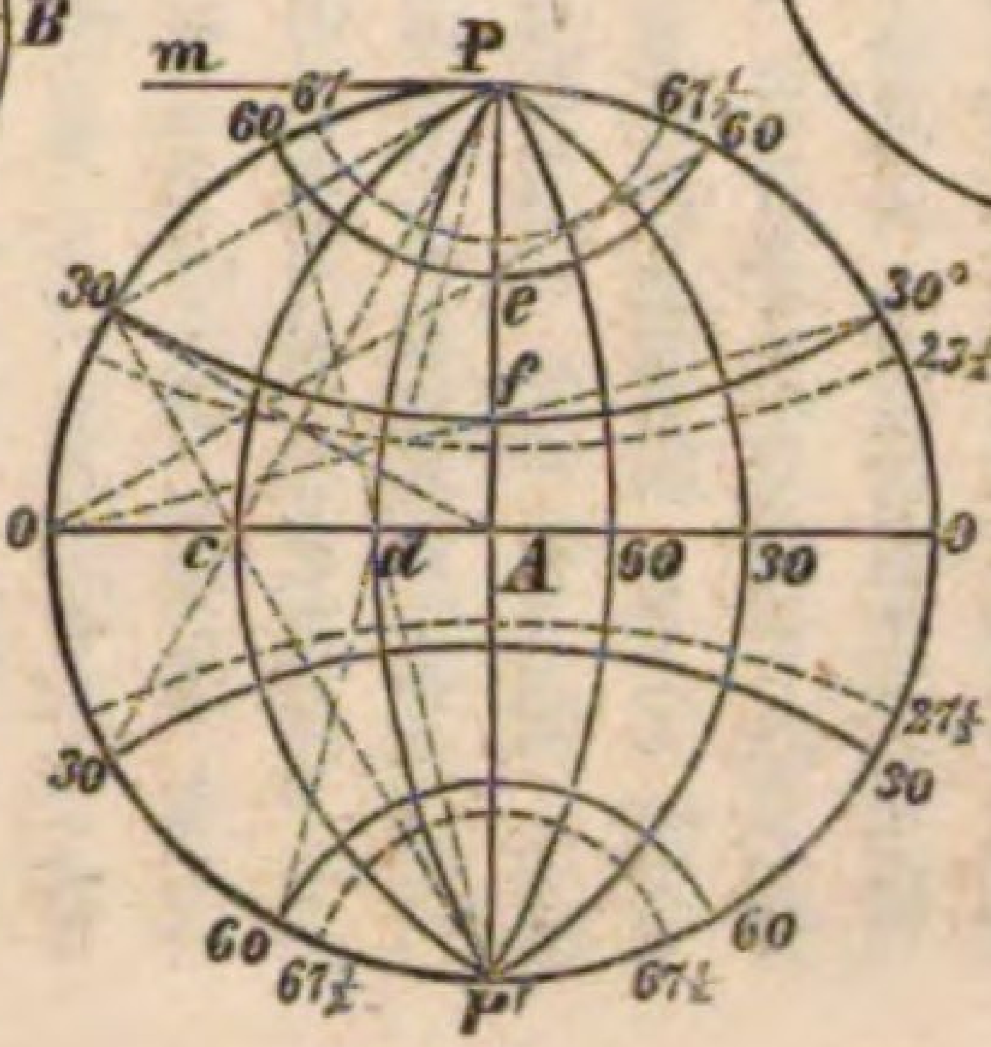


Fig. 344.

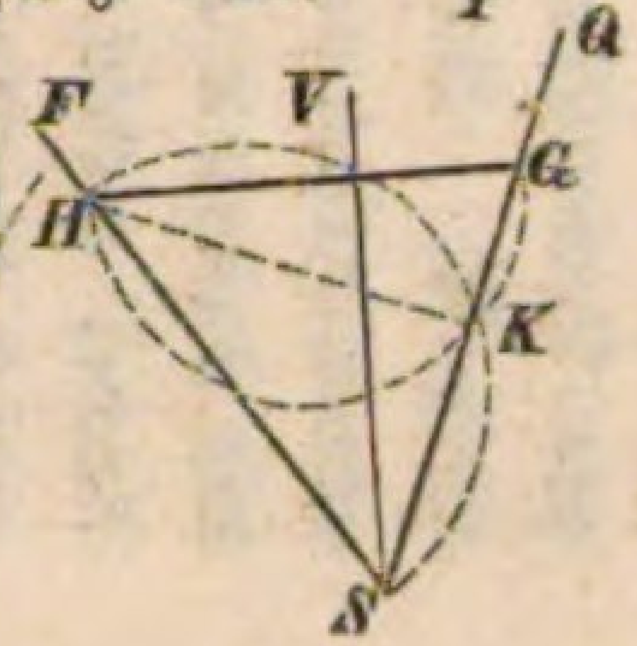
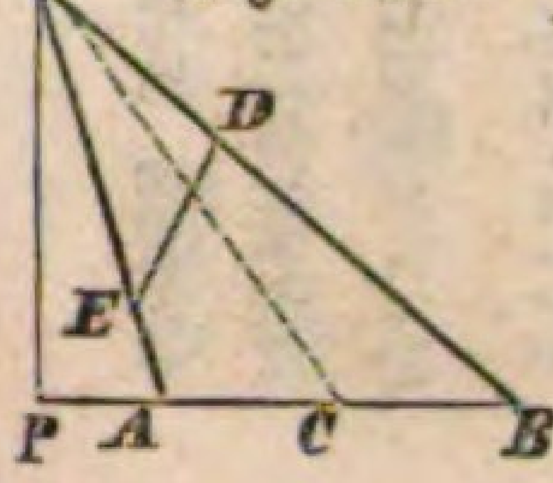


Fig. 343.



Linie jetzt aber symmetrisch geformt ist gegen die horizontale Projektionsebene und jeder Punkt i ihrer Projektion zwei Kurvenpunkten im Raume entspricht, deren einer die Höhe $m'i'$ **über** der andern die gleiche Tiefe **unter** der Horizontalebene hat, so bildet diese Projektion $O\,i\,N$, $Q\,K$ eine Linie von halb so hoher Ordnung, nämlich von der zweiten. Ihre besondere Natur zu erkennen, denke man sich, die Cylinderfläche habe eine solche Lage, daß sie die Kugel in dem Punkte (Y, Y') berühre, ihr Durchmesser aber unverändert und ihre Richtung der früheren parallel geblieben sei. Dann wird die Durchschnittskurve beider Flächen bei Y einen doppelten Punkt erhalten und ihre Horizontalprojektion $M\,Y\,L$ wird aus einem einzigen offenen Aste, also aus einem Parabelbogen bestehen. Da nun durch das Seitwärtsrücken allein die Natur des Durchschnittes und seiner Projektion nicht geändert werden kann, so würden daraus die Bögen $O\,N$, $K\,Q$ als einer Parabel angehörig zu erkennen sein. Den Scheitel S derselben festzusetzen, wollen wir an einem ihrer Punkte die Tangente bestimmen und zwar an einem der vier Punkte O, N, K oder Q, an K z. B. Hier aber stehen die tangirenden Ebenen beider Flächen senkrecht auf der Projektionsebene, und ihr Durchschnitt projicirt sich als der Punkt K, weshalb wir für die Bestimmung der Tangente zur Normalebene des Punktes K greifen, was hier überhaupt der einfachere Weg ist. Allerdings wieder fällt hier die Normalebene mit der Projektionsebene zusammen, doch hat sie in ihr einen ideellen Riß $C\,Z$, auf welchem die Tangente $K\,T$ senkrecht stehen muß. Denn von der Normalen der Kugelfläche, welche durch das Centrum gehen muß, darf behauptet werden, sie müßte die Projektionsebene in C schneiden. Die Normale der Cylinderfläche im Punkte K ist die auf $a\,a$ Senkrechte $K\,Z$, sie muß die Achse der Cylinderfläche schneiden, weshalb Z als ihr Begegnungsort mit der Horizontalebene auftritt und somit der Riß $C\,Z$ gekennzeichnet ist. Im Halbirungspunkte S der Subtangente $T\,Y$ liegt der Parabelscheitel.

476. **Aufgabe.** Auf einer Kugelfläche ist ein Kreis K gegeben, und außerhalb desselben eine gerade Linie G. Der Kreis soll als Basis einer Cylinderfläche genommen werden, deren Erzeugungslinien mit G parallel sind, und man soll den andern Ast des Durchschnittes der zwei Flächen konstruiren.

Determination der Aufgabe. Durch das Centrum der Kugel werde eine Senkrechte auf die Ebene von K gefällt, welche in das Centrum dieses Kreises treffen wird. Durch das Kugelcentrum werde zweitens eine Parallele zu G

gedacht, und durch diese beiden Geraden gehe eine Ebene *P*. Von ihr wird die Ebene *K* nach einer Geraden geschnitten, welche die Richtung eines Diameters hat, und wenn die Ebene *P* als Projektionsebene genommen wird, erscheint jener Diameter zugleich als die Projektion von *K*.

Ausführung. Fig. *340*. *A D B* sei der in der Projektionsebene liegende größte Kugelkreis und *a C a* die Parallele zu *G*, welche durch das Centrum *C* geht; endlich stelle sich der Kugelkreis *K* als die Sehne *A B* dar. Man ziehe durch *A* und *B* Parallelen mit *a a*, so sind dies die in der Projektionsebene liegenden äußersten Erzeugungslinien der Cylinderfläche; die eine kreuzt den gegebenen Kugelkreis nochmals in *D*, die andere in *E* und beide Punkte gehören somit dem zweiten Durchschnittsaste an. Man beschreibe aus *C* einen kleineren Kreis als *A D B*, welcher die Gerade *AB* in *i* und *l* schneidet, durch diese Punkte führe man zu *aa* zwei Parallelen, so werden diese den Kreis nochmals in *k* und *m* schneiden und man hat damit die Projektionen von zwei weiteren Punkten des zweiten Astes; denn der Kreis und die beiden Parallelen sind zu betrachten als die Projektionen von Schnitten der Kugel und des Cylinders durch eine der Projektionsebene parallele Ebene, deren Höhe oder Tiefe jener des Punktes *l* oder *i* gleicht. — Weil alle Kreise unserer Projektion koncentrisch sind, so müssen die unter sich parallelen Sehnen *B E*, *i k*, *l m*, *A D* durch die auf ihnen senkrechten *F C* halbirt werden, wodurch die Projektion *E K D* eine zu *A B* symmetrische Gestalt erhält, also wiederum geradlinig wird. Allerdings mußte dies Ergebniß vorhergesehen werden, denn Kugel und Cylinder hatten bereits einen Kreis *A B* als gemeinsamen Durchschnittsast gegeben und so konnte der zweite Ast nur wiederum als Kreis hervorgehen, der symmetrisch zum ersten bezüglich der Projektionsebene wie der auf ihr senkrechten Ebene *E C* gestellt ist. — In der auf *aa* senkrechten Ebene *X Z* hat man den geraden Schnitt des Cylinders konstruirt und (zur Hälfte) bei *e i' d'* in die Projektionsebene niedergelegt, eine Arbeit, welche der Erläuterung nicht mehr bedürfen wird.

477. Aufgabe. Auf einer Kugelfläche ist ein Kreis *K* gegeben und außerhalb derselben ein Punkt *S*; dieser soll als Scheitel einer Kegelfläche genommen werden, von welcher *K* die Basis, und man verlangt den zweiten Durchschnittsast von Kugel und Kegel.

Determination der Aufgabe. Durch das Centrum der Kugel, das Centrum von *K* und durch *S* läßt sich eine Ebene *P* legen, welche senkrecht auf der Ebene von *K* stehen und die Kreisebene nach der Richtung eines Durch-

messers schneiden wird. Dient nun P als Projektionsebene, so wird K sich auf dieselbe als gerade Linie projiciren.

Ausführung. Fig. 341. $A\,D\,B$ in der Projektionsebene sei ein größter Kugelkreis; $A\,B$ die Projektion des Kreises K und S der gleichfalls in der Projektionsebene liegende Kegelscheitel. Indem A und B mit S verbunden werden, hat man die zwei der Projektionsebene angehörigen äußersten Erzeugungslinien der Kegelfläche. Sie kreuzen den Kreis nochmal in den Punkten E, D, welche somit als auf dem zweiten Durchschnittsast liegend erkannt worden. o sei die Projektion eines beliebigen Punktes auf dem Kreise $A\,B$, $S\,o\,l$ die Projektion einer durch den Punkt gehenden Erzeugungslinie der Kegelfläche. Man dachte sich durch die Erzeugungslinie eine vertikale Hilfsebene gelegt. Diese mußte die Kugel durchschneiden, und zwar nach einem Kreise, wovon $q\,p$ der Durchmesser. Der Kreis ließ sich sofort nach $q\,O''\,p$ in die Projektionsebene niederlegen. Der Punkt, dessen Projektion o, fiel dabei nach O'' ($o\,O''$ senkrecht auf $S\,l$ gezogen); die Erzeugungslinie also kam nach $S\,O''$ zu liegen und kreuzte den umgelegten Kreis nochmals in I'', welches sich, nach Wiederaufrichten der Ebene, nach i projicirte ($I''\,i$ senkrecht auf $S\,l$). In solcher Weise findet man $D\,i\,E$ als Projektion des zweiten Durchschnittsastes der Kegel- und Kugelfläche. Warum diese Projektion geradlinig ausfallen mußte, erklärt sich unschwer; denn weil Kegel und Kugel sich bedinglich nach dem ersten Kreise schneiden sollten, mußte auch ein zweiter Kreis als anderer Ast des gesammmten Durchschnittes erfolgen. Weil endlich, abermals der Grundbedingung zufolge, beide Flächen symmetrisch gegen die Projektionsebene gebildet sind, mußte es auch ihre gegenseitige Durschnittslinie werden, und weil endlich einer der Kreise, woraus dieser Durchschnitt besteht, auf der Projektionsebene senkrecht stand, mußte es auch der andere thun. — $V\,W$ ist eine Vertikalebene, welche gleiche Winkel bildet mit den Geraden $S\,V$, $S\,W$; sie schneidet die Kegelfläche nach einer Ellipse, welche wir (in einer Hälfte) nach $V\,l'\,W$ auf die Projektionsebene umgelegt haben. (Die Erzeugungslinie z. B., deren Projektion $S\,o$, schneidet die Ebene $V\,W$ in einem Punkte, dessen Höhe über l nach Umlegung der Vertikalebene $S\,o$ bei $l\,L''$ gemessen werden konnte, wenn $S\,l\,L''$ ein rechter Winkel.)

478. Durch Umkehrung der Ergebnisse unserer soeben ausgeführten Konstruktion gelangt man zu einem interessanten Satze, welcher übrigens einer näheren Begründung bedarf.

Lehrsatz. Durch zwei auf einer Kugelfläche gegebene Kreise lassen sich im Allgemeinen zwei Kegelflächen legen.

Vorbereitung zum Beweise. C sei das Kugelcentrum und K der erste Kreis; ein Perpendikel aus C auf die Ebene von K geht durch das Centrum dieses Kreises; $\mathfrak{K}$ sei der zweite Kreis, und ein Perpendikel aus C auf die Ebene von $\mathfrak{K}$ geht durch das Centrum dieses Kreises. Wird durch die beiden Perpendikel eine Ebene P gedacht, so steht sie rechtwinklig gegen die Ebene von K und $\mathfrak{K}$ und schneidet dieselbe in der Richtung eines Kreisdurchmessers. Nimmt man schließlich P als Projektionsebene, welche die Kugel nach einem ihrer größten Kreise schneidet, so werde sich darauf K und $\mathfrak{K}$ als Sehne dieses Kreises projiciren.

Wir wollen P als vertikale Projektionsebene annehmen und es sei in dieser Ebene Fig. 342 $D' A' B'$ der größte Kugelkreis, C' deren Centrum und die Sehnen $A' B'$, $D' E'$ die Projektionen der zwei auf der Kugel gegebenen Kreise. Man verbinde die Endpunkte der Sehnen durch die Geraden $A' D'$, $B' E'$, welche sich in S' kreuzen, so ist dies der Scheitel einer Kegelfläche, auf welcher die Kreise $A' B'$, $D' E'$ liegen. In Figur (a), welche gleiche Bedeutung hat mit der vorhergehenden, verbinde man die Endpunkte der Sehnen durch die Geraden $A E$, $B D$, welche sich in S'' kreuzen, so ist dies der Scheitel einer zweiten Kegelfläche, welcher durch die zwei Kreise $A B$, $D E$ geht und deren Scheitel zwischen ihnen liegt, während er vorher seinen Ort jenseits des kleineren von beiden gefunden.

Den Beweis dieses Satzes führen wir zunächst für den letzten Fall und nehmen $E' D' X'$ als horizontale Projektionsebene. Den Kreis $E' D'$ oder K verzeichnen wir darin nach seiner wahren Gestalt bei $E R D$. $E D$ ist der zur Vertikalebene parallele Durchmesser desselben. Der Kreis $A' B'$ oder $\mathfrak{K}$ projicirt sich in die Horizontalebene als die Ellipse $b p a$, deren kleine Achse $b a$ auf $E D$ liegt und deren große Achse dem Durchmesser $A' B'$ gleicht. Nun sind bei (a, A') und (D, D') die Tangenten beider Linien unter sich parallel und stehen senkrecht gegen die Vertikalebene, sie liegen also selbst in einer Ebene, welche beide Kreise tangirt und deren beide Risse die Geraden $D D'$, $D' S'$ sind. Gleicherweise verhält es sich mit den Tangenten der Punkte (b, B'), (E, E'), sie liegen in einer tangirenden Ebene $E E' S'$ beider Kreise. Man lasse eine der beiden Ebenen, oder beide gleichzeitig, so um die Kreise gleiten, daß sie dieselben stets tangiren, so erzeugen diese Ebenen durch ihre aufeinanderfolgenden Durchschnitte jedenfalls eine aufwickelbare krumme Fläche (§. 270) und die Geraden, wie ($D a$, $D' A S'$), ($E b$,

$E' B' S'$), welche zwei Berührungspunkte einer und derselben Ebene verbinden, sind Erzeugungslinien der aufwickelbaren Fläche.

Werden wir bewiesen haben, daß diese Erzeugungslinien sich alle auf einer und derselben geraden Linie durchschneiden, so darf auch geschlossen werden, daß sie sich alle in einem einzigen Punkte dieser Linie kreuzen, weil nur alsdann die entstandene Fläche aufwickelbar sein kann, was sie, als durch die Bewegung einer Ebene hervorgebracht, unbedingt sein muß. Daß sich aber die zwei vorhin genannten Geraden in einem Punkte (S', S) schneiden müssen, folgt daraus, daß sie der Vertikalebene DE angehören. Man verlängere die Ebene $B' A'$, bis sie die Horizontalebene $E' D'$ schneidet, so ist die auf $E' D'$ senkrechte Gerade $X' X$ der Horizontalriß dieser Ebene. Nachdem ED bis X verlängert worden, ziehe man aus X an den Kreis ERD die Tangenten und verbinde deren Berührungspunkte R, R', so schneidet die Gerade RR' auf ED den Punkt Q ab, welches der Pol ist der Geraden XX' (§. 367). Aus X ziehe man auch die Tangenten an die Ellipse bwa und verbinde deren Berührungspunkte p, p' durch eine Gerade, welche auf ba den Pol π der Ellipse bezüglich der Polarlinie XX' abschneiden wird (nachdem der Kreis $A' B'$ bei $A' p'' B'$ auf die Vertikalebene umgelegt und die Tangente $X' p''$ an denselben gezogen worden, fällt man aus dem Berührungspunkte p'' auf $A' B'$ den Perpendikel $p'' p'$, projicirt p' nach π und nimmt die Ordinate $\pi p = p' p''$). Die Verbindungslinie der beiden Pole (Q, q'), (π, p') liegt in der Ebene ED und schneidet die in derselben Ebene liegenden zwei geraden Erzeugungslinien. (w, W') sei ein beliebiger Punkt des oberen Kreises K; man ziehe in dem Punkt an den Kreis die Tangente (wZ, $W' X'$), welche in Z auf der Geraden XX' die Horizontalebene durchdringen wird; aus Z ziehe man die zweite Tangente (Zx, $X' W'$) an den Kreis K und die beiden Tangenten ZU, ZV an den Kreis K. Jedes Tangentenpaar gehört einer tangirenden Ebene beider Kreise an und die Berührungspunkte (U, U'), (w, W'), sowie (V, v'), (x, x') bestimmen zwei Erzeugungslinien der aufwickelbaren Fläche. Aber die Sehne UV muß durch den Pol Q gehen, die Sehne wx durch den Pol π, und weil beide Pole der gleichen Polarlinie entsprechen, sich auf denselben $DabE$ projiciren, so müssen sich die verlängerten Sehnen in einem Punkte Y auf $X' X$ kreuzen; sie liegen also in einer Ebene, und in derselben Ebene liegt nicht nur die Gerade ($Q\pi$, $q' p'$), sondern auch jede der zwei Geraden (Vx, $v' x'$), (Uw, $U' W'$), welche drei sich darum selbst schneiden müssen. Alle Erzeugungslinien der aufwickelbaren Fläche schneiden somit die Gerade

$(Q\pi, q'p')$; sie können es aber nur in dem gleichen Punkte dieser Geraden thun, und die fragliche aufwickelbare Fläche ist eine konische Fläche. Eine gleiche Argumentation findet auch statt bei jener aufwickelbaren Fläche, welche dadurch erzeugt wird, daß die beiden Kreise stets auf entgegengesetzten Seiten durch die mobile Ebene tangirt werden. Dadurch ist angezeigt, daß auch diese andere Fläche eine Kegelfläche sei, deren Scheitel, wie S'', Fig. (a), zwischen beiden Kugelkreisen K und K liegt.

479. Zu dem Zwecke, die Verschiedenheit der Methoden geometrischer Untersuchung hier nochmals hervorzuheben, stellen wir dem vorangehenden indirekten Beweise einen dritten zur Seite, welcher mittelst einer kleinen Rechnung geführt wird, die auf den Satz der Elementargeometrie sich gründet, daß in einem Halbkreise $A'p''B'$, Fig. *342*, die Ordinate $p'p''$ mittlere Proportionale sei zwischen den Segmenten $A'p'$ und $B'p'$ des Durchmessers $A'B'$. Es sei nun die Vorbereitung wie zuvor gemacht, so handelt es sich darum, zu zeigen, daß, wenn S als Scheitel und der Kreis $A'B'$ als Basis einer Kegelfläche genommen wird, diese von der Ebene $D'E'$ nach dem Kreise $D'E'$ geschnitten werde, und der Beweis wird geführt sein, wenn nachgewiesen worden, daß irgend ein zu $D'E'$ paralleler Schnitt der Kegelfläche ein Kreis sei. Man denke sich durch einen beliebigen Punkt auf dem Kreise $A'B'$, dessen Projektion W' sein mag, eine Ebene parallel zu $D'E'$, diese sei durch MN Fig. (a) dargestellt. (Wir haben in dieser Figur nur die Accente an den Buchstaben unterdrückt.) Insofern der Punkt W dem Kreise AB angehört, kommt er durch Umlegung des Kreises nach J'' zu liegen und dann läßt sich die Proportion bilden $AW : WJ'' = WJ'' : BW$, woraus, indem man die Ordinate WJ'' einfach mit J bezeichnet, die Gleichung entsteht $J^2 = AW \times BW$. (1)

Man betrachte die Figur $AMWBN$ rein als zwei Scheiteldreiecke AWM, BWN bildend, so sind diese unter sich gleichwinklig, also ähnlich, denn die Scheitelwinkel bei W sind gleich, und wegen des Parallelismus von NM und DE ist der Winkel $WNB = DEB = WAM$, indem von letztern zwei ein jeder zu seinem Maße den halben Bogen DAB hat. Aus der Aehnlichkeit von AWM und BWN folgt aber $AW : WM = WN : BW$, oder $AW \times BW = MW \times NW$ ... (2). Aus (1) und (2) also $MW \times NW = J^2$. Es ist somit die Ordinate WJ'' auch mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten MW und NW, was nur statt haben kann, wenn der Schnitt der Kegelfläche und der Ebene MN die Kreisform hat. — Es begreift sich, daß mittelst eines Schnittes, welcher

parallel zu AB durch einen Punkt von DE gelegt worden, der gleiche Beweis geführt werden konnte, so wie er geführt wird zum Nachweis, daß die Kegelfläche, welche in S'' ihren Scheitel hat, und einer der zwei Kreise AB oder DE zur Basis mit ihrem zweiten Flächennetze auch durch den andern Kreis gehe.

Wenn sich die beiden Kreise K und K auf der Kugelfläche kreuzen, wie in Fig. 341, dann liegt der Scheitel einer der beiden fraglichen Kegelflächen in S und der andern in der Kreuzung von AD und EB, aber gleichfalls außerhalb der Kugel. Endlich giebt es nur eine einzige Kegelfläche, welche durch die zwei Kugelkreise gelegt werden kann, in dem Falle nämlich, wenn die beiden Kreise, wie AB und AD der Figur (b), sich in einem Punkte A berühren. Hier liegt der Scheitel S dieser Fläche in der Kreuzung von DB mit der Kreistangente des Punktes A. Haben aber die Kreise K, K gleich große Durchmesser, wie AB und DE in Fig. 340, dann müssen die Verbindungspunkte der Endpunkte A und D, E und B unter sich parallel sein, und die Kegelfläche verwandelt sich jetzt in eine Cylinderfläche, welche durch die gleich großen Kugelkreise geht. Jedoch ist dabei immer noch eine Kegelfläche von gleicher Eigenthümlichkeit möglich, deren Scheitel im Durchschnitt von EA und BD läge.

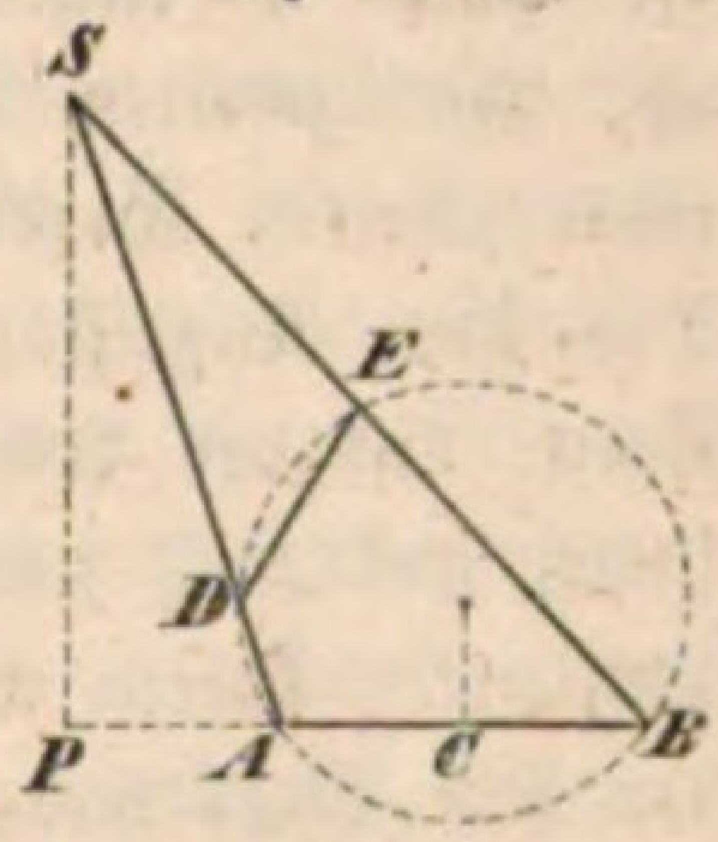
480. Einige weitere Entwickelungen. Ohne auf das allgemeine, für alle Flächen zweiter Ordnung gültige Gesetz zurückzugreifen, welches wir in §. 429 citirt, ist durch den Lehrsatz von §. 478 für den besonderen Fall des Durchschnittes einer Kugel- mit einer Cylinder- oder Kegelfläche bewiesen, daß, wenn die Durchschnittslinie derselben aus zwei geschlossenen Aesten besteht, deren einer cirkulär ist, es auch der andere sei.

Man stelle sich eine schiefe, kreisrunde Kegelfläche vor, fälle aus ihrem Scheitel auf die Basisebene einen Perpendikel und lege durch diesen wie durch das Kreiscentrum eine Ebene P, welche die Kegelfläche nach zwei geraden Linien schneiden wird; diese Geraden bilden zusammen Dasjenige, was ältere Mathematiker den Hauptschnitt (sectio principalis) der schiefen Kegelfläche nannten. Es sei AB, Fig. 347, die Projektion eines Kreises, dessen Centrum C in der Projektionsebene liegt; derselben Ebene gehöre auch der Scheitel S einer schiefen Kegelfläche, von welcher der Kreis die Basis. Bei dieser Voraussetzung liegen der Perpendikel SP auf der Basisebene, sowie die Achse SC gleichfalls in der Projektionsebene, und ASB ist der Hauptschnitt der Kegelfläche. Auf einer Seite dieses Schnittes ward ein Punkt D willkürlich genommen und durch ihn eine Gerade DE der Art gezogen,

daß der Winkel EDS gleich dem Winkel ABS ward, also auch der Winkel $DES = BAS$.

Betrachtet man DE als die Projektion einer auf der Ebene des Hauptschnittes senkrecht stehenden schneidenden Ebene, so behaupte ich, der Schnitt dieser Ebene und der Kegelfläche sei wiederum kreisförmig. Denn der Konstruktion zufolge ist der Winkel ADE das Supplement von ABS, und um das Viereck $ADBE$ läßt sich ein Kreis beschreiben. Betrachtet man diesen als größten in der Projektionsebene liegenden Kreis einer Kugel, so gehört der Kreis AB und darum auch der Kreis vom Durchmesser DE dieser Kugel an, und auf der Kegelfläche, deren Scheitel in S, liegen gleichzeitig die beiden Kreise (§. 478). Alle zu AB oder zu DE parallelen Schnitte der schiefen Kegelfläche sind deshalb kreisförmig. In Bezug auf den Kreis AB nannte man den Kreis DE einen antiparallelen Schnitt (auch sectio subcontraria) der schiefen Kegelfläche.

Fig. 347.



In Fig. 340 bilden die Geraden AD, BE den Hauptschnitt der schiefen Cylinderfläche, von welchem der Kreis AB die Basis und der Kreis DE ein antiparalleler Schnitt ist; man sieht, daß die Ebenen der Kreise mit den Geraden des Hauptschnittes nach entgegengesetzten Seiten hin gleiche Winkel BAD und EDA bilden.

481. Anhang. Lehrsatz. Bewegen sich zwei unter sich rechtwinklig verbundene Ebenen dergestalt, daß sie immer durch die Schenkel eines festen Winkels gehen, dann beschreibt die gerade Durchschnittslinie der zwei Ebenen eine schiefe Kegelfläche.

SF, SQ, Fig. 344, seien die Schenkel eines solchen Winkels; durch jeden Schenkel geht eine Ebene, der Art, daß beide gegeneinander senkrecht stehen; SV sei auf der Winkelebene die Projektion der Durchschnittslinie D beider Ebenen. In einem beliebigen Punkt H des einen Schenkels SF denkt man sich eine vierte Ebene rechtwinklig gegen genannte Durchschnittslinie gelegt, so wird die auf SV senkrechte Gerade HG der Riß dieser vierten Ebene sein. Sie schneidet die zwei rechtwinkligen Ebenen nach zwei wiederum unter sich senkrechten Geraden, welche sich auf der Durchschnittslinie D in einem Punkte P schneiden. Dadurch entstehen im Raume drei rechtwinklige Dreiecke, deren gemeinsame Spitze der Punkt P, und welche

als Grundlinien die Geraden SH, GH, SG haben. Denkt man sich das erste dieser Dreiecke um seine Hypotenuse SH gedreht, um in die Projektionsebene niedergelegt zu werden, dann muß dessen Spitze P irgendwo auf den über SH als Durchmesser beschriebenen Kreis fallen. Durch Rotation dieses Kreises um SH als Achse entsteht eine Kugelfläche, auf welcher die Spitze P liegen muß. Aehnlicherweise erkennt man, daß diese Spitze, als dem zweiten Dreiecke angehörig, wovon GH die Hypotenuse, auch einer zweiten Kugelfläche angehöre, von welcher dies GH ein Durchmesser. Die zwei Kugelflächen schneiden sich gegenseitig nach einem Kreise, dessen Ebene auf der Winkelebene senkrecht steht und sich darauf als die gemeinsame, auf SQ senkrechte Sehne HK der größten Kugelkreise HKG, SKH projicirt. Allein welche Lage im Raume die Durchschnittslinie D und somit der Riß GH haben mag, so lange H unverändert bleibt, wird dies auch bei K der Fall sein, und dieser Durchschnittspunkt der beiden Kreise auf der Geraden SQ liegen, weil HKG und SKH immer rechte Winkel und darum die drei Punkte S, K, G stets in gerader Linie. Aus der Unveränderlichkeit der Sehne HK folgt auch die Unveränderlichkeit des Durchschnittskreises der zwei Kugelflächen, welche Lage die Gerade D und der auf ihrer Projektion SV senkrechte Riß GH habe. Dieser Kreis ist daher auch der geometrische Ort des gemeinsamen Scheitels aller rechtwinkligen Dreiecke, welche als Hypotenuse entweder die beständige Gerade SH oder die veränderliche Gerade HG haben; und er erscheint als die Basis einer Kegelfläche, deren Erzeugungslinie zugleich die Durchschnitte D der zwei rechtwinkligen, zwischen den Schenkeln des Winkels FSQ sich bewegenden Ebenen sind. — Anstatt auf SF, hätte man den festen Punkt H auch auf dem Schenkel SQ nehmen können und dann auf gleiche Weise bewiesen, daß die Durchschnittslinie D eine schiefe Kegelfläche beschreibe, deren Basis auf der Seite SF senkrecht steht. Diese Kegelfläche besitzt somit gleich allen konischen Flächen zweiter Ordnung das Eigenthümliche, durch zwei Systeme paralleler Ebenen nach Kreisen geschnitten zu werden, nur stehen in diesem besondern Fall die Ebenen der antiparallelen Schnitte senkrecht auf den Seiten SF und SQ des Hauptschnittes.

482. Ein Wort über die stereographische Projektion der Kugel. Zu geographischen Zwecken denkt man sich auf der Erdkugel Meridiane und Parallelkreise gezogen, und ein terrestrischer Ort ist der Lage nach bestimmt, wenn der Meridian- und Parallelkreis gegeben wird, in deren Durchschnitt der Punkt liegt. Das Gerippe oder Netz einer jeden geogra-

phischen Karte besteht aus einem Linienschema, wodurch auf der Kartenfläche die Erdmeridiane und Parallelen dargestellt sind. Wir haben bei Gelegenheit der Aufwickelung krummer Flächen einiger solcher Netze Erwähnung gethan, und sprechen hier von derjenigen geographischen Projektionsart, welche bei Darstellung ganzer Erdhälften angewendet zu werden pflegt. Solche Darstellungen nennt man Weltkarten, und es liegt ihnen eine perspektivische Projektion zu Grunde mit folgenden Modalitäten. Eine terrestrische Halbkugel mit den auf ihr gezogenen oder gedachten Kreisen ist der Gegenstand, welcher projicirt werden soll; als Projektionsebene dient die Ebene des größten Kreises, welcher die Halbkugel begränzt, und das Auge ist im Pol dieses Kreises, d. h. da, wo eine im Kugelcentrum auf die Kreisebene errichtete Senkrechte die entgegengesetzte Halbkugel schneidet. — Denkt man sich auf der darzustellenden Halbkugel irgend einen Kreis verzeichnet, und aus dem Auge die projicirenden Linien nach seinem Umfange, so bilden diese eine meist schiefe Kegelfläche, welche mit der Kugel einen Kreis gemein hat, und ihr Durchschnitt mit der Halbkreisebene ist die perspektivische, oder, wie man hier sagt, die stereographische*) Projektion des Kugelkreises auf der größten Kreisebene. Wir wollen zuerst den Satz demonstriren, daß die stereographische Projektion eines jeden Kugelkreises wiederum ein Kreis sei.

Als Vorbereitung zum Beweise denke man sich aus dem Centrum der Kugel einen Perpendikel auf die größte Kreisebene gelegt, welche als stereographische Bildfläche oder Projektionsebene dienen soll, zweitens einen Perpendikel auf den zu projicirenden Kugelkreis, und lege durch beide Perpendikel eine Ebene, welche als gewöhnliche Projektionsebene dient und auf welcher die genannten beiden Kreise sich als gerade Linien projiciren werden. — Dies ist in Fig. *345* zu Grunde gelegt. Das Centrum C und der größte Kugelkreis $A\,E\,B$ liegen in der Projektionsebene, der Durchmesser $A\,C\,B$ sei die Projektion desjenigen größten Kreises, dessen Ebene als stereographische Projektionsebene genommen werden soll; $C\,P$ ein Perpendikel auf den Kreis $A\,B$, also P der Pol dieses Kreises, oder der Ort des Auges. $D\,E$ die Projektion des Kugelkreises, welcher von P aus in die Ebene $A\,B$ projicirt werden soll. Sein Centrum f muß gleichfalls der Projektionsebene

*) Mit den älteren Ausdrücken in der Geometrie muß man es der Bedeutung nach nicht sehr genau nehmen, denn die fragliche Projektionsart ist um nichts mehr stereographisch, d. h. körperdarstellend, als jede Art von Projektion.

angehören und Cf ist der aus C auf seine Ebene gefällte Perpendikel. Alle Geraden, welche als projicirende Linien die Punkte des Kreises DE mit dem Pole P verbinden, bilden eine schiefe Kegelfläche, von welcher DPE der Hauptschnitt (§. 478). Der Durchschnitt dieser Kegelfläche und der Ebene AB, welcher die Gerade OQ als gewöhnliche Projektion hat, dieser Schnitt, sage ich, ist die verlangte stereographische Projektion des Kreises DE und wiederum kreisförmig.

Nun wolle beachtet werden, daß der Winkel CQP, welchen die Ebene AB mit der Seite PD bildet, gleich ist dem Neigungswinkel DEP der Ebene DE gegen die Seite PE, weil jeder dieser zwei Winkel zu seinem Maße den halben Quadranten AP oder BP hat, mehr den halben Bogen DB. DE und OQ geben sich somit als die Projektionen antiparalleler Schnitte der schiefen Kegelfläche zu erkennen und sind einer wie der andere kreisförmig.

Zusatz. Man wird in unserer Fig. 345 einen besondern Fall des Satzes erkennen, auf welchen sich Fig. 342 bezieht, den Fall nämlich, daß einer der zwei Kreise $A'B'$, $D'E'$, durch welche die schiefe Kegelfläche gelegt werden soll, sich auf einen Punkt der Kugelfläche reducirt.

Zweiter Zusatz. Stereographisch kann die ganze über der Ebene AB, Fig. 345, befindliche Halbkugel in diese Ebene projicirt werden.

Eine zweite Eigenthümlichkeit der stereographischen Projektion begnügen wir uns hier nur historisch anzuführen; sie besteht darin, daß der Winkel, unter welchem zwei auf der Kugel gegebene Linien sich schneiden, in der stereographischen Projektion dieser Linien unverändert bleibt.

483. Je nach der terrestrischen größten Kreisebene, welche als stereographische Bildfläche zu dienen hat, erhalten die bezüglichen Darstellungen eigene Namen. Zur Darstellung der nördlichen oder südlichen Erdhälfte wird dieselbe auf die Ebene des Aequators projicirt und der Süd- oder Nordpol ist dabei der Ort des Auges. Die Darstellung heißt stereographische Aequatorial-Projektion. — Die westliche oder östliche Erdhälfte darzustellen, wird die Ebene des ersten Meridianes (gewöhnlich der Meridian der Insel Ferro 20° westlich vom Pariser Meridian) als Bildfläche genommen und der Pol dieser Projektion ist jener Punkt des Aequators, wo er von dem Perpendikel aus dem Erdcentrum auf die Ebene des ersten Meridians geschnitten wird. Solche Darstellungen heißen Projektionen auf den Meridian. Dient endlich als Bildfläche jene größte Kreisebene, welche parallel ist zu dem Horizonte

eines Ortes von gegebener Polhöhe, so nennt man die Darstellung eine stereographische Horizontalprojektion.

Wir wollen die stereographische Projektion auf den Meridian, als am meisten vorkommend, in Fig. *346* etwas näher erklären.

Den Kreis *POP'O*, welcher als Meridian genommen wird, theilt man durch die Senkrechte *PP'* und die Wagrechte *OO* in vier gleiche Theile. Das Auge oder der projektive Pol befindet sich an dem hinteren Ende desjenigen Kugeldurchmessers, welcher sich als das Centrum *A* projicirt. *OO* ist darum die Projektion des Aequators, *P*, *P'* sind Nord- und Südpol und die Gerade *PP'* die Projektion jenes Meridianes, dessen geographische Länge 90° beträgt. Jeder Quadrant des ersten Meridianes wird in 90 Grade getheilt, wovon wir die Theilpunkte für 30° und 60° der Breite angeben.

Projektion der Parallelen. Weil der erste Meridian in der Projektionsebene liegt, gehören seine Theilpunkte den entsprechenden Parallelen an, und da ihre stereographische Projektion wiederum kreisförmig ist, bedarf es nur noch eines Punktes zum Feststellen dieser Projektion. Hierzu denkt man sich den Meridian von 90° Länge, dessen Projektion *PAP* ist, um den Durchmesser *PP'*, als Charnier gedreht, sodaß seine vordere Hälfte mit seiner Theilung nach rechts auf *POP'* fällt, dann wird das mit umgedrehte Auge nach *O* links zu liegen kommen, und indem man die projicirenden Gegenden *O30*, *O60* ꝛc. zieht, schneiden diese in *e*, *f* auf *PP'* die dritten Punkte für die Projektion der Parallelen von 60° und 30° der Breite ab.

Projektion der Meridiane. Sie gehen alle durch *P* und *P'* und es bedarf für jede wiederum nur eines dritten Punktes. Diesen zu erhalten, denkt man sich den Aequator mit seiner Theilung um den Diameter *OO* gedreht, sodaß seine vordere Hälfte nach *OP'O* fällt; dann wird das mit der Aequatorebene mit umgedrehte Auge nach *P* zu liegen kommen, und die projicirenden Linien *P60*, *P30* schneiden auf *OO* die dritten Punkte *c*, *d* für die Projektionen der Meridiane von 30°, 60° ... ꝛc. der Länge ab.

Die Konstruktion der Mittelpunkte geschieht, wie man das Centrum eines Kreises festsetzt, welcher durch drei gegebene Punkte geht. Diese Konstruktion vereinfacht sich im vorliegenden Falle, wenn man die Eigenthümlichkeit der stereographischen Projektion benutzen will, daß die Winkel, welche zwei Linien auf der Erdkugel unter sich bilden, auch in der Projektion die gleichen bleiben.

Mittelpunkt der Parallelen. Sie kreuzen auf der Kugel alle Meridiane rechtwinklig, daher müssen auch die Bögen *60e60*, *30f30* bei

60, *30* mit dem ersten Meridian rechte Winkel bilden. Der Radius *A 30* (linker Hand) ist daher im Punkte *30* Tangente des Bogens *30 f 30* und der Mittelpunkt dieses Bogens liegt auf der verlängerten *PP'*, da, wo er von der Tangente des ersten Meridianes im Punkte *30* geschnitten wird.

Mittelpunkt der Meridiane. Der Meridian, dessen Projektion *PcP'*, bildet mit dem ersten Meridian einen Winkel von 30°. Zieht man daher die Tangente *Pm* des ersten Meridianes und die Gerade *P30*, so bilden diese unter sich einen Winkel, welcher zu seinem Maße den halben Bogen *P30*, nämlich einen Bogen von 60° hat, also ein Winkel von 30° ist, und die Gerade *P30* muß Tangente sein an dem Bogen *PcP'*. Sein Mittelpunkt wird also auf der verlängerten Geraden *OO* durch den Perpendikel abgeschnitten, welchen man in *P* auf die Gerade *P30* errichtet.

Anmerkung. Die kleinen Vierecke, welche durch die Projektionen von je zwei aufeinanderfolgenden Meridianen und Parallelen gebildet worden, sind rechtwinklig wie auf der Kugel selbst, und dies ist eine sehr schätzbare Eigenthümlichkeit der stereographischen Projektionsart, welche dagegen von dem Uebelstand begleitet ist, daß jene Vierecke im Centrum der Karte stark zusammengedrückt erscheinen im Vergleich mit denjenigen am Umfange. Uebrigens giebt es keine Projektionsart geographischer Karten, welche nicht mit dem einen oder andern ähnlichen Mißstande behaftet wäre.

Bedeutung des gegenseitigen Durchschnitts krummer Flächen im geometrischen Sinne.

484. Eine Aufgabe und Forderung, welche sich durch das ganze Gebiet der Geometrie hinzieht und welche bei deren Anwendung in den mannichfachsten Gestalten auftritt, läßt sich, abstrakt aufgefaßt, also ausdrücken: man soll im Raume den Ort eines Punktes bestimmen, dessen Lage gewissen Bedingungen Genüge zu leisten hat.

Eine Bedingung aber, womit man die Lage eines Punktes in Verbindung bringt, führt in der Regel darauf, daß sich eine ebene oder krumme Fläche, überhaupt also eine Fläche, zu erkennen giebt, auf welcher der Punkt zufolge jener Bedingung liegen muß. Wir wollen von einem einfachsten Falle ausgehen und verlangen, der Punkt solle von einem andern als bekannt angenommenen Punkte *P* eine Entfernung gleich der Größe *a* haben. Diese Bedingung nun läßt sich sogleich dahin umschreiben, daß man verlangt, der Punkt solle auf einer Kugelfläche liegen, von welcher *P* das Centrum und deren Radius gleich *a* ist. Denn alle Punkte der Kugel haben

diese Entfernung von P, und nur den Punkten der Kugelfläche kommt eine solche Entfernung zu, indem alle innerhalb der Kugel liegenden Punkte näher bei P sich befinden, als a, und alle Punkte außerhalb der Kugel weiter von jenem Centrum, als a angiebt.

Eine zweite gleichartige Bedingung versetzt den Punkt auf eine zweite Fläche, deren Beschaffenheit vorerst nicht näher ins Auge gefaßt werden mag. Wenn aber der Punkt gleichzeitig auf den zwei verschiedenen Flächen liegen soll, so muß er nothwendig den Durchschnittslinien dieser Flächen angehören. Seine Lage endgiltig festzustellen, muß somit zu den beiden ersten Bedingungen noch eine dritte sich gesellen, wodurch eine dritte Fläche zu erkennen gegeben wird, auf welcher der Punkt abermals gelegen sein muß. Alledem zufolge findet der Punkt seinen Ort in dem Durchschnitte der drei Flächen. Ein solcher besteht aber aus den Durchschnittslinien der Flächen paarweise genommen, nämlich aus dem Durchschnitte der ersten und zweiten Fläche, dem Durchschnitte der ersten und dritten und dem Durchschnitte der zweiten und dritten Fläche. Wenn auf einer der Flächen, z. B. auf der dritten, sich deren Durchschnittslinien mit den zwei ersten in einem Punkte kreuzen, so gehört dieser Punkt gleichzeitig allen drei Flächen an, durch ihn muß auch die gegenseitige Durchschnittslinie der beiden ersten Flächen gehen und er ist der zu bestimmende Punkt. In dem besonderen Falle, wenn die drei Flächen **ebene** Flächen sind, können ihre drei geraden Durchschnittslinien nur in einem einzigen Punkte sich kreuzen, in demjenigen nämlich, wo die gerade Durchschnittslinie der zwei ersten Ebenen die dritte durchdringt. Sind aber krumme Flächen unter den drei gegebenen, oder sind dies nur krumme Flächen, dann können die drei aus ihrem paarweisen Durchschneiden hervorgegangenen Linien in mehr als in einem Punkte sich kreuzen; ein jeder solcher Kreuzungspunkt entspricht völlig den gestellten Bedingungen der Lage, und um einen bestimmten von ihnen zu bezeichnen, wird es nöthig, noch solche Merkmale beizufügen, wie sie durch die Adverbien der Lage, als oben, unten; links, rechts; diesseits, jenseits u. s. w., an die Hand gegeben werden.

Wir sehen hier einen Einwand voraus, welcher gegen die Giltigkeit der vorstehenden Behauptung erhoben werden dürfte. In der Elementargeometrie nämlich gilt der Ort eines Punktes für bestimmt, wenn man zwei gerade Linien kennt, welche in ihm sich kreuzen. Dies ist unzweifelhaft richtig, und ein Feldmesser, welcher den topographischen Plan einer Gegend aufnimmt, setzt die Punkte dieses Planes kaum in einer andern Weise fest, als daß er für jeden dieser Punkte zwei sich in ihm kreuzende gerade Linien

bestimmt. Es wolle aber bedacht werden, daß hier eine Ebene, in welcher die zwei geraden Linien sich kreuzen, bei dem Feldmesser also die Ebene seiner Karte, stillschweigend als voraus gegeben betrachtet wird, und daß von jeder der zwei geraden Linien angenommen werden darf, sie sei aus dem Durchschnitte jener ersten Ebene mit einer andern hervorgegangen, und wiederum entstehen die geodätischen geraden Linien auf der Karte des Feldmessers in keiner andern Weise: er erhält sie als die Durchschnitte seiner Kartenfläche mit gewissen vertikalen Ebenen, ähnlich wie wir in unserm Lehrgange die Horizontalprojektionen von geraden Linien betrachten und bestimmen, als die Durchschnitte der Projektionsebene mit den projicirenden Ebenen der geraden Linien im Raume.

Daß die Lage eines Punktes im Raume bestimmt sei, wenn man im Stande ist, zwei gerade oder krumme Linien anzugeben, auf denen er gleichzeitig liegt, auch dieser Fall führt, näher besehen, wieder auf unsere erste Anschauungsweise. α und β seien die zwei Linien, welche sich in dem Punkte P kreuzen, so kann doch stets angenommen werden, daß α hervorgegangen sei aus dem Durchschnitte zweier Flächen V und W, β aus dem Durchschnitte zweier andern Flächen U und Z, möglicherweise auch aus dem Durchschnitt von V oder W mit U oder Z, gerade wie für uns die Gestalt und Stellung einer Linie im Raume aus dem Durchschnitt ihrer zwei projicirenden Flächen resultirt.

485. *Fortsetzung.* Indem wir uns auf unsere eigenen Methoden berufen, den Nachweis zu führen, daß das Bestimmen der Lage eines Punktes im Raume stets auf die Betrachtung des gegenseitigen Durchschnittes dreier Flächen führe oder dahin zurück geführt werden könne, dürfen wir selber nicht unterlassen, auf den ersten Satz unseres ganzen Lehrgebäudes zu verweisen, welcher da lautet: die Lage eines Punktes im Raume ist gegeben vermittelst seiner Projektionen auf zwei verschiedenen Ebenen. Daß hier nicht nur zwei Ebenen in Betracht kommen, sondern noch die ganze geometrische Vorarbeit des Projicirens des gegebenen Punktes in jede der zwei Ebenen, leuchtet ein. Indem wir vorerst nur die rechtwinklige Projektion im Auge halten, sind mit den Projektionen eines Punktes auch seine Abstände von beiden Projektionsebenen gegeben. Sobald nun die Projektionen hinweggenommen werden, genügen diese Abstände allein nicht mehr zur Bestimmung der Lage des Punktes im Raume. Allgemein gesprochen: X bezeichne die erste Projektionsebene oder überhaupt eine Ebene, von welcher angenommen wird, daß ihre Stellung im Raum eine

bekannte sei, und a sei der Abstand des Punktes P von der Ebene X. Sind nun X und a als Bestimmungselemente für die Lage von P gegeben, und ist über die Richtung von a, ob links oder rechts von X, ob diesseits oder jenseits dieser Ebene, nichts näher gesagt, so versetzt man den Punkt dadurch auf eine von den zwei Ebenen, welche zu beiden Seiten von X, in einem Abstande gleich a, parallel mit dieser Ebene gestellt werden können. Denn jeglicher Punkt in einer von diesen Ebenen hat einen Abstand von X gleich der Größe a, und alle Punkte außerhalb der beiden Ebenen haben andere Abstände von X. Y bezeichne eine zweite Ebene von bekannter Stellung, doch nicht parallel mit X, und b sei der Abstand des Punktes P von diesem Y, abermals ohne nähere Bezeichnung derjenigen Seite von Y, auf welcher P zu nehmen sei, so ist durch Angabe von Y und b ausgesprochen, daß der Punkt auch in einer von den zwei Ebenen liegen müsse, welche beiderseits von Y in einem Abstande gleich b parallel zu dieser Ebene gelegt werden können. Indem beide Angaben gleichzeitig zur Geltung kommen, hat dies zur Folge, daß der fragliche Punkt P nur auf einer der vier Parallellinien liegen könne, nach welchen die genannten zwei Paare paralleler Ebenen sich gegenseitig schneiden. Die Lage von P auf einer der vier Parallelen durch gleichartige Bedingungen schließlich zu bestimmen, bedarf es der Einführung einer dritten festen, zu keiner der vorigen parallelen Ebene Z und des Abstandes c, welchen P von dieser Ebene hat. Hiernach erkennt man, daß P auch ein Punkt jener zwei weiteren Ebenen sein müsse, welche parallel mit Z diesseits und jenseits von ihr in einem Abstande gleich c gelegt werden. Jede der beiden neuen Ebenen schneidet die vier vorigen Parallelen in vier Punkten, womit acht Punkte gekennzeichnet sind, deren jeder von X einen Abstand gleich a, von Y einen Abstand gleich b und von Z einen Abstand gleich c hat, und sie sind die einzigen im Raume, welche gleichzeitig diese Abstände haben. — Wird bei Angabe des Abstandes a auch noch die Seite von X bezeichnet, auf welcher dieser Abstand zu nehmen ist, so entfällt die Inbetrachtnahme von einer der zwei mit X parallelen Ebenen, und wenn Aehnliches in Betreff der Entfernungen b, c geschieht, bleiben schließlich nur drei, je mit X, Y, Z parallele Ebenen zur Konstruktion zu ziehen, welche sich in einem einzigen Punkte P kreuzen, der die gegebenen Abstände von den drei nicht parallelen Ebenen, jede nach der verlangten Seite hin, hat.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal die sechs, paarweise mit X, Y und Z parallelen Ebenen: jedes Paar schneidet sich mit jedem der beiden

andern Paare nach vier Parallellinien und die zwölf Geraden kreuzen sich zu drei und drei in den vorhin genannten acht Punkten.

Werden die zwölf Geraden durch diese Punkte begränzt, dann erscheinen sie als die zwölf Kanten eines schiefwinkligen Parallelepipeds, welches sich zum rechtwinkligen Parallelepipedum gestaltet, im Falle die drei Ebenen X, Y, Z paarweise rechtwinklig gegeneinander stehen. Zwei unter sich parallele Ebenen dürfen dem Systeme der Flächen zweiter Ordnung beigezählt werden, denn sie theilen mit diesen das kardinale Merkmal, von einer geraden Linie in zwei Punkten geschnitten werden zu können, nur in zwei Punkten; und so zeigt das vorige Ergebniß des Durchschneidens der drei Paare paralleler Ebenen, daß überhaupt drei paarweise sich durchschneidende Flächen zweiter Ordnung acht Punkte mit einander gemein haben können, eine Zahl, die sich allerdings unter Umständen bis auf 1 und selbst auf 0 reduciren läßt.

486. Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume vermittelst seiner Abstände von gegebenen festen Punkten. Jede einzelne Bedingung, wodurch die Lage eines Punktes im Raume bezeichnet werden soll, führt im Allgemeinen zu der Vorstellung einer Fläche, welcher der Punkt zufolge dieser Bedingung angehören muß und die man aus solchem Grunde auch einen geometrischen Ort des Punktes nennt. Wir haben vorhin bereits entwickelt, wie die Vorschrift für die Lage des Punktes P im Raume, daß er nämlich einen gegebenen Abstand habe von einem als bekannt angenommenen Punkte A, sofort für gleichbedeutend sich zu erkennen giebt mit jener andern Vorschrift: P solle auf einer Kugelfläche liegen, deren Centrum in A und deren Radius gleich a genommen wird. Soll P einen Abstand b von einem zweiten festen Punkte B haben, so versetzt ihn dies noch als geometrischen Ort auf eine zweite Kugelfläche, wovon B das Centrum und b der Radius.

Das Resultat der zwei vereinten Bedingungen besteht in der Erkenntniß, daß P nur ein Punkt des Kreises k_1 sein könne, nach welchem die beiden Kugelflächen sich schneiden, eines Kreises, dessen Ebene auf der Verbindungslinie von A und B senkrecht stehen muß, wie denn überhaupt als Resultat zweier vereinter Bedingungen eine Linie als geometrischer Ort des Punktes P hervorgehen muß. P endgiltig festzusetzen, bedarf es einer dritten Bedingung, nämlich eines dritten festen Punktes C und seiner Entfernung von P, welche c heißen soll. Als dritter geometrischer Ort von P ist damit eine dritte Kugelfläche bezeichnet, von welcher C das Centrum und c der Radius,

und P kann nur da liegen, wo diese dritte Kugel und der Kreis k_1 sich schneiden. Dies aber geschieht in zwei Punkten, P_1 und P_2, die gemeinschaftlich dem Kreise k_1 und jenem andern Kreise $\varkappa$ angehören, nach welchem die Ebene von k_1 und die dritte Kugel sich schneiden. Im Geiste unserer Untersuchung wird man übrigens den Durchschnittskreis k_2 der ersten und dritten Kugelfläche verzeichnen, welcher sich mit k_1 kreuzen muß, weil diese beiden Kreise der ersten Kugelfläche angehören und ihre zwei Kreuzungspunkte P_1 P_2 also allen drei Kugeln. Durch diese zwei Punkte geht endlich noch der Kreis k_3, nach welchem die zweite und dritte Kugelfläche sich schneiden. Endlich lassen sich P_1 und P_2 dadurch unterscheiden, daß die Punkte auf entgegengesetzten Seiten jener Ebene liegen, welche durch die drei Kugelmittelpunkte geht.

Zur graphischen Ausführung dieser Konstruktion *Fig. 348* wird man nicht anstehen, die Ebene der drei Mittelpunkte als erste Projektionsebene anzunehmen. Dies vorausgesetzt, seien A, B, C die drei Mittelpunkte und die aus ihnen beschriebenen Kreise die Durchschnitte der Kugeln mit der Projektionsebene. Diese Kreise kreuzen sich paarweise in den Punkten E und F, G und H, I und K, und bestimmen damit drei Sehnen EF, GH, IK, als Projektionen der Durchschnitte dieser Kugel paarweise genommen. Die drei Sehnen kreuzen sich in einem Punkte P, der Projektion des gesuchten Punktes. Man stellte eine zweite Projektionsebene XY senkrecht auf die Verbindungslinie von A und B, projicirte den Schnitt EF darauf nach $e' P'_1 f'$, endlich auf diesen Kreis den Punkt P nach P'_1 oder P'_2 und hatte in (P, P'_1) oder (P, P'_2) den gesuchten Punkt.

487. Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume vermittelst seiner Abstände von gegebenen geraden Linien.

Bedingt man den Ort eines Punktes im Raume vermöge seiner Abstände von geraden Linien, deren gegenseitige Stellung als bekannt vorausgesetzt wird, so leitet dies zu folgender Anschauung: A bezeichne die erste Gerade und a den Abstand des zu bestimmenden Punktes P von dieser Geraden. In solchem Abstande denke ich mir eine Parallele zu A gezogen und lasse sie um diese letztere als Achse rotiren, eine Cylinderfläche zu erzeugen, welche ein geometrischer Ort von P sein muß, weil jeder Punkt dieser Fläche von der Achse A den Abstand a hat, während jeder andere Punkt innerhalb oder außerhalb der Fläche in geringerer oder größerer Entfernung von A liegt. Bezeichnet b den Abstand des Punkes P von einer zweiten Geraden B, und c seine Entfernung von einer dritten Geraden C, so führt dies auf

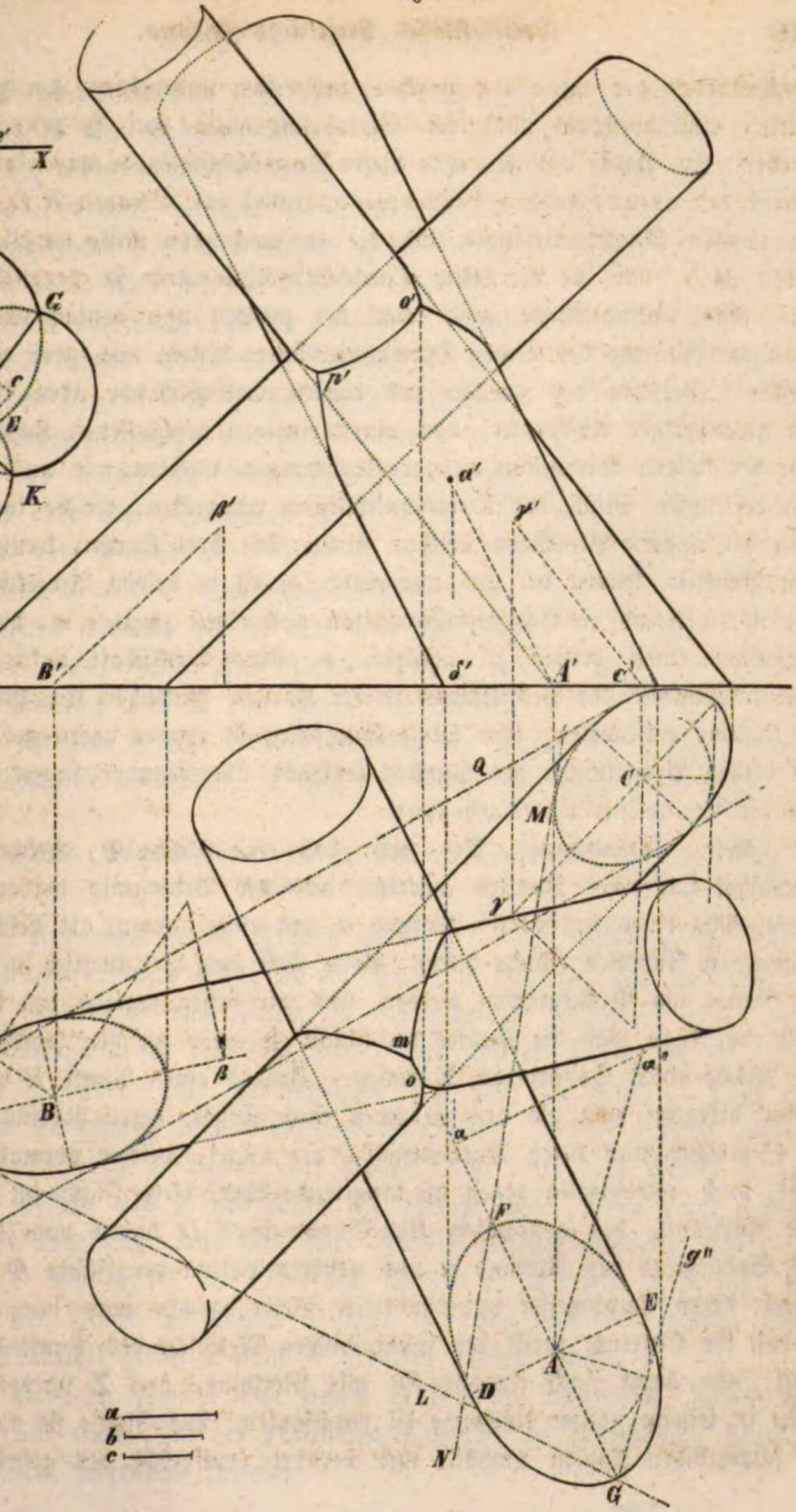
die Vorstellung von zwei weiteren Rotationscylinderflächen, deren Achsen B und C und deren bezügliche Radien gleich b und c, denen der Punkt P gleichzeitig angehören muß und in deren gegenseitigem Durchschnitt er seinen Ort findet. Nun ist die Durchschnittslinie zweier Rotationscylinderflächen eine Kurve vierter Ordnung, welche aus zwei geschlossenen Aesten bestehen kann. Faßt man die Vorstellung, daß P da läge, wo die Durchschnittslinie der beiden ersten Cylinderflächen durch die dritte Fläche dringt, und erwägt, daß jeder Ast jener Durchschnittslinie die dritte Cylinderfläche in vier Punkten durchdringen kann, so wird ersichtlich, daß möglicherweise acht Punkte im Raume vorhanden sind, welche gleichzeitig den drei Cylinderflächen angehören und welche den Bedingnissen der Aufgabe Genüge leisten, weil eines jeden Abstände von A, B und C die bezüglichen Größen a, b, c haben.

488. Für eine graphische Bearbeitung des Falles empfiehlt es sich, den Projektionsebenen eine solche Anordnung zu geben, daß eine derselben die drei gegebenen Geraden innerhalb des Rahmens der Zeichnung durchschneide, wie dies in Fig. *349* der Fall. $(A\alpha, A'\alpha')$, $(B\beta, B'\beta')$, $(C\gamma, C'\gamma')$ sind hier die drei Geraden; sie schneiden die Horizontalebene in A, B, C. Bei $a\,b\,c$ sind die Entfernungen angegeben, welche der zu bestimmende Punkt von den gleichnamigen Geraden haben soll. Nachdem in A auf $A\alpha$ die Senkrechte DE errichtet, und $AD = AE = a$ genommen worden, denkt man sich die Gerade mit ihrer projicirenden Ebene gedreht und in die Horizontalebene niedergelegt, wobei sie nach $A\alpha''$ fiel ($\alpha\alpha''$ senkrecht auf $A\alpha$ und gleich dem Höhenunterschied $\delta'\alpha'$). An den aus A mit dem Radius AE beschriebenen Kreisbogen zieht man die zu $A\alpha''$ parallele Tangente $g''G$, welche die Projektion $A\alpha$ in G schneidet, und trägt die Entfernung GA nach AF, so ist die über DE und FG als Achse beschriebene Ellipse die Durchschnittslinie der ersten Cylinderfläche durch die horizontale Projektionsebene. Denn als ursprüngliche Basis der Cylinderfläche kann ein Kreis gedacht werden, dessen Radius gleich a, dessen Centrum in A und dessen Ebene auf $(A\alpha, A'\alpha')$ senkrecht steht; DE wird der Riß der Kreisebene sein und sein Umfang wird in den Punkten D, E durch die Horizontalebene dringen. Ferner darf $g''G$ betrachtet werden als die Umlegung einer in der Vertikalebene $A\alpha$ liegenden Erzeugungslinie der Cylinderfläche, welche die Horizontalebene in G schneidet, dem Scheitel der großen Achse des elliptischen Schnittes. In gleicher Weise konstruirt man bei B und C die Ellipsen, nach welchen die entsprechenden Rotationscylinderflächen durch die Horizontalebene geschnitten werden. Nachdem solches vollendet, können die Durch-

Fig. 348.



Fig. 349.

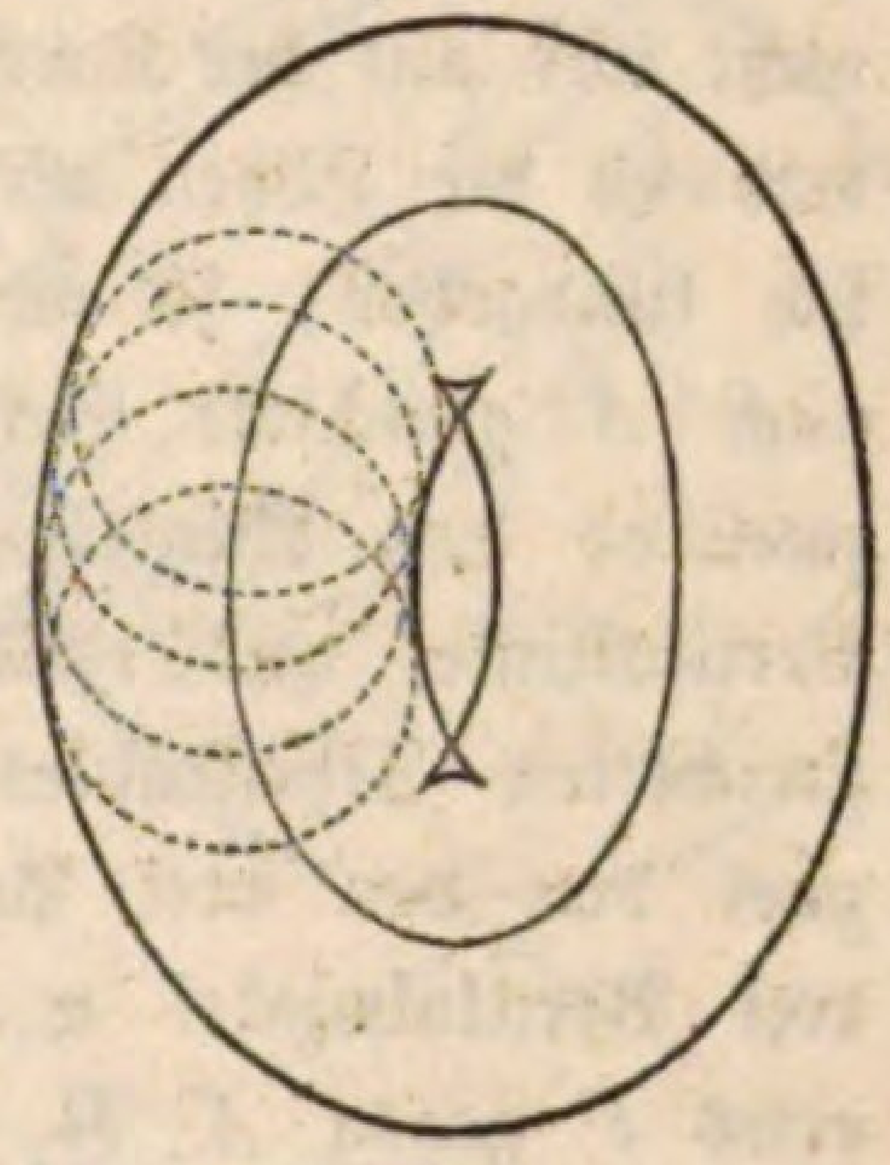


schnittskurven der ersten und zweiten, der ersten und dritten, der zweiten und dritten Cylinderfläche nach der Verfahrungsweise von §. 300 verzeichnet werden. In Bezug auf die erste dieser Durchschnittslinien waren die Horizontalrisse der anzuwendenden Hilfsebenen parallel zur Geraden KL. Bezüglich der zweiten Durchschnittslinie sind die entsprechenden Risse parallel zur Geraden MN, und für die dritte Durchschnittslinie sind sie parallel zu RQ. Die erste Cylinderfläche wird von der zweiten und dritten völlig durchdrungen und jede der beiden Durchschnittslinien besteht aus zwei geschlossenen Aesten. Zwischen der zweiten und dritten Cylinderfläche aber besteht nur ein gegenseitiger Ausschnitt, von einer einzigen geschlossenen Kurve gebildet. Bei der kleinen Dimension unserer Zeichnungen mußten wir uns begnügen, nur diejenigen Stücke der Durchschnittslinien anzugeben, welche in der einen oder der andern Projektion sichtbar sind. Die drei Kurven kreuzen sich in acht Punkten, wovon bei uns nur einer (o, o') in beiden Projektionen sichtbar ist, während die Horizontalprojektion noch einen zweiten m, die Vertikalprojektion einen dritten p' angiebt. — Eine Bürgschaft dafür, daß die Kreuzungspunkte der Projektionen zweier Kurven wirklichen Kreuzungspunkten im Raume entsprechen, eine solche Bürgschaft ist immer darin geboten, daß die beiden Projektionen des Punktes senkrecht übereinander liegen in Bezug auf die Grundlinie der Darstellung.

489. Anmerkung. Der Fall, daß eine Fläche Φ, welche als geometrischer Ort eines Punktes auftritt, aus der Bedingung hervorgeht, der Punkt solle einen bestimmten Abstand α von einer andern, als bekannt angenommenen krummen Fläche haben, dieser Fall mag hier kürzlich in Bezug auf die Natur von Φ besprochen werden, und wir fassen sogleich den bestimmten Fall ins Auge, daß die Punkte der Fläche Φ einen gleichen Abstand α von der Fläche eines Sphäroides Σ haben. Irgend einen Punkt P des Sphäroides betrachte man als das Centrum einer Kugel, deren Radius gleich α; in P errichte man einen Durchmesser D der Kugel, welcher normal gegen Σ steht, d. h. rechtwinklig gegen die tangirende Ebene dieser Fläche im Punkte P. Die Endpunkte des genannten Kugeldurchmessers D haben vom Punkte P des Sphäroides den Abstand α und gehören darum der Fläche Φ an. Die Kugel, deren Durchmesser unveränderlich bleibt, mache man nun beweglich, so daß ihr Centrum zuerst den sphäroidischen Meridian des Punktes P durchläuft, und dann nach einander in alle Meridiane von Σ übergeht, einen jeden in seinem ganzen Umfange zu durchlaufen. Die Fläche Φ nun, welche die sämmtlichen Kugeln umhüllt und berührt, entspricht der gestellten For-

derung. Φ wird abermals eine Rotationsfläche sein von gleicher Achse wie Σ, aber sie ist kein Sphäroid mehr, weil sie aus zwei getrennten Flächennetzen besteht, deren erstes die Kugeln auf der äußern Seite bezüglich der Rotationsachse berührt, während die Berührung des andern Flächennetzes auf der entgegengesetzten Seite der Kugeln stattfindet. Zum Begründen der ersten Behauptung denke man sich die Kugeln, deren Mittelpunkte einem Meridiane von Σ angehören, durch die Ebene M dieses Meridianes geschnitten. Die Schnitte aller Kugeln sind größte Kreise derselben, also der Bedingung zufolge von gleicher Größe, und jene Linie Λ, welche die sämmtlichen Kreise von der äußeren oder von der inneren Seite tangirt, ist der Schnitt von Φ und M. Dies Λ muß aber seiner Entstehung nach in allen Meridianebenen von Σ das Gleiche werden, es ist also ein Meridian von Φ und dieses selbst eine Rotationsfläche. — Wäre der Meridian von Σ eine Ellipse, so behielte der äußere Ast von Λ eine konvexe Gestalt, der innere Ast dagegen könnte vier Rückkehrpunkte aufweisen, je nach der Größe des Kugeldurchmessers.

Fig. 350.



Winkelabstände (Angular-Distanzen) als Bestimmungselemente der Lage eines Punktes im Raume.

490. Auf einer festen geraden Linie L, deren Stellung im Raume als bekannt angenommen wird, ist ein Punkt O gegeben, von welchem aus eine zweite Gerade J nach einem zu bestimmenden Punkte P geht; man giebt als Bedingung für die Lage von P den schiefen Winkel α an, welchen J mit L bildet. Als geometrischen Ort für den Punkt P folgt aus dieser einen Bedingung eine Rotations-Kegelfläche, welche dadurch erzeugt wird, daß man durch O irgend eine gerade Linie unter dem Winkel α zieht und diese Gerade um L als Achse sich drehen läßt. Denn durch welchen Punkt dieser Kegelfläche man eine ihrer geraden Erzeugungslinien führt; sie geht durch O und bildet mit L einen Winkel α, während außerhalb der Kegelfläche kein Punkt im Raume denkbar ist, von dem eine gerade Linie unter einem Winkel gleich α nach O gerichtet werden könnte.

Diese Vorstellungsweise nicht weiter abstrakt zu behandeln, wollen wir sie alsofort auf einen Fall der praktischen Meßkunst in Anwendung bringen. Wir unterstellen folgendes Beispiel:

Ein Ingenieur, welcher zum Zwecke von Terrainstudien eine Gebirgsgegend durchwandert, ist mit einer topographischen Karte dieser Gegend versehen, sowie mit einem Instrumente zum Messen von Höhenwinkeln. Er trifft auf einen Punkt, für ihn von Interesse, welchen er jedoch auf der Karte nicht verzeichnet sieht, und um ihn darauf nachtragen zu können, stellt er folgende geodätische Beobachtungen an. Nachdem er in der weiteren Umgebung seines Standortes drei Punkte A, B, C deutlich erkannt hat, welche nicht nur auf der Karte angegeben, sondern auch mit „Koten" versehen sind, wodurch die Höhen der drei Punkte über dem für die Karte geltenden Niveau sich kundgeben, so mißt der Ingenieur erstens den Winkel α, welchen der nach A gerichtete Sehestrahl mit der Vertikallinie des Standortes bildet; zweitens den Winkel β des nach B gerichteten Sehestrahles mit derselben Vertikallinie, und endlich den Winkel γ der Vertikallinie und des nach C gerichteten Sehestrahles, wobei angenommen wird, daß P wenigstens mit zwei von den drei Punkten A, B, C nicht gleich hoch liege. Mittelst der drei Vertikalwinkel α, β, γ soll nun der Ingenieur die Lage seines Standortes P gegen A, B, C festsetzen.

Determination der Aufgabe. Die Vertikallinien zweier Orte A, B auf der Erde kreuzen sich im Erdcentrum unter einem Winkel, welcher gemessen wird durch den zwischen A und B liegenden größten terrestrischen Kreisbogen. Aber auf Karten, welche man topographisch nennt, sieht man nur einen verhältnißmäßig sehr kleinen Theil der Erdoberfläche dargestellt, und die Höhenunterschiede der auf solchen Karten angegebenen Punkte, betrügen sie auch Tausende von Füßen, bilden doch nur winzige Bruchtheile des Erdradius. In Betracht dieser Umstände darf nun angenommen werden, daß die Vertikallinien der vier Punkte P, A, B, C unter sich parallel wären und senkrecht ständen auf der Ebene der Karte. Macht nun die von P nach A gerichtete Sehelinie mit der Vertikalen von P einen Winkel α, so bildet sie den gleichen Winkel mit der Vertikalen von A, weil beide als Wechselwinkel zu betrachten sind. Desgleichen erkennt man β als die Größe des Winkels, welchen die von B nach P gehende Sehelinie mit der Vertikalen von B macht, und γ als die Größe des Winkels der Vertikalen des Punktes C und der von hier nach P gerichteten Sehelinie. — Nach den Anschauungen am Eingange dieses Paragraphen hat man somit drei Rotations-Kegelflächen gegeben, deren Scheitel die bezüglichen drei Punkte A, B, C, deren Achsen die Vertikalen dieser drei Punkte, und wobei der Winkel einer geraden Erzeugungslinie mit der Rotationsachse auf der ersten Fläche die Größe α, auf

Fig. 351.

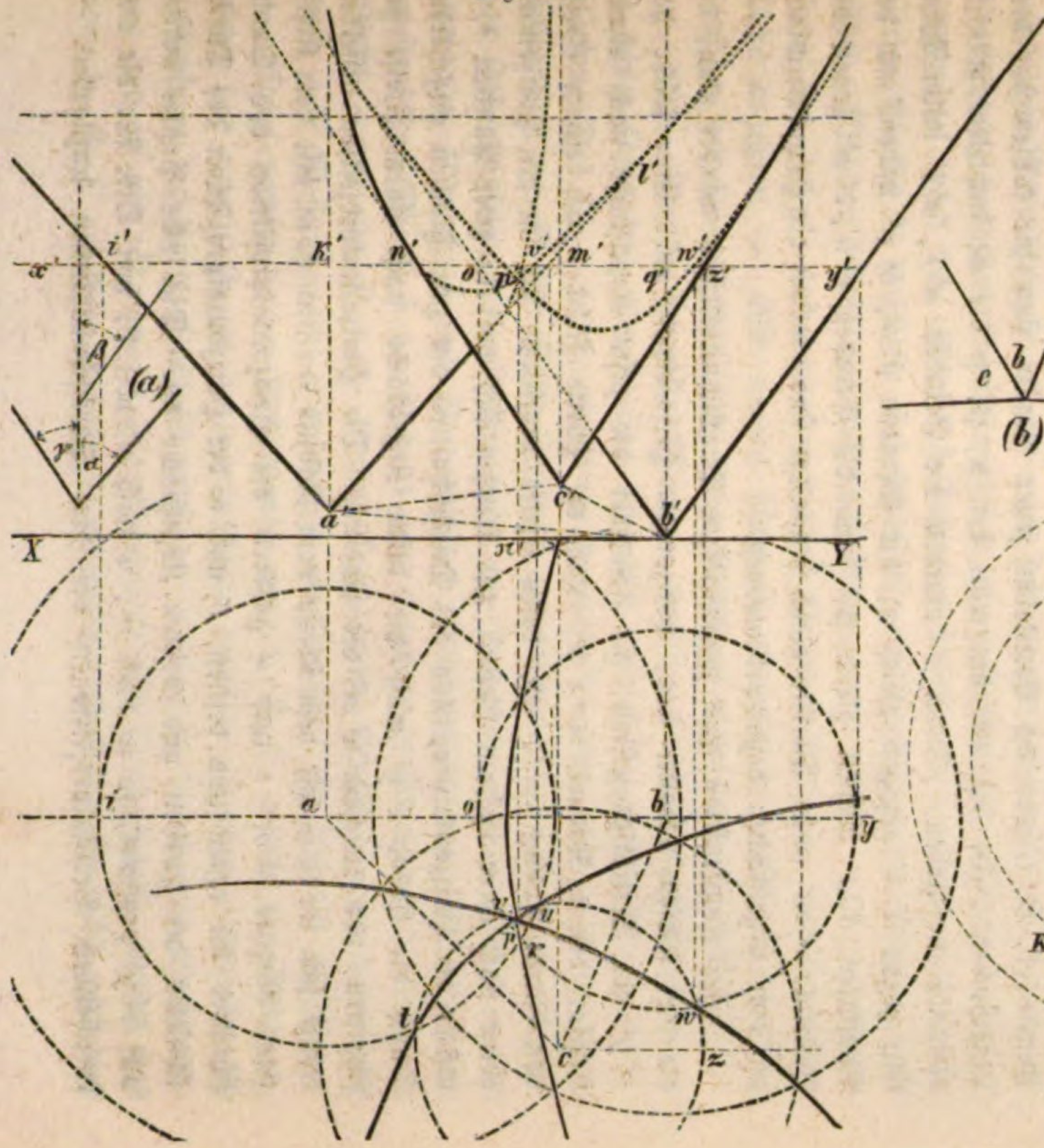
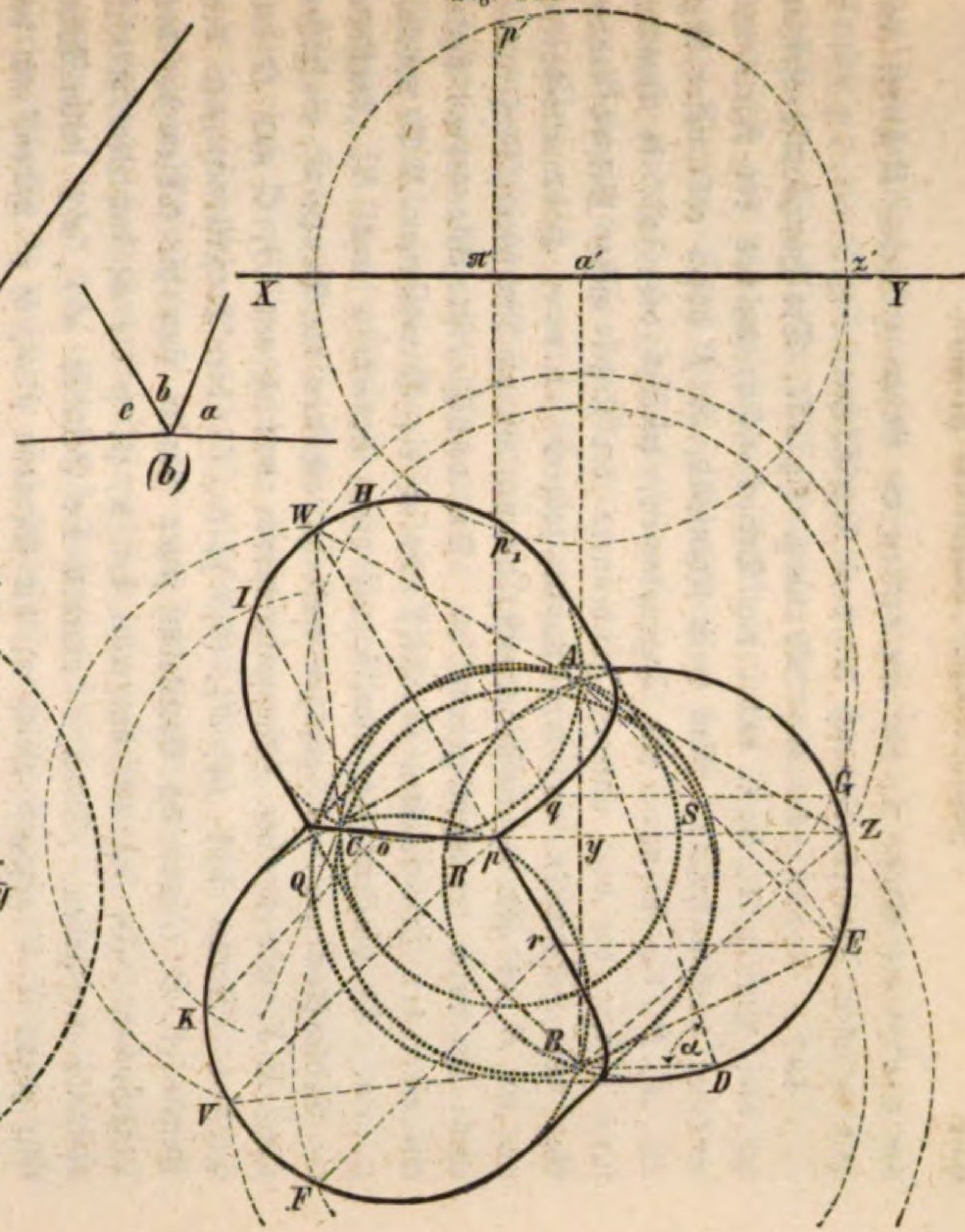


Fig. 352.



der zweiten die Größe β, auf der dritten die Größe γ hat. P bildet den gemeinsamen Durchschnittspunkt der drei Kegelflächen.

491. Graphische Ausführung. Fig. 351. Die Horizontalprojektion der drei Punkte A, B, C bildet ein Dreieck $a\,b\,c$, welches der Karte entnommen werden konnte. Man weiß jedenfalls, ob P höher oder tiefer liege als A, B, C; ist nun, wie angenommen, ersteres der Fall, so kommen für's Erstere die drei unteren Flächennetze der Kegel außer Betrachtnahme. Aus den Höhenkoten der drei Punkte folgern sich deren Höhenunterschiede, und da B sich als der tiefste erweist, nehmen wir die horizontale Projektionsebene als durch denselben gehend an. Die vertikale Projektionsebene stellen wir einer der Dreiecksseiten parallel, nämlich die Grundlinien $X\,Y$ parallel zu $a\,b$. Es projicirt sich nun b auf diese Grundlinie nach b'. Nachdem die Senkrechten $a\,a'$, $c\,c'$ gezogen worden, erhalten die Punkte a', c' Höhen über $X\,Y$, wie sie den Höhenunterschieden von A und B, C und B entsprechen. Somit sind (a, a'), (b, b'), (c, c') die Projektionen der drei Punkte A, B, C und die Vertikalen jener Punkte sind die Achsen der drei Kegelflächen. In Fig. (a) hat man bei α, β, γ die beobachteten Winkelabstände angegeben. Durch a' wurden die Geraden $a'\,i'$, $a'\,l'$ unter Winkeln gegen $a'\,k'$ gezogen gleich α; die Geraden $b'\,o'$, $b'\,y'$ bilden mit der Vertikalen $b'\,q'$ Winkel gleich β, sowie die Geraden $c'\,n'$, $c'\,z'$ gegen die Vertikale $c'\,m'$ unter Winkeln gleich γ geneigt sind, womit die Hauptmeridiane der drei Kegelflächen bezeichnet wurden.

Zur Konstruktion ihrer gegenseitigen Durchschnittslinien wendet man, da die drei Achsen parallel sind, horizontale Hilfsebenen an. Eine solche hat $x'\,y'$ als Vertikalprojektion: sie schneidet die erste Kegelfläche nach einem Kreise, dessen Radius $= i'\,k'$, und die zweite Fläche nach einem Kreise von einem Radius $= o'\,q'$; beide Kreise projiciren sich in die Horizontalebene nach ihrer wahren Gestalt und kreuzen sich dort in zwei Punkten r, s, welche der Horizontalprojektion des Durchschnittes der zwei Flächen angehören. Durch die Ebene $x'\,y'$ wird die dritte Kegelfläche nach einem Kreise geschnitten, von welchem $n'\,m'$ der Radius. Die Horizontalprojektion desselben kreuzt sich in t, u mit dem Kreise vom Radius $a\,i$, in v, w mit dem Kreise vom Radius $b\,o$. t und u gehören der Horizontalprojektion des Durchschnittes der ersten und dritten, v und w der Horizontalprojektion des Durchschnittes der zweiten und dritten Kegelfläche an. Die sechs Punkte werden auf $x'\,y'$ projicirt, so w nach w', u nach u' u. s. f., hier Orte für die entsprechenden Vertikalprojektionen der drei Durchschnittslinien anzugeben. —

Die Horizontalprojektionen der drei Durchschnittslinien kreuzen sich in einem Punkte p; die Vertikalprojektionen in einem Punkte p', und da beide, bezüglich der Grundlinien $X\,Y$, senkrecht über einander liegen, bestimmt sich damit (p, p') als gemeinsamer Punkt der drei Kegelflächen, d. i. als gesuchten Punkt. Seine Horizontalprojektion p kann sofort auf die Karte eingetragen werden und die Senkrechte $\pi' p'$ gilt als Maß der Höhe von (p, p') oder P über (b, b') oder B.

Weil α, β, γ unter sich ungleich große Winkel, kann es auf keinem Paare der drei Kegelflächen parallele Erzeugungslinien geben und die Durchschnittslinien aller drei Flächenpaare müssen geschlossene Kurvenäste sein. Würde man in unserer Fig. *351* die Arbeit bis zum Schlusse der Kurven fortsetzen, so könnte allerdings noch ein zweiter den oberen Flächennetzen angehöriger Kreuzungspunkt aller drei Kurven sich ergeben, allein wir unterstellen, daß schon ein ungefährer Ueberschlag zeige, wie der gesuchte Punkt eine so große Höhe über (b, b') nicht haben könne. Nach den Regeln topographischer Vermessungen würde man sich jedoch nicht auf die unerläßliche Beobachtung der drei Vertikalwinkel α, β, γ beschränkt, vielmehr als Prüfungsmittel noch den Winkel δ bestimmt haben, welchen der nach einem vierten Punkte D gerichtete Sehestrahl mit der Vertikalen des Standortes P bildet. Alsdann bliebe auf unserer Zeichnung, als Probe, noch zu konstatiren, daß (p, p') noch der vierten durch D und δ bedingten Rotationskegelfläche angehöre. — Wir werden übrigens alsobald nochmals auf die Konstruktion der Durchschnittslinien dreier Rotations-Kegelflächen zurückkommen.

492. Zweites Beispiel. Monge, welcher die vorhergehende Aufgabe in seiner Géométrie descriptive behandelt, giebt ihr noch folgende Modifikation: Das Instrument, womit der Ingenieur versehen, ist ein katoptrisches Instrument, z. B. ein Spiegelsextant, und taugt somit nicht zum Messen von Höhenwinkeln, er beobachtet daher im Standorte P den Winkel a der zwei von P nach A und B gerichteten Sehestrahlen oder Gesichtslinien, zweitens den Winkel b der nach A und C gehenden Strahlen, drittens den Winkel c der von P nach B und C gerichteten Strahlen; und vermittelst dieser drei Messungen ist er wiederum im Stande, die Aufgabe zu lösen.

Denn vermittelst der Projektionen von A, B, C, welche die Karte angiebt, und vermittelst der Höhenunterschiede derselben Punkte, welche ihm die Höhenkoten der Karte gleichfalls angeben, vermag er die wahren Entfernungen von A und B, von A und C, von B und C abzuleiten, daraus das von A, B, C gebildete Dreieck zu gewinnen. $A\,B\,C$, Fig. *352*, sei dies

Dreieck, dessen Ebene als horizontale Projektionsebene dient, und *a*, *b*, *c* Fig. (*b*) seien die in *P* beobachteten Winkel. Man verzeichne an der Seite *A B* ein rechtwinkliges Dreieck *D B A* der Art, daß der Winkel bei *A* das Komplement von *a*, also der Winkel $D = a$ sei, und beschreibe um dies Dreieck einen Kreis *A D B R*, so wird in demselben jeder Peripheriewinkel, welcher auf dem Bogen *A R B* steht, z. B. $A E B = a$ sein. Man lasse den Kreis um *A B* als Achse rotiren, so wird eine krumme Fläche von der Art entstehen, welche wir in §. 149 u. f. Melonoide genannt und näher charakterisirt haben. Im vorliegenden Falle besteht der Hauptmeridian der Fläche aus den zwei gleichen Kreisen *A D B*, *A Q B*, welche sich in *A* und *B* schneiden. Durch die Rotation entstehen zwei Flächennetze: dasjenige, welches von dem Bogen *B D A* oder *B Q A* erzeugt worden, und jenes, so von den Supplementbogen *A R B* hervorgebracht wird. Dies Melonoid, oder vielmehr dessen erstes Flächennetz, ist ein geometrischer Ort des Rotationspunktes *P*. Denn wenn man aus irgend einem Punkte des Flächennetzes zwei gerade Linien nach *A* und *B* gerichtet denkt, müssen sie unter sich einen Winkel gleich *a* bilden, und es leuchtet ein, daß außerhalb des Flächennetzes kein Punkt im Raume möglich ist, von welchem nach *A* und *B* zwei gerade Linien gleichfalls unter dem Winkel *a* gerichtet werden könnten. Was das von den Bögen *A R B* oder *A S B* erzeugte Flächennetz betrifft, so besitzt es gleichfalls die Eigenthümlichkeit, daß jedes Linienpaar, welches von einem seiner Punkte nach *A* und *B* geht, einen unveränderlichen Winkel bildet. Dieser Winkel ist aber das Supplement von *a*, weshalb dieses innere Flächennetz für die vorliegende Frage außer Betracht bleibt. — Indem man sofort die entwickelte Anschauungsweise auf die Seite *A C* anwendet, kommt man zu einem Kreise *A H C* von der Beschaffenheit, daß die auf der Sehne *A C* stehenden Peripheriewinkel des Bogens *A H C* die Größe *b* haben, und man gelangt bei *B C* zu einem dritten Kreise *C K B*, in welchem den auf *B*, *C* stehenden Peripheriewinkeln *C V B* die Größe *c* zukommt. Durch die Rotation dieser Kreise um ihre zugehörigen Sehnen *A C*, *B C* als Achsen entstehen zwei neue Melonoide, geometrische Oerter des Standortes *P*, welcher nur in dem gemeinsamen Durchschnitt der drei Umdrehungsflächen, beziehungsweise ihrer bezeichneten Flächennetze, dieselben paarweise genommen, liegen kann. Bei dem Umstande, daß die drei Rotationsachsen unserer Melonoide in der horizontalen Projektionsebene liegen, bietet sich zur Konstruktion ihrer Durchschnittslinien die für solchen Fall bereits gegebene Methode höchst bequem dar. (Siehe: Durchschnitt zweier Rotationsflächen.) Ein aus *A*

beschriebener Kreis, welcher den Meridian des ersten Melonoides in G und den Meridian des zweiten in H kreuzt, werde als größter Kreis einer Hilfskugel genommen, deren Centrum A, so schneidet die Kugel das erste Melonoid nach einem Parallelkreise, dessen Horizontalprojektion die auf AB senkrechte Gerade Gq ist; dieselbe Kugel und das zweite Melonoid schneiden sich nach einem Parallelkreise, welcher als Projektion die auf AC senkrechte Gerade Hq hat, und der Kreuzungspunkt q beider Geraden ist die Projektion eines Punktes der Durchschnittslinie des ersten und zweiten Melonoides.

Die gleiche Anschauung beibehaltend, beschreibt man aus B Kreise, deren einer den Meridian des ersten Melonoides in E kreuzt, den Meridian des dritten Melonoides in F; man zieht Er senkrecht auf AB, Fr senkrecht auf BC und der Kreuzungspunkt r gehört der Horizontalprojektion des Durchschnittes der ersten und dritten Fläche an. Desgleichen findet man einen Punkt o der Projektion des Durchschnittes der zweiten und dritten Fläche, indem man aus C einen Kreisbogen IK und Io senkrecht auf AC, Ko senkrecht auf BC zieht u. s. f. — Die Projektionen der in solcher Weise gefundenen Durchschnittslinie kreuzen sich in einem Punkte p; um zu erproben, ob dies wirklich die Projektion eines gemeinschaftlichen Punktes der drei Melonoide sei, ziehe man aus p auf AB, AC und BC die Senkrechte pZ, pW, pV, und betrachte eine jede als die Projektion eines Parallelkreises, so müssen diese Kreise, paarweise genommen, stets einer und derselben Hilfskugel angehören; es müssen also die Abstände $AW = AZ$ geworden sein, $BV = BZ$ und $CV = CW$; ist dies wirklich der Fall, dann kreuzen sich die drei Kreise, also auch die drei Flächen in dem Punkt des Raumes, dessen Horizontalprojektion p. Es handelt sich noch, die Höhe des nach p sich projicirenden Punktes zu erhalten. Zu diesem Ende hat man eine vertikale Projektionsebene XY senkrecht auf die Dreiecksseite AB gestellt, auf welcher Ebene der Kreis, dessen Projektion die Gerade Zp, sich in wahrer Gestalt projicirt, das Centrum y nach q', der Umfangspunkt Z nach z', und p endlich nach p' oder p'_1. $\pi p'$ oder $\pi p'_1$ ist gleich dem Abstande des Standortes P über oder unter der Ebene der drei Punkte A, B, C.

Indem man die Projektionen der drei Durchschnittslinien nach ihrer ganzen Ausdehnung konstruirt, wird sich zeigen, daß die drei Melonoide noch mehrere gemeinschaftliche Punkte haben können, und um zu erkennen, welcher von all' diesen den fraglichen Standort P repräsentire, wird der Ingenieur sich noch ein Mittel der Prüfung und Bestätigung zu verschaffen trachten, ähnlich wie wir es am Ende von §. 491 angeführt. Nur sei noch hervorgehoben,

daß p die Projektion von P in der Ebene des Dreieckes $A\,B\,C$ sei und daß die Horizontalprojektion von P für den Fall noch abzuleiten sei, wenn das Dreieck in seine ursprüngliche schiefe Lage zurückversetzt wird.

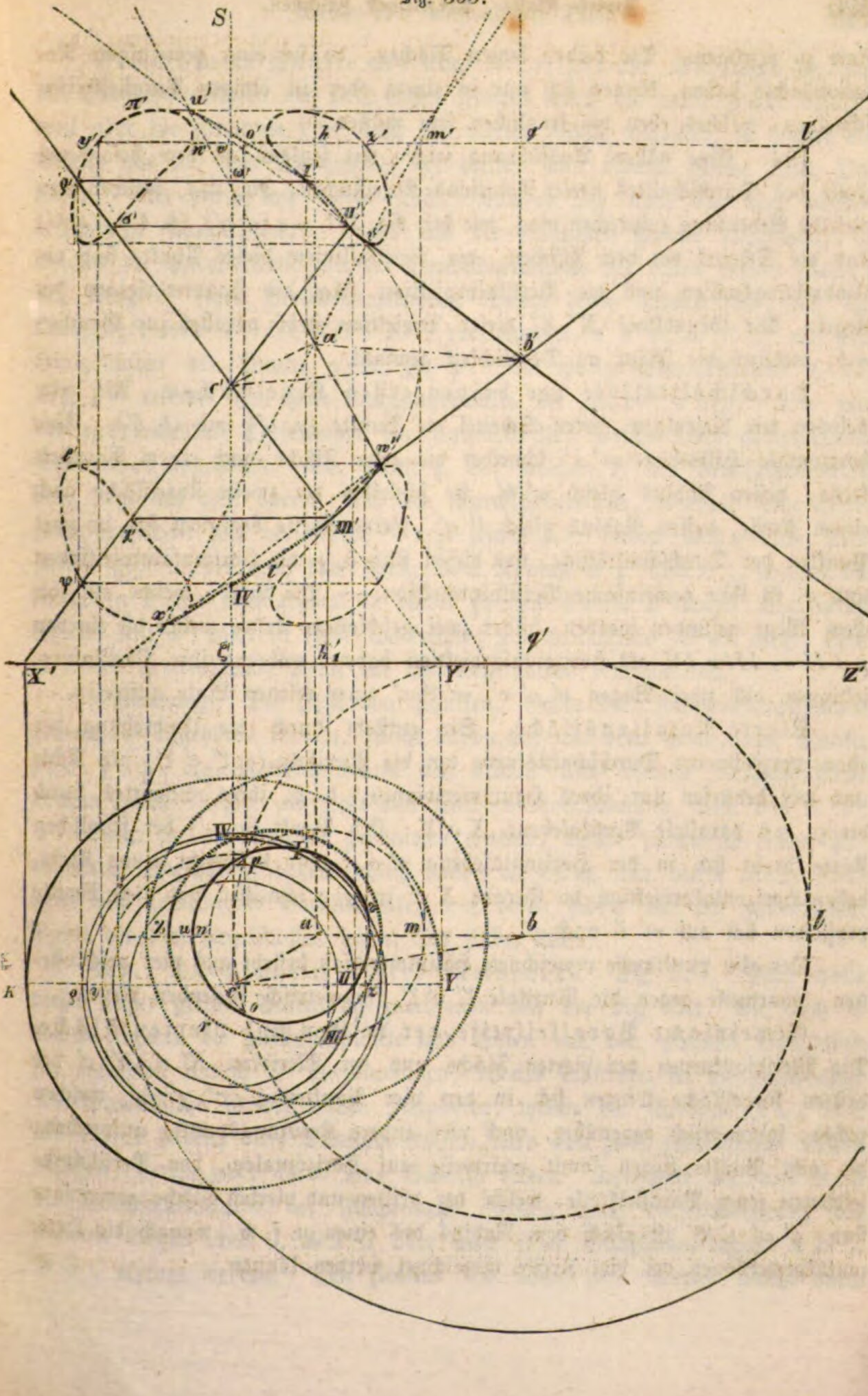
Anmerkung. Ihres topographischen Gewandes entkleidet und rein geometrisch betrachtet, läßt sich die vorstehende Aufgabe auch dahin formuliren: von einer dreieckigen Pyramide sind gegeben die Basis $A\,B\,C$ und die drei Kantenwinkel a, b, c, man soll die Spitze (p, p') der Pyramide bestimmen. Man wird erkennen, daß durch die Dreiecke $A\,Z\,B$, $A\,W\,C$, $C\,V\,B$ die drei Seitenflächen der Pyramiden vorgestellt sind, nachdem sie durch Drehen um ihre Grundlinien in die Ebene der Basis niedergelegt worden.

493. Andere Betrachtungsweise der beiden vorhergehenden Aufgaben. Es handelt sich in dem ersten Falle um den gemeinsamen Durchschnitt von drei Rotations-Kegelflächen, im zweiten um den Durchschnitt von drei Melonoiden, also überhaupt um den gegenseitigen Durchschnitt von drei Umdrehungsflächen. Die Aufgabe wird so behandelt, daß man die Projektionen der Durchschnittslinie von je zweien der drei Flächen konstruirt. Die drei Kurven werden sich gemeinsam in einer gewissen Zahl von Punkten kreuzen, deren jeder allen drei Flächen zumal angehört. Weil aber die Projektionen von Linien doppelter Krümmung in Punkten sich kreuzen können, welche nicht die Projektionen wirklicher Durchschnittspunkte im Raume sind, so hat man ein Erkennungsmittel jener wirklichen Schnittpunkte darin, daß ihre Projektionen auf einer und derselben projicirenden Linie, d. h. einer Senkrechten, zur Grundlinie liegen müssen.

Wo nun von Punkten die Rede, welche gleichzeitig drei krummen Flächen angehören, da drängt sich die Vorstellung nahe, daß man sagt, die Punkte liegen da, wo die Durchschnittslinie der zwei ersten Flächen von der dritten Fläche geschnitten wird; und hierbei ist eine Inbetrachtnahme des Durchschnittes der ersten und dritten, der zweiten und dritten Fläche umgangen.

Die Vorstellung läßt sich, namentlich bei Umdrehungsflächen, konstruktiv ausbilden. Denn nachdem in diesem Falle die genannte Durchschnittslinie Θ des ersten Flächenpaares vermittelst ihrer Projektionen bestimmt worden, nehme man für einen Augenblick an, die Begegnungspunkte dieser Linie und der dritten Fläche seien bekannt; alsdann geht durch jeden derselben ein Parallelkreis der dritten Fläche, und die Frage ist jetzt dahin umgewandelt, daß es sich um das Bestimmen dieser Parallelkreise handelt. Hierzu lasse man die Linie Θ um die Achse der dritten Fläche rotiren, eine vierte Umdrehungs-

Fig. 353.



linie zu erzeugen. Die beiden letzten Flächen, da sie eine gemeinsame Rotationsachse haben, können sich nur in einem oder in einigen Parallelkreisen schneiden, welches eben die fraglichen sein müssen.

494. Eine nähere Ausführung zeigen wir sogleich an dem besonderen Falle des Durchschnittes dreier Rotations-Kegelflächen, Fig. *353*, welcher man dieselbe Bedeutung zusprechen mag, wie der Fig. *351*. — (a, a'), (b, b'), (c, c') sind die Scheitel der drei Flächen, die Vertikallinien dieser Punkte sind die Umdrehungsachsen und die Vertikalprojektion zeigt die Hauptmeridiane der Kegel. Die Grundlinie $X' Z'$ dieser Projektion steht parallel zur Geraden $a\,b$, wodurch die Figur an Deutlichkeit gewinnt.

Durchschnittslinie der beiden ersten Kegelflächen. Als erste nehmen wir diejenigen, deren Scheitel die Punkte (a, a') und (b, b'). Eine horizontale Hilfsebene $m' l'$ schneidet die erste Fläche nach einem Parallelkreise, dessen Radius gleich $m' h'$, sie schneidet die zweite Kegelfläche nach einem Kreise, dessen Radius gleich $l' q'$. Beide Kreise begegnen sich in zwei Punkten der Durchschnittslinie, von diesen sind o, p die Horizontalprojektionen und o' ist ihre gemeinsame Vertikalprojektion. — Die Linie, welche auf solchem Wege gefunden worden, bildet zwei geschlossene Aeste, welche die Kurven $p\,I\,II\,o$, $III\,r\,IV$ als Horizontalprojektion haben, während ihre Vertikalprojektionen als zwei Bogen $u'\,o'\,v'$, $w'\,t'\,x'$ einer offenen Linie auftreten.

Vierte Rotationsfläche. Sie entsteht durch die Umdrehung der eben verzeichneten Durchschnittskurve um die Vertikale $(c, \zeta'\,c'\,\zeta')$ als Achse und wir bedürfen nur ihres Hauptmeridianes, d. h. ihres Schnittes durch die zu $a\,b$ parallele Vertikalebene $X\,c\,Y$. Ein Punkt (p, o') der fraglichen Kurve dreht sich in der Horizontalebene $n'\,o'\,l'$ und beschreibt einen Kreis, dessen Horizontalprojektion die Gerade $X\,Y$ in y, z schneidet, und diese Punkte projiciren sich auf $m'\,l'$ nach y', z'.

Der also punktweise verzeichnete Hauptmeridian besteht aus vier geschlossenen, paarweise gegen die Vertikale $\zeta'\,c'\,\zeta'$ symmetrisch liegenden Aesten.

Gemeinsame Parallelkreise der dritten und vierten Fläche. Die Meridiankurven der vierten Fläche und der Meridian $X'\,c'$, $Y'\,c'$ der dritten Kugelfläche kreuzen sich in den vier Punkten ρ', σ', χ', ψ', welchen rechts, symmetrisch gegenüber, noch vier andere Kreuzungspunkte entsprechen; die acht Punkte liegen somit paarweise auf Horizontalen, den Vertikalprojektionen jener Parallelkreise, welche der dritten und vierten Fläche gemeinsam sind. $\rho'\,\omega'$ z. B. ist gleich dem Radius des einen u. s. w., wonach die Horizontalprojektionen der vier Kreise verzeichnet werden können.

Gemeinsame Punkte der drei Kegelflächen. Sie liegen da, wo die Durchschnittslinien der zwei ersten Flächen durch die dritte Fläche dringt; weil aber die genannte Linie auch der vierten Fläche angehört, so können die Punkte nur auf dem Durchschnitt der dritten und vierten Fläche ihren Ort finden. Die dritte und vierte Fläche schneiden sich nach den vier vorhin bestimmten Parallelflächen, daher sind die fraglichen Punkte diejenigen, in welchen die Parallelkreise mit der Durchschnittskurve der ersten beiden Flächen sich kreuzen. Ihre Vertikalprojektionen können keine andern sein, als die Kreuzungspunkte I', II', III', IV' der Kurven $u'\ o'\ v'$, $w'\ t'\ x'$ mit den Horizontalen der Punkte ρ', σ', χ', ψ'. Als Horizontalprojektionen I, II, III, IV erkennt man jene Kreuzungspunkte der Kurven $o\ n\ p$, $r\ x\ w$ mit den entsprechenden Projektionen der Parallelkreise, welche einer gemeinsamen Senkrechten angehören. Der Punkt z. B., welchen I' als Vertikalprojektion hat, liegt auf dem oberen Aste der Durchschnittslinie, weshalb seine Horizontalprojektion auf der Kurve $o\ u\ p$ seinen Ort finden muß; diese Projektion gehört aber auch dem Kreise vom Radius $\omega'\ \rho'$ oder $c\ \rho$, welcher die Kurve in I und noch einmal in einem zweiten Punkte 2 kreuzt. Weil indeß letzterer mit I' nicht in einer Senkrechten zur Grundlinie $X'\ Z'$ liegt, kann er keinen gemeinsamen Punkt der drei Kegelflächen repräsentiren.

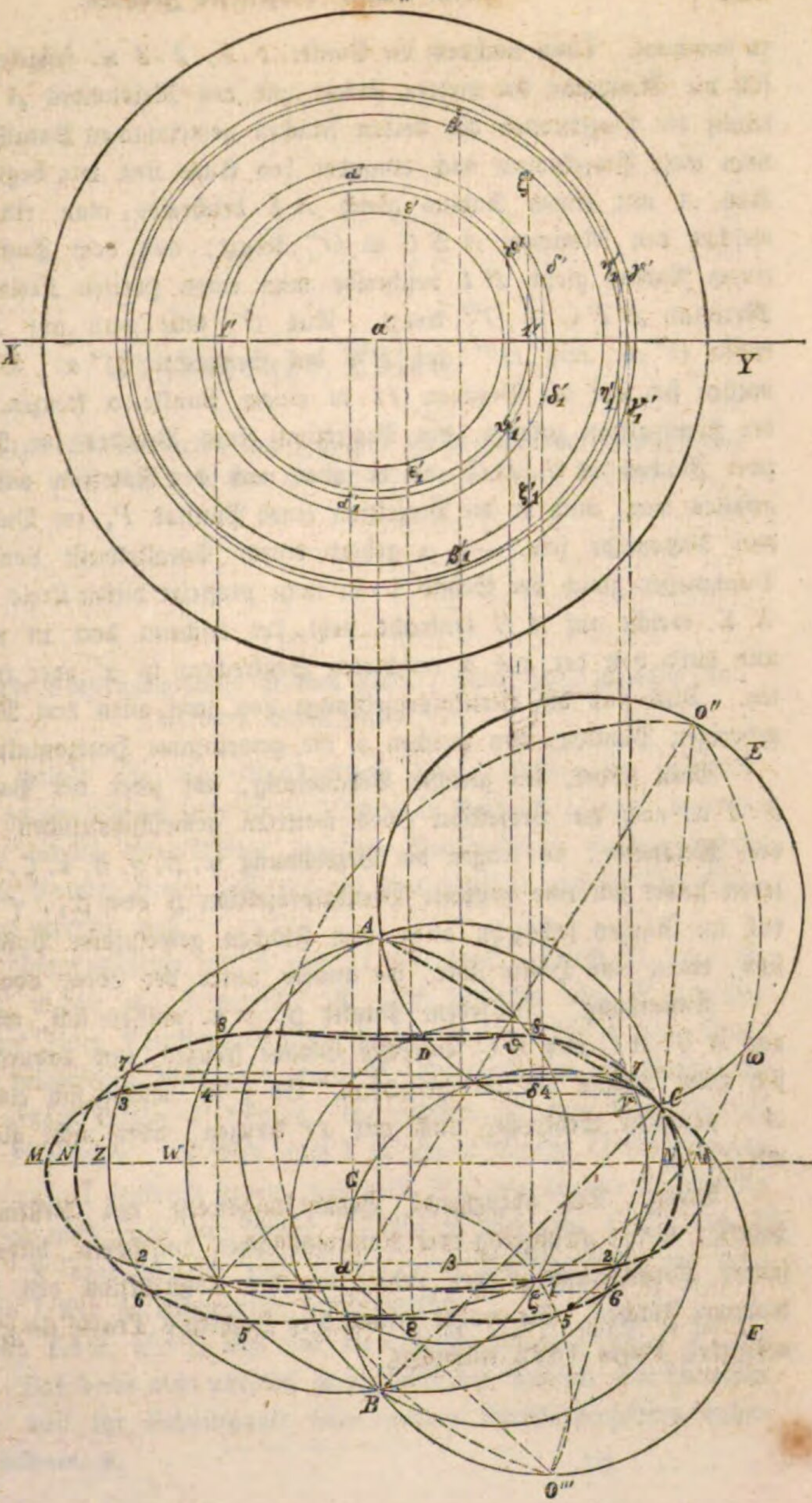
Anmerkung. Die Zahl von Punkten, welche drei Rotationskegelflächen gemeinsam angehören können, hängt davon ab, wie viele gemeinsame Punkte ρ', σ', χ', ψ' die Meridianschnitte der dritten und vierten Rotationsfläche gemein haben. Letztere aber, als eine Kurve vierter Ordnung, kann von $X'\ c'$, $Y'\ c'$ nur in acht Punkten geschnitten werden, welche paarweise einem Parallelkreise angehören, daher endlich haben die dritte und vierte Fläche höchstens vier gemeinsame Parallelkreise, auf deren jedem nur ein gemeinsamer Punkt der drei Kegelflächen seinen Ort finden kann.

495. Durchschnitte dreier Melonoide. Fig. 354. Man wolle dieser Figur gleiche Bedeutung zuerkennen wie der Fig. 352, wie auch in beiden Figuren die gleichen Punkte und Linien mit den gleichen Buchstaben sich bezeichnet finden. — Angenommen, bereits konstruirt sei die gegenseitige Durchschnittslinie Θ der beiden Melonoide, welche die Geraden $A\ C$, $B\ C$ als Achsen haben; diese Durchschnittslinie wird aus zwei geschlossenen Aesten bestehen, deren jeder in C eine Schleife bildet. Der erste Ast von Θ ist die Durchschnittskurve der Flächennetze, welche durch die Umdrehung der äußeren Bögen $A\ E\ C$, $B\ F\ C$ oder auch ihrer Supplementbögen $A\ D\ C$, $B\ G\ C$ erzeugt werden. Den zweiten Ast bildet jene Kurve, welche durch

den gegenseitigen Schnitt je eines äußeren mit einem inneren Flächennetze die Entstehung findet. Diese doppelästige Durchschnittslinie wird von dem Melonoid, dessen Achse die Gerade *A B*, in 16 Punkten geschnitten werden können, deren jeglicher allen drei Flächen angehört. Weil nun die Linie Θ jedenfalls symmetrisch gebildet sein muß gegen die Horizontalebene der drei Punkte *A*, *B*, *C*, so werden die den drei Flächen gemeinsamen Punkte sich in zwei gegen genannte Horizontalebene symmetrisch liegende Gruppen reihen. In jedem dieser Punkte kreuzen sich drei Parallelkreise, jeglicher einem der Melonoide angehörig, und es handelt sich darum, diejenigen dieser Kreise festzustellen, welche dem ersten Melonoide, nämlich dem von der Achse *A B*, zugehören. Zu diesem Ende lasse man wiederum die Kurve Θ um *A B* als Achse rotiren, eine vierte Umdrehungsfläche zu erzeugen, so werden diese vierte und die erste Fläche sich nach einer gewissen Zahl von Parallelkreisen schneiden, welche die gesuchten sind. Nun aber besteht der vollständige Meridianschnitt des ersten Melonoides aus den zwei gleichen Kreisen *A Z B*, *A W B*, deren Mittelpunkte gleichen Abstand von *A B* haben. Den Meridianschnitt der vierten Fläche bildet eine gegen *A B* symmetrische Kurve, deren erster Ast mit *1 2 M 3 4 . . .*, der zweite Ast mit *5 6 N 7 8 . . .* bezeichnet ist. Die beiden Meridiane kreuzen sich in 16 und paarweise symmetrisch gegen *A B* vertheilten Punkten *1* und *1*, *2* und *2*, *3* und *3* 2c. Die Geraden *1 . 1*, *2 . 2*, ... *8 . 8*, welche je zwei gleichnamige Punkte verbinden und auf *A B* senkrecht stehen, sind die Projektionen von acht Parallelkreisen, nach welchen die erste und vierte Umdrehungsfläche sich schneiden.

Konstruktion des Meridianschnittes der vierten Umdrehungsfläche. Obwol die vierte Fläche erzeugt ist durch die Rotation der Linie Θ um die Achse *A B*, so erheischt der vorliegende Fall doch keineswegs, vorerst die Projektionen dieser Linie zu verzeichnen, dadurch den fraglicheu Meridianschnitt zu gewinnen. Benennen wir, der Kürze wegen, die zwei Melonoide nach eines jeden Achse *A C* und *B C*, und es bezeichne *O* einen Punkt der Durchschnittslinie Θ dieser zwei Flächen. *O* sei durch Drehung um *A C* auf den Hauptmeridian dieser Fläche umgelegt worden und nach O'' gefallen. *O* sei aber noch durch Drehen um die Achse *A C* auf den Hauptmeridian auch dieser Fläche umgelegt worden, so muß es nach O''' fallen, wo der Kreis *B F C* von dem aus *C* mit $C O''$ als Radius beschriebenen Bogen durchkreuzt wird, weil $C O''$ oder $C O'''$ den Abstand von *C* und *O* ausdrückt. Nun aber ist die Sehne $A O''$ gleich dem Abstand des Punktes *O* von *A*, so wie $B O'''$ gleich ist dem Abstande desselben Punktes von *B*.

Fig. 354.



Läßt man daher O um $A\,B$ als Achse rotiren, sich in die Ebene von $A\,B\,C$ umzulegen, so muß der Punkt nach 1 links oder rechts von $A\,B$ fallen, wo die aus A und B mit $A\,O'''$ und $B\,O'''$ als Radien beschriebenen Kreise sich kreuzen. —

Einer veränderten Lage von O'' auf den Hauptmeridian von $A\,C$ entspricht ein weiterer Punkt des zu konstruirenden Hauptmeridianes der vierten Rotationsfläche.

Konstruktion der gemeinsamen Punkte $P_1\,P_2\,P_3$ ... ꝛc. aller drei Melonoide. Wir haben hierzu nur den vorigen Weg rückwärts

zu wandern. Denn nachdem die Punkte *1.1*, *2.2* 2c. festgesetzt worden, wo sich die Meridiane der vierten Fläche und des Melonoides AB kreuzen und damit die Projektionen der beiden Flächen gemeinsamen Parallelkreise, so fasse man diese Projektionen nach einander ins Auge und wir beginnen bei *1.1*. Aus A mit einem Radius gleich $A1$ beschreibe man einen Kreisbogen, welcher den Meridian AEC in O'' kreuzt; aus dem Punkte B und mit einem Radius gleich $B1$ beschreibe man einen zweiten Kreis, welcher den Meridian BFC in O''' kreuzt. Aus O'' fälle man auf AC die Senkrechte $O''\alpha$, aus O''' auf BC die Senkrechte $O'''\alpha$. Beide Senkrechte müssen sich auf der Geraden *11* in einem Punkte α kreuzen. Denn α ist, der Konstruktion zufolge, die Projektion eines Punktes im Durchschnitt der zwei Flächen AC, BC; da er aber nach der Rotation um AB nach *1* gefallen war, muß er die Projektion eines Punktes P_1 im Durchschnitte aller drei Melonoide sein. — α gehört einem Parallelkreise von AB, dessen Durchmesser gleich der Sehne *1.1*; man projicirt diesen Kreis in eine Ebene XY, welche auf AB senkrecht steht, er erscheint dort in wahrer Gestalt und wird von der aus α errichteten Senkrechten in α' oder in α'_1 geschnitten. Dies sind die Vertikalprojektionen von zwei allen drei Melonoiden angehörigen Punkten, von welchen α die gemeinsame Horizontalprojektion.

Man findet, bei gleicher Behandlung, auf jeder der Parallelen *2.2*, *3.3* 2c. noch die Projektion eines weiteren gemeinschaftlichen Punktes aller drei Melonoide, sie tragen die Bezeichnung α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ und für jeden findet sich eine doppelte Vertikalprojektion β' oder β'_1, γ' oder γ'_1, so daß im Ganzen sechszehn allen drei Flächen gemeinsame Punkte vorhanden sind, deren eine Hälfte über, die andere unter der Ebene von ABC liegt.

Anmerkung. In jedem Punkte β, γ 2c. müssen sich, wie in α, drei auf AB, AC und BC senkrechte Gerade kreuzen, und dadurch kennzeichnen sich diese Punkte als die gesuchten. So z. B. würde sich eine aus ω auf AC gezogene Senkrechte auch mit *11* kreuzen, aber nicht gleichzeitig auch mit $O''\alpha$.

Zusatz. Die vorstehende Behandlungsweise des Bestimmens solcher Punkte, welche gleichzeitig drei Rotationsflächen angehören, bildet ein interessantes Korallarium zu der Lehre von der Konstruktion des Durchschnittes krummer Flächen. Sie wurde erstmals in Hachette's Traité de géométrie descriptive Paris 1822 entwickelt.

Ergänzende Noten.

Sie enthalten theils Erläuterungen und Zusätze, theils besondere Gegenstände, welche sich nicht füglich in das Vorhergehende einreihen ließen.

I.

Ueber die kürzeste Entfernung zweier geraden Linien, welche nicht in einer und derselben Ebene liegen.

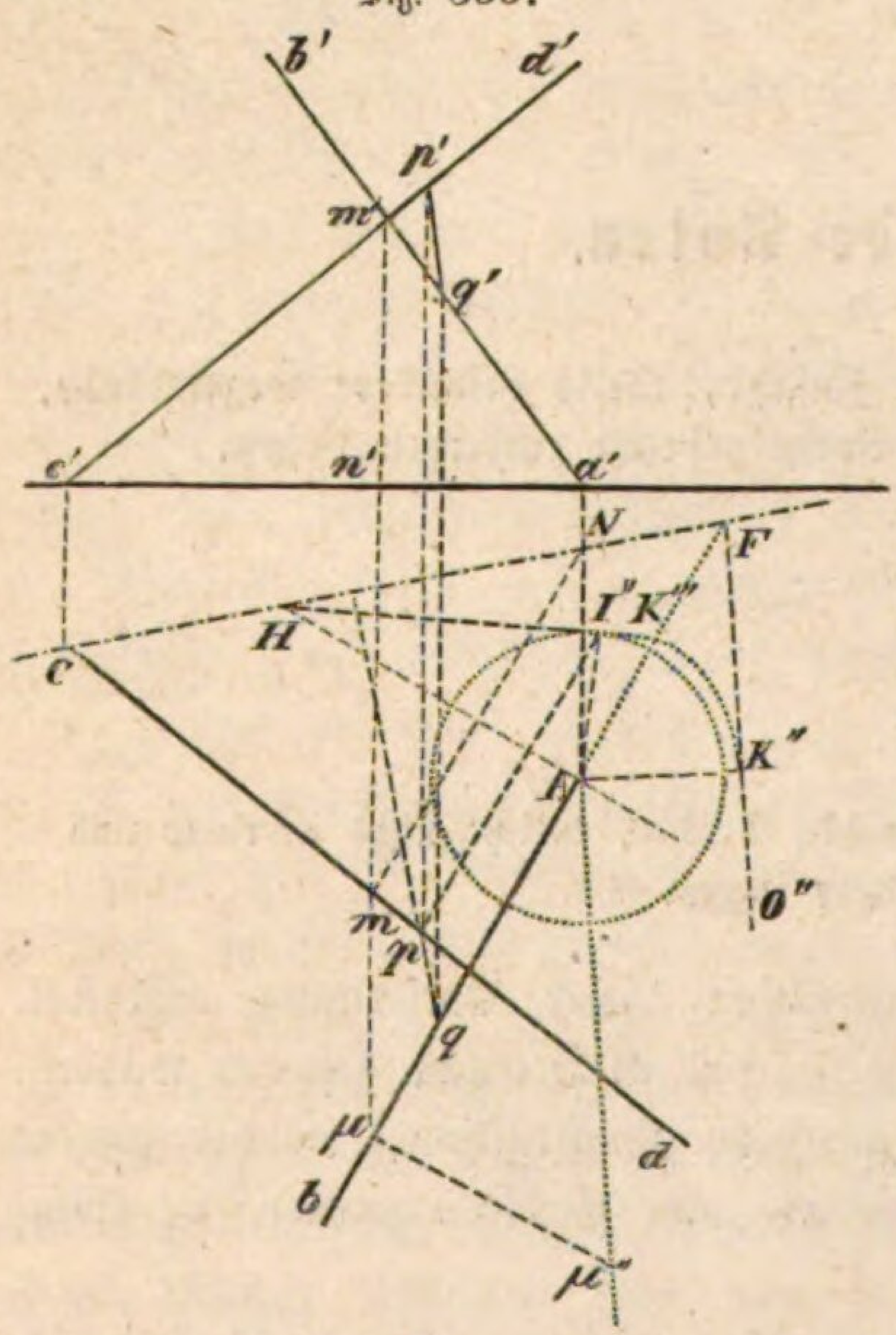
In §. 41 haben wir eine Konstruktion dieser Entfernung erläutert, wobei lediglich gerade Linien und ebene Flächen in Betracht gezogen wurden. Nachstehend eine bereits von Monge gegebene Konstruktion, welcher andere Anschauungen zu Grunde liegen und die als eine zierliche geometrische Kombination geschätzt werden muß.

Die zwei Geraden seien mit I und II bezeichnet. Durch II lege ich eine Ebene E, welche mit I parallel ist. Ich betrachte dies E als eine tangirende Ebene einer Rotations-Cylinderfläche, von welcher I die Achse; ich bestimme die beiderseitige Berührungslinie T. Dies T und die Gerade II werden sich in einem Punkte P kreuzen, in welchem ich eine Senkrechte S auf die Ebene E errichte. S wird auch I in einem Punkte Q durchkreuzen und auf I wie auf II senkrecht stehen, daher ist PQ die kürzeste Entfernung der zwei Geraden nach Lage und Größe. Denn S muß auf I wie auf T senkrecht stehen, ist aber zugleich eine Normale der Cylinderfläche und muß also deren Achse I wie Q rechtwinklig durchschneiden.

Ausführung. (Ab, $a'b'$), **Fig.** *355*, die erste Gerade I; (Cd, $c'd'$) die zweite oder II. Daß beide nicht parallel sind, lehrt der Anblick. Sie schneiden sich auch nicht, weil ihr Schnittpunkt keine andere Vertikalprojektion haben

könnte, als m'; diesem m' aber, als einem Punkte der ersten Geraden, entspricht die Horizontalprojektion μ, und als einem Punkte der zweiten Geraden müßte ihm m als Horizontalprojektion zugehören. Die zwei Geraden liegen also nicht in einer und derselben Ebene. Durch II lege ich eine Ebene E parallel zu I, ihr Horizontalriß ist CN; denn II schneidet in (c', C) die Horizontalebene. Durch einen Punkt (m', m) auf ihr (man wählte gerade diesen zur Ersparung zweier Linien) zog man eine Gerade $(m N, m' a')$ parallel zu I, und diese Parallele traf in $(a' N)$ die Horizontalebene, wodurch CN bestimmt ward. $(m C N, m' c' a')$ ist die Ebene E, weil sie durch II und durch eine Parallele zu I geht. — Die Gerade I nehme ich jetzt als Achse einer Rotations-Cylinderfläche, welche von der Ebene E tangirt wird. Es handelt sich, die zu I parallele Berührungslinie T der Cylinderfläche und der Ebene zu bestimmen. Zu diesem Zwecke lege ich durch (a', A), wo I die Horizontalebene schneidet, eine Ebene K senkrecht auf I. Ihr Riß AH wird senkrecht stehen auf der Projektion Ab; K wird die Cylinderfläche nach einem Kreise schneiden, dessen Centrum in A; K wird ferner die Ebene E nach einer geraden Linie schneiden, welche durch H geht, dem Begegnungspunkte von CN und AH, und welche den Kreis tangirt.

Fig. 355.



Hiernach den Radius des Kreises zu finden, denke ich mir die Ebene K um ihren Horizontalriß AH gedreht, mit sammt dem Kreise und nebst der aus H an ihn gezogenen Tangente in die Horizontalebene niedergelegt. Einen Augenblick angenommen, jener Punkt der Tangente, welcher in der Vertikalebene Ab liegt, käme durch die Umlegung nach K''', so wäre HK''' die umgelegte Tangente, und eine aus A auf sie gefällte Senkrechte AI'' wäre der Radius des mit umgelegten Kreises. Es bleibt somit K''' zu bestimmen. Aber in seiner ursprünglichen Lage gehört der fragliche Punkt

jedenfalls dem Schnitte an, welchen die Vertikalebene $b\,A$ in der Ebene E hervorbringt; dieser Schnitt nun ist eine durch F gehende Parallele zu I. Man lege I und die Parallele durch Drehung der Vertikalebene $b\,A\,F$ in die Horizontalebene nieder, wo erstere nach $A\,\mu''$ fällt ($\mu\,\mu'' = m'\,n'$), und die letztere nach $F\,O''$ parallel zu $A\,\mu''$. Weil sich jedoch die Vertikalebene $b\,F$ und die Ebene K, deren Horizontalriß $A\,H$ ist, nach einer Geraden schneiden müssen, welche auf I senkrecht steht, so fällt diese durch die Umlegung nach $A\,K''$ senkrecht auf $A\,\mu''$ und $A\,K''$ ist nach $A\,K'''$ zu tragen, womit $H\,K'''$ und I'' sich ergeben.

Berührungslinie der Cylinderfläche und der Ebene E. Sie ist parallel zu I und geht durch den Berührungspunkt I'', nachdem dieser wieder in die ursprüngliche Stellung der Ebene K zurückgebracht worden. Bei diesem Zurückbringen nun bewegt sich I'' in einer Vertikalebene $I''\,p$, welche auf $A\,H$ senkrecht steht, also mit $A\,b$ parallel ist; dieselbe Richtung aber muß auch die Projektion der Berührungslinie haben, also ist $A\,p$ auch diese Projektion. Sie kreuzt sich in p mit $c\,d$, welchen Punkt man auf $c'\,d'$ nach p' projicirt. (p, p') ist der Fußpunkt der Geraden, auf welcher die kürzeste Entfernung von I und II gemessen wird. Die Horizontalprojektion $p\,q$ dieser Geraden muß auf dem Risse $C\,F$ senkrecht stehen, q projicirt sich auf $a'\,b'$ nach q' und $p'\,q'$ ist die entsprechende Vertikalprojektion von $p\,q$. Die wahre Größe dieser Geraden $(p\,q, p'\,q')$ muß sich gleich erweisen mit dem Radius $A\,I''$.

II.

Ueber die Konstruktion einer Ebene, welche mit zwei anderen Ebenen bestimmte Winkel bilden soll.

In §. 34 ward die Aufgabe behandelt: durch einen im Raume gegebenen Punkt eine Ebene unter bestimmten Winkeln gegen beide Projektionsebenen zu legen; und wir haben dabei, wie es in jenem ersten Abschnitte unseres Lehrganges erforderlich gewesen, zur Lösung der Aufgabe nur eine Kombination von Ebenen und geraden Linien gebraucht. Nun aber kommt der Rotations-Kegelfläche ausschließlich das Eigenthümliche zu, daß alle ihre geraden Erzeugungslinien, wie alle ihre tangirenden Ebenen, den gleichen Winkel mit der Ebene des Grundkreises der Fläche bilden, so daß die Aufgabe, eine Ebene F der Art zu stellen, daß sie mit einer anderen Ebene G einen bestimmten Winkel W bildet, im Allgemeinen darauf zurückkommt, eine tan-

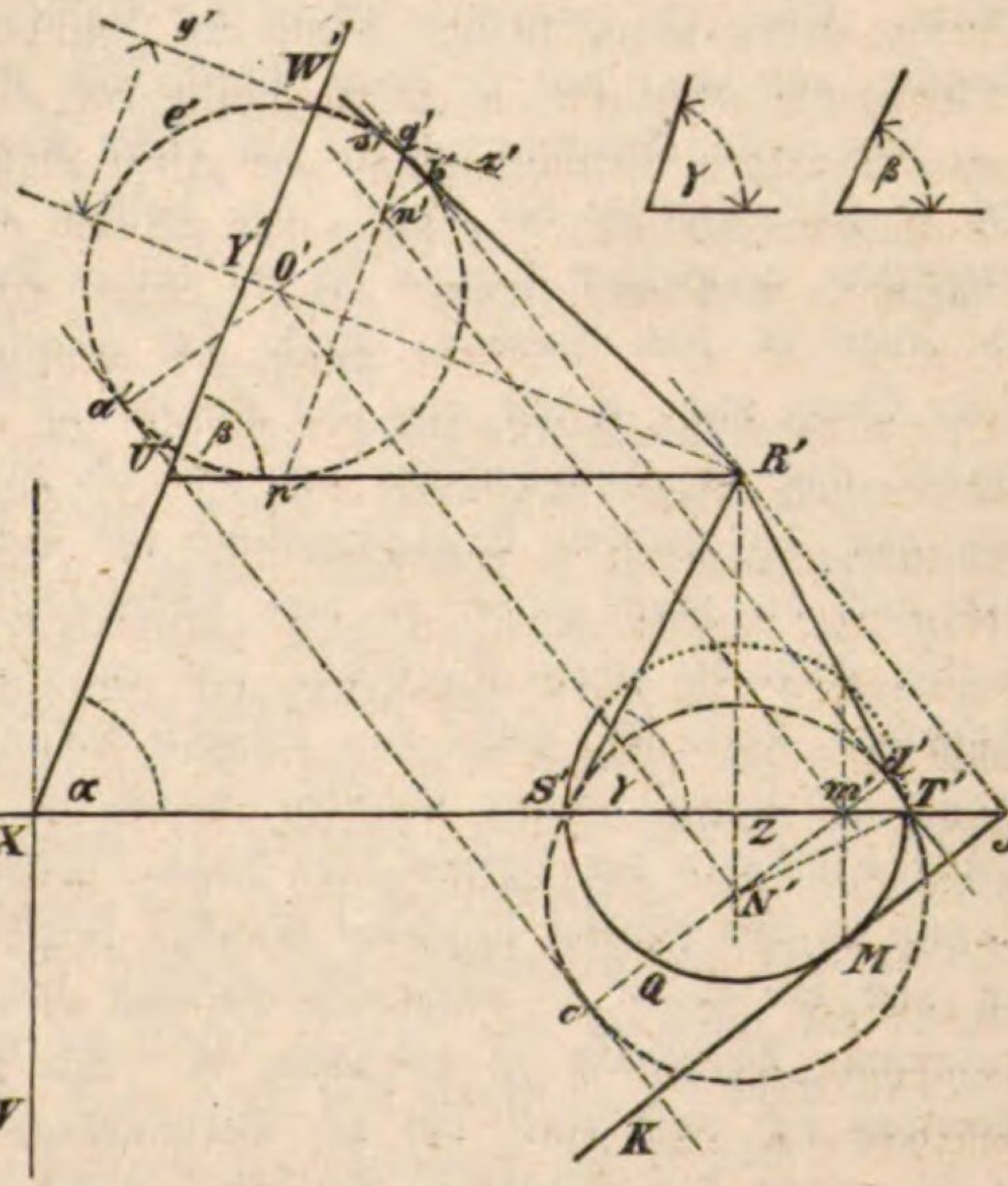
girende Ebene an eine Kegelfläche zu legen, deren Rotationsachse auf G senkrecht steht und deren gerade Erzeugungslinien mit G den Winkel W bilden. In §. 35 findet sich die Aufgabe behandelt: durch eine Gerade ($g\,H$, $g'\,h'$), Fig. *46*, eine Ebene zu legen, welche mit der Horizontalebene unter dem Winkel a schneidet. Ein Blick auf die Figur wird lehren, daß die gesuchte Ebene $J\,K\,M$ rein zu betrachten ist als eine tangirende Ebene der Rotationskegelfläche, deren Scheitel ein beliebiger Punkt (g, g') der gegebenen Geraden und deren Erzeugungslinie ($g\,L''$, $g'\,l''$) mit der Horizontalebene einen Winkel a bildet.

Soll eine Ebene unter bestimmten Winkeln a, b gegen zwei andere Ebenen G und H gelegt werden, so führt dies auf die Inbetrachtnahme von zwei Rotations-Kegelflächen mit gemeinsamem Scheitel S, deren Achsen auf G bezügl. H senkrecht stehen, und deren Erzeugungslinien mit G den Winkel a, mit H den Winkel b bilden. Eine Ebene, welche beide Kegelflächen zugleich berührt, ist die gesuchte. Nach allgemeiner Methode konstruirt man die gemeinsame tangirende Ebene zweier Kegelflächen mit gemeinsamem Scheitel dadurch, daß beide Flächen durch eine und dieselbe Ebene geschnitten werden, und daß man an die entstandenen Schnitte die gemeinsamen Tangenten zieht. Solcher Tangenten sind bei den Schnitten zweier Rotations-Kegelflächen im Allgemeinen vier möglich, und jede Ebene, welche durch eine der Tangenten und durch S geht, entspricht den Bedingnissen der Aufgabe. Es ist der Zweck gegenwärtiger Note, eine Methode der Konstruktion zu zeigen, welche nur die Verwendung von Kreisen und geraden Linien in Anspruch nimmt.

Die Ebenen G, H sollen unter sich einen Winkel α, Fig. *356*, bilden. Eine davon, G z. B., nehmen wir als horizontale Projektionsebene an und stellen die vertikale Projektionsebene senkrecht gegen die Durchschnittslinie von G und H, sodaß dieser Durchschnitt $V\,X$ als Horizontalriß von H erscheint und senkrecht steht gegen die Grundlinie $X\,J$. Mit dieser Grundlinie muß der Vertikalriß von H, nämlich die Gerade $X\,W'$, einen Winkel α bilden. Mit der Horizontalebene soll nun die gesuchte Ebene F einen Winkel γ, mit $V\,X\,W'$ einen Winkel β bilden. In der vertikalen Projektionsebene wählten wir einen beliebigen Punkt R' als gemeinsamen Scheitel der zwei Rotations-Kegelflächen und fällten aus ihm auf die beiden ersten Ebenen zwei Perpendikel, von welchen $R'\,Z$ senkrecht auf $X\,J$ und $R'\,Y'$ senkrecht auf $X\,W'$ fielen. Den Hauptmeridianschnitt der ersten Kegelfläche bilden die zwei Geraden $R'\,S'$, $R'\,T'$, welche $J\,X$ unter Winkeln gleich γ treffen. Als Grundkreis

dieser Fläche erscheint somit der Kreis $S'QT'$, von welchem $S'T'$ ein Durchmesser. Als Hauptmeridianschnitt der zweiten Kegelfläche erscheinen die Geraden $R'U'$, $R'W'$, welche mit XW' Winkel gleich β machen. Als Grundkreis dieser zweiten Fläche ergiebt sich ein Kreis vom Durchmesser $W'U'$. Man ziehe in der vertikalen Projektionsebene $T'N'$ senkrecht auf $R'T'$, markire ihren Schnitt N' mit $R'Z$ und beschreibe aus N' mit $N'T'$ einen Kreis, welcher die Seiten $R'S'$, $R'T'$ in S' und T' tangiren wird. Rotirt dieser Kreis nebst seinen Tangenten $R'S'$, $R'T'$ um die Achse $R'Z$, so entstehen eine Kugel- und eine Kegelfläche, welche sich gegenseitig nach dem Kreise ($S'QT'$, $S'T'$) tangiren, der Art, daß jede berührende Ebene der Kugel, deren Berührungspunkt auf genanntem Kreise liegt, auch die Kegelfläche tangirt und zwar nach derjenigen geraden Erzeugungslinie, welche durch den Berührungspunkt der Kugel geht. — Man beschreibe in den Winkel $U'R'W'$ einen Kreis $a'b'e'$ von gleichem Radius wie $N'T'$ (in einer Entfernung $= N'T'$ zieht man die Gerade $y'z'$ parallel mit $R'Y'$, man markirt ihren Kreuzungspunkt s' mit $R'W'$ und die Halbirungslinie des Winkels $y's'R'$ wird auf $R'Y'$ das Centrum O' abschneiden, wobei $R'O' = R's'$ werden muß). Durch die Rotation dieses zweiten Kreises nebst den Tangenten $R'U'$, $R'W'$ um die Achse $R'Y'$ entsteht eine zweite, der vorigen gleiche Kugel, und eine sie tangirende Kegelfläche. Beide berühren sich nach einem Kreise, welcher von den Berührungspunkten $p'q'$ beschrieben wird und der sich als die Parallele $p'q'$ zu XW' projicirt. Eine jede tangirende Ebene diese zweiten Kugel, deren Berührungspunkt genanntem Kreise $p'q'$ angehört,

Fig. 356.



tangirt auch die zweite Kegelfläche nach jener geraden Erzeugungslinie, welche durch den Berührungspunkt der Kugel geht. — Nachdem die Mittelpunkte beider Kugeln durch die Gerade $N' O'$ verbunden worden, denke man sich eine beide Kugeln berührende Cylinderfläche, von welcher $N' O'$ die Achse ist. Diese und jede der Kugeln werden sich in einem Kreise tangiren, deren Ebenen auf der Vertikalebene senkrecht stehen und welche sich in der Vertikalprojektion als die zwei auf $O' N'$ senkrechten Kreisdiameter $a' b'$, $c' d'$ darstellen. Eine jede tangirende Ebene der Cylinderfläche tangirt auch die zwei Kugeln, und zwar jede in einem Punkte des Kreises $a' b'$ oder $c' d'$.

Die beiden Berührungskreise der ersten Kugel $S' T'$ und $c' d'$ schneiden sich in zwei Punkten der Kugel, von welchen m' die gemeinsame Vertikalprojektion, desgleichen kreuzen sich die beiden Kreise $a' b'$, $p' q'$ auf der zweiten Kugel in zwei Punkten, welche sich gemeinsam nach n' projiciren. — Jede Ebene nun, welche eine der Kugeln an einem dieser Punkte tangirt, berührt auch die Cylinderfläche und die der Kugel umschriebene Kegelfläche, jede nach der geraden Erzeugungslinie des Berührungspunktes; sie berührt also auch die zweite Kugel in dem entsprechenden Kreuzungspunkt der zwei Kreise, sowie die zweite Kegelfläche, und entspricht somit den Foderungen der Aufgabe. Diese läßt somit eine doppelte Lösung zu, eine der zwei Ebenen tangirt die Kugeln in den Punkten, wovon m' und n' die Projektionen und welche diesseits der Vertikalebene liegen, während die andern Ebenen die Kugeln in den jenseits liegenden Punkten berühren. Beide Ebenen schneiden sich nach der zu $O' N'$ parallelen Geraden $R' J$, welche auch als deren gemeinsamer Vertikalriß zu betrachten ist. Die Kreisebenen $S' T'$ und $c' d'$ schneiden sich nach einer auf der Vertikalebene senkrecht stehenden Geraden $m' M$, welche den Grundkreis der ersten Kegelfläche in M kreuzt. Zieht man hier die Kreistangente MK, so hat man damit den Horizontalriß der ersten gesuchten Ebene, welcher sich auf XZ mit dem Risse $R' J$ kreuzen muß. Als Horizontalriß der zweiten fände sich die zweite durch J gehende Kreistangente.

Anmerkung. Hätte man den beiden in die Kegelflächen eingeschriebenen Kugeln ungleiche Diameter gegeben, so wäre an die Stelle der beide Kugeln tangirenden Cylinderfläche eine eben solche Kegelfläche getreten, deren Scheitel jenseits der kleineren Kugel läge. Immerhin aber würden die Berührungspunkte, welche sich nach $m' n'$ projiciren, einer geraden Erzeugungslinie dieser dritten Kegelfläche angehören. Vergleiche man übrigens über Kugeln und die sie tangirende Kegelfläche nachfolgende Nummer.

III.

Tangirende Ebenen an Kugelflächen.

I. **Aufgabe.** Durch eine gerade Linie O soll eine tangirende Ebene an eine gegebene Kugel gelegt werden.

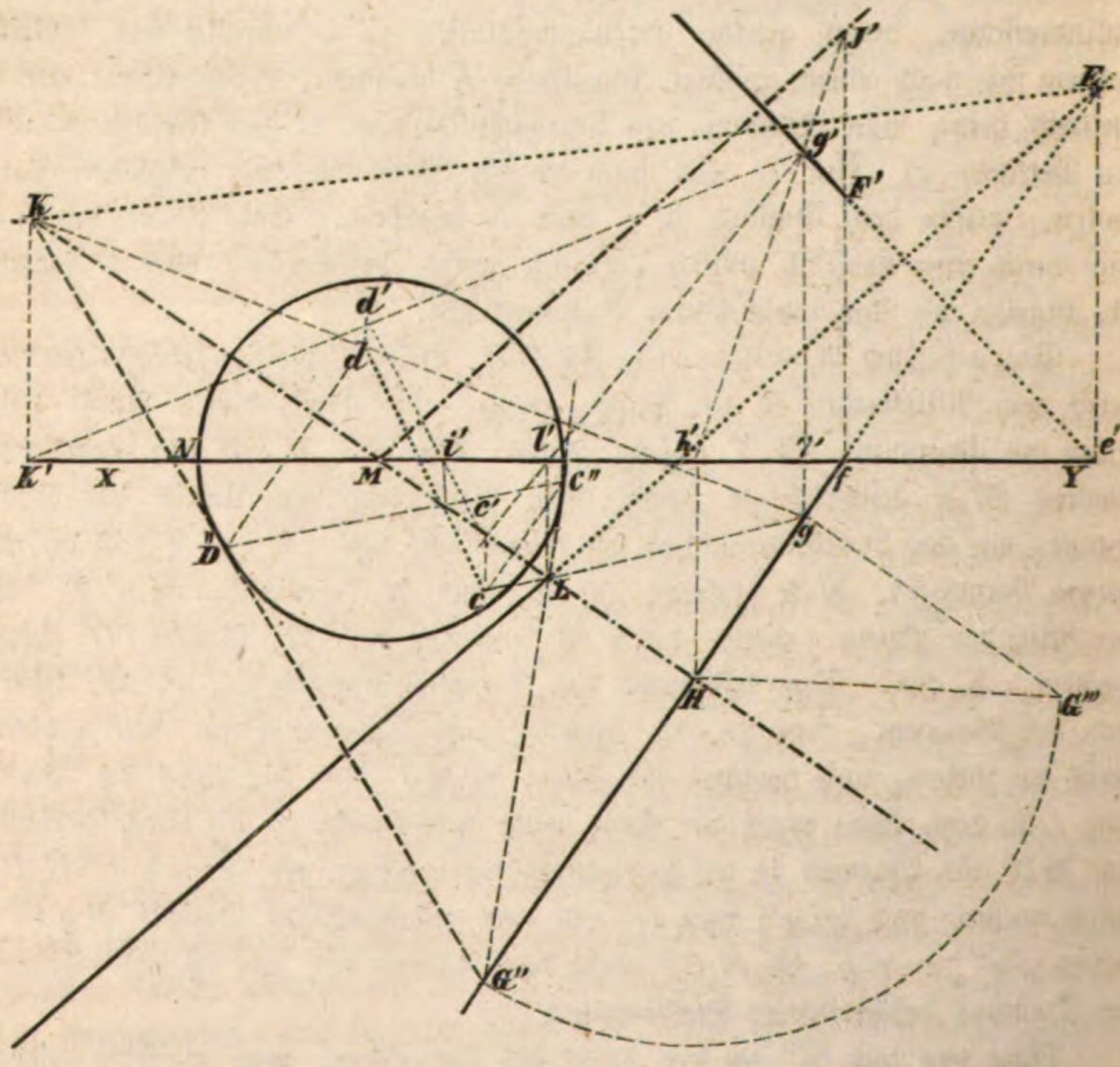
Erste Konstruktion. Man denke sich eine die Kugel tangirende Cylinderfläche, deren gerade Erzeugungslinien zu O parallel sind. Beide werden sich nach einem größten Kugelkreise K berühren, dessen Ebene auf O senkrecht steht; man bestimme den Durchschnittspunkt G der Kreisebene und der Geraden O. Aus G ziehe man an den Kreis die zwei möglichen Tangenten, welche den Umfang in C oder D berühren. Eine Ebene durch O und durch eine oder die andere Tangente gelegt, berührt in C oder D sowohl die Kugeln wie ihre umschriebene Cylinderfläche.

Graphische Ausführung. Fig. 357. Beide Projektionsebenen wurden durch den Mittelpunkt M der Kugel gelegt, und durch diesen Punkt geht somit die Grundlinie XY unserer Figur. Ein aus M mit dem gegebenen Radius MN beschriebener Kreis stellt gleichzeitig den Umriß der Horizontal- wie der Vertikalprojektion der Kugelfläche dar; $(Ef, e'F')$ ist die gegebene Gerade O. MH senkrecht auf Ef und MJ' senkrecht auf $e'F'$ sind die Risse der Ebene, welche durch M senkrecht auf die Gerade O gelegt worden. §. 30. Man bestimmte den Durchschnittspunkt (g, g') der Ebene und der Geraden. Aus (g, g') blieben zwei Tangenten an den größten Kreis zu ziehen, nach welchen die Ebene HMJ' und die Kugel sich schneiden. Zu dem Ende ward der Kreis nebst dem Punkte (g, g') durch Drehung um MH als Charnier in die Horizontale niedergelegt, wo er nach $C''ND''$ fallen mußte, und (g, g') nach G'' (in dem rechtwinkligen Dreiecke HgG''', worin $gG''' = \gamma' g'$, ist HG''' gleich dem Radius des von (g, g') während der Drehung beschriebenen Kreisbogens).

Man zog aus G'' an den Kreis die Tangenten; man markirte erstlich deren Berührungspunkte C'', D'', zweitens ihre Kreuzungspunkte L, K mit dem Charnier und drittens zog man die Sehne $C''D''$. Ward der Kreis nebst den Tangenten und der Sehne ihrer Berührungspunkte durch Zurückdrehen um MH wieder in die ursprüngliche Stellung verbracht, so fiel die erste Tangente nach $(gL, g'l')$, die zweite nach $(gK, g'k')$. C'' und D'' beschreiben Kreisbögen, deren Ebenen auf MH senkrecht stehen. Die auf MH senkrechten Geraden $C''c$, $D''d$ sind die Projektionen dieser Kreis-

bögen, deshalb c, d die Horizontalprojektionen der gesuchten Berührungspunkte und c', d' deren Vertikalprojektionen, wenn c auf $g' l'$ nach c' und d auf $g' k'$ nach d' projicirt wird; $c\,d$ und $c'\,d'$ sind die beiden Projektionen der Sehne $C''\,D''$ in deren ursprünglicher Lage. In E durchschneidet die Gerade O die Horizontalebene, daher $L\,E$ Horizontalriß der ersten

Fig. 357.



tangirenden Ebene und $K\,E$ Horizontalriß der zweiten. Die zugehörigen Vertikalrisse gingen durch F' und durch jeden Kreuzungspunkt des bezüglichen Horizontalrisses mit $X\,Y$. Außerdem werden die Risse senkrecht stehen müssen auf den nach (c, c') oder (d, d') gerichteten Kugelradien.

II. Zweite Konstruktion. Auf der Geraden O wähle ich irgend einen Punkt E als Scheitel einer die Kugel tangirenden Kegelfläche und bestimme deren gegenseitige Berührungslinie. Sie wird ein Kreis sein, dessen

Ebene senkrecht steht auf der Verbindungslinie E mit dem Kugelcentrum. Durch O lassen sich an diese Kegelfläche zwei berührende Ebenen legen, eine jede von ihnen berührt auch die Kugel in einem Punkte des Berührungskreises beider Flächen und erfüllt die Forderung der Aufgabe.

Wähle ich sofort auf der Geraden O einen zweiten Punkt F als Scheitel einer zweiten die Kugel tangirenden Kegelfläche und bestimme auch deren Berührungskreis mit der Kugel. Erst die zwei durch O gehenden tangirenden Ebenen berührt auch die Kugel in einem Punkte des zweiten Berührungskreises und diese Punkte können somit nur die Kreuzungspunkte der zwei Berührungskreise sein. (Vergl. §. 288.)

Diese auf alle krummen Flächen anwendbare Konstruktionsart erscheint bei der Kugel unter den einfachsten Verhältnissen, besonders wenn man, wie es in Fig. *358* wiederum geschehen, die beiden Projektionsebenen durch das Kugelcentrum gehen läßt. Dies sei der Punkt M, und der aus diesem Punkte mit dem Radius $M\,O$ beschriebene Kreis Umriß von beiden Projektionen der Kugel. ($E f$, $e' F'$) sei die gegebene Gerade O. Sie schneidet in E die Horizontalebene, in F' die Vertikalebene. E ward als Scheitel einer ersten, die Kugel tangirenden Kegelfläche genommen. Die Gerade $G\,H$ verbindet die Berührungspunkte der zwei aus E an den Kreis $G\,O\,H$ gezogenen Tangenten und ist die Horizontalprojektion des Berührungskreises von Kugel- und Kegelfläche. Als Scheitel der zweiten, die Kugel tangirenden Kegelfläche ward der Punkt (F', f') erkoren. Nachdem aus F' die Tangente $F' K'$, $F' L'$ an den Kreis $G\,O\,H$ gezogen und ihre Berührungspunkte durch die Sehne $K' L'$ verbunden waren, erscheint diese Sehne als die Vertikalprojektion des Berührungskreises der Kugel und der zweiten Kegelfläche. Die zwei Berührungskreise kreuzen sich in den gesuchten Berührungspunkten (c, c'), (d, d'). Es erweist sich aber nicht nöthig, zum Bestimmen dieser Punkte die andere Projektion eines jeden der zwei Kreise zu verzeichnen, denn die Ebenen der zwei Kreise schneiden sich nach einer Geraden, welche die Berührungspunkte verbindet, und $G\,H$ ist die Horizontalprojektion, $K' L'$ die Vertikalprojektion dieser geraden Durchschnittslinie. Sie dringt in (i', I) durch die Horizontalebene, in (n, n') durch die Vertikalebene.

Diese Gerade ward sammt dem ersten Berührungskreise in die Horizontalebene niedergelegt, indem man beide um den Durchmesser $G\,H$ drehte. Der Kreis fiel nach $G\,C''$, $H\,D''$. Von der Geraden blieb der Punkt I auf dem Charnier unverändert und ihr Punkt (n, n') fiel nach N'', indem man die Höhe $n\,n'$ senkrecht gegen $G\,H$ von n nach N'' trug. $I\,N''$ giebt

die Richtung der umgelegten Geraden; sie kreuzt in C'', D'' den umgelegten Kreis. Man zog $D''d$ und $C''c$ senkrecht gegen GH, so waren c, d die Horizontalprojektionen der zwei Berührungspunkte zurückversetzt in ihre ursprüngliche Stellung. Die zwei Punkte projicirte man alsdann auf die Gerade $K'L'$ nach c', d' und (c, c'), (d, d') sind die Berührungspunkte der

Fig. 358.

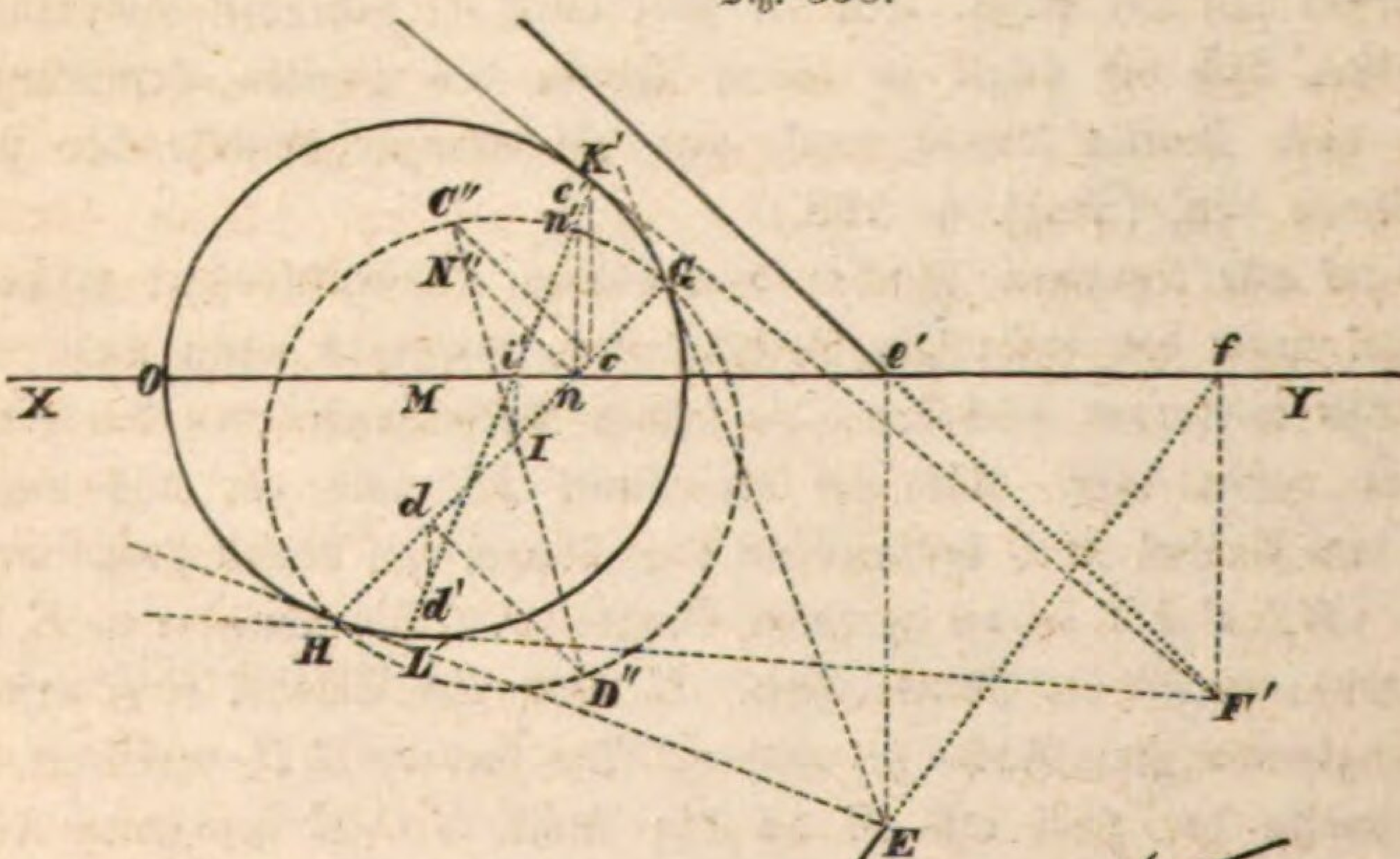
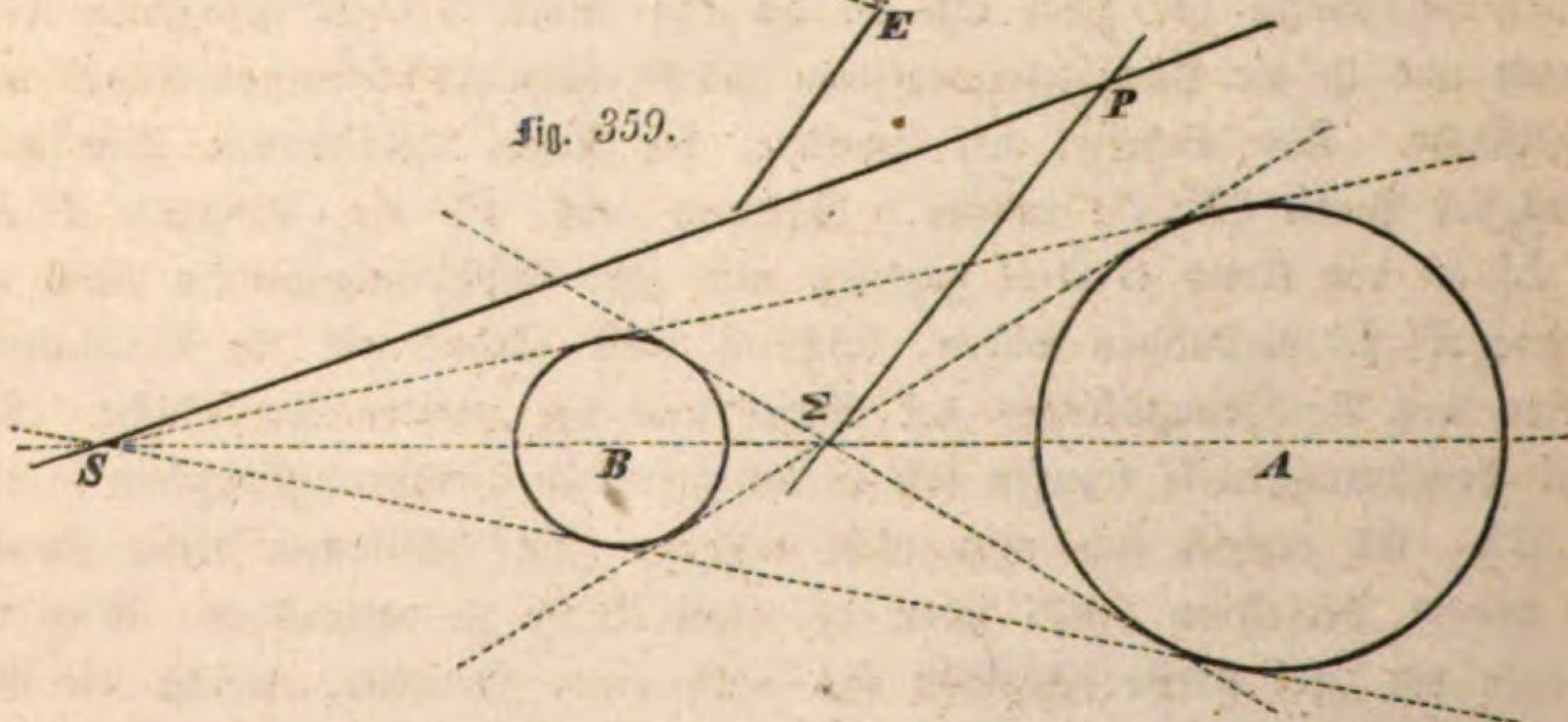


Fig. 359.



Kugel mit den beiden Ebenen, welche durch O tangirend an die Kugel gelegt werden können. Diese Ebenen stehen senkrecht auf den Radien der Berührungsprunkte; ihre Horizontalrisse werden sich in E kreuzen, ihre Vertikalrisse in F', die ersteren in senkrechter Richtung gegen Mc, Md, die letztere senkrecht gegen Mc', Md'.

Anmerkung. Als erste Projektionsebene hätte diejenige genommen werden können, welche durch die Gerade O und durch das Kugelcentrum geht;

dadurch würde die Konstruktion eine Form wie in Fig. 250 (Seite 444) gewonnen haben und eine zweite Projektionsebene entbehrlich geworden sein. Auch die in §. 368 entwickelten Folgerungen hätten sich ergeben. Allein wir bezweckten im Voranstehenden hauptsächlich konstruktive Uebungen.

III. Aufgabe. Durch einen Punkt P im Raume soll eine Ebene gleichzeitig tangirend an zwei Kugeln A und B gelegt werden?

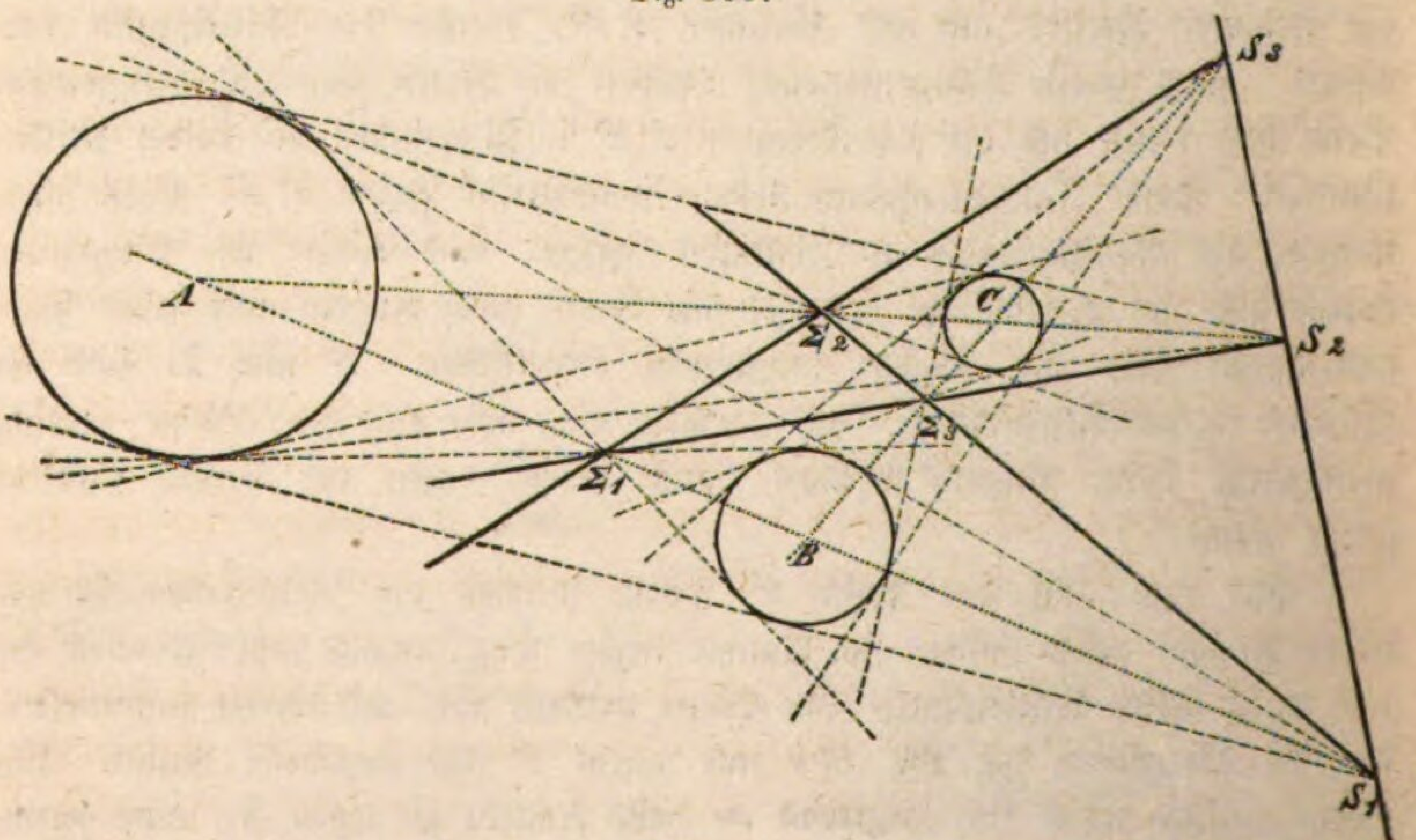
Aus P läßt sich der Kugel A eine Kegelfläche umschreiben, und eine andere Kegelfläche der Kugel B. Eine gemeinsame berührende Ebene beider Kegelflächen würde gleichzeitig auch jede der Kugel berühren. Somit hätten wir den in der Note II behandelten Fall vor uns, nur soll er hier aus allgemeinerem Gesichtspunkte aufgefaßt werden. — An zwei Kreise, Fig. 359, können zwei gemeinschaftliche Tangentenpaare gezogen werden. Das erste Paar berührt beide Kreise von gleicher Seite und kreuzt sich in S jenseits des kleineren Kreises auf der Geraden AB, welche die Mittelpunkte verbindet. Das zweite Tangentenpaar berührt die Kreise von entgegengesetzter Seite und kreuzt sich auf der Geraden AB in Σ zwischen den beiden Mittelpunkten. Beide Tangentenpaare liegen symmetrisch gegen AB. Wird diese Gerade als Rotationsachse in Thätigkeit gesetzt, und Kreise wie Tangenten drehen sich um dieselbe, so erzeugen die Kreise zwei Kugeln und jedes Tangentenpaar eine die Kugeln tangirende Kegelfläche. S und Σ sind die Scheitel dieser Kegelflächen. Es leuchtet ein, wie eine jede Ebene, welche gleichzeitig beide Kugeln berührt, auch durch einen der beiden Scheitel gehen müsse.

Wie nun auch der Punkt P, durch welchen die berührenden Ebenen beider Kugeln gehen sollen, im Raume liegen mag, immer läßt sich durch ihn und durch beide Mittelpunkte eine Ebene denken, und wir dürfen unterstellen, dies sei die Ebene der Fig. 359 und darin P der gegebene Punkt. Die Ebene, welche durch ihn tangirend an beide Kugeln zu legen ist, muß jedenfalls durch S oder Σ gehen, also durch eine gerade Linie von bestimmter Stellung. Aber jede Ebene, welche durch PS oder $P\Sigma$ tangirend an eine der zwei Kugeln gelegt ist, tangirt nothwendig auch die andere. Dadurch ist die Aufgabe zuuückgebracht auf die vorhergehende (II), welche lautet: durch eine gegebene Gerade eine tangirende Ebene an eine bestimmte Kugel zu legen, und man sieht, wie vier Ebenen gefunden werden, deren jede den Bedingnissen der Aufgabe Genüge leistet.

IV. Aufgabe. Es soll eine gemeinsame tangirende Ebene an drei bestimmte Kugeln gelegt werden.

Durch die Mittelpunkte A, B, C der drei Kugeln läßt sich eine Ebene legen und dies soll die Ebene der Figur sein, wobei die drei gegebenen Kreisumfänge als die Schnitte der Kugeln durch diese Ebene auftreten. Nachdem die Mittelpunkte paarweise durch gerade Linien verbunden worden, zieht man an den ersten und zweiten Kreis die gemeinsamen Tangenten und bestimme damit auf der Geraden AB die Scheitel S_1 und Σ_1 der zwei Kegelflächen, welche die erste und zweite Kugel gemeinsam tangiren. In gleicher Weise werden zweitens auf der Geraden AC die Scheitel S_2 und Σ_2 der beiden Kegelflächen bestimmt, welche die erste und dritte Kugel tangiren; drittens endlich auf der Geraden BC die Scheitel S_3 und Σ_3 der beiden die zweite und dritte Kugel tangirenden Kegelflächen.

Fig. 360.



Die gesuchte Ebene nun, insofern sie die erste und zweite Kugel berührt, muß durch einen der beiden Scheitel S_1 oder Σ_1 gehen; insofern sie die erste und dritte Kugel berührt, muß S_2 oder Σ_2 in ihr liegen, und als berührende Ebene der Kugel 2 und 3 muß sie durch S_3 oder Σ_3 gehen. In der Ebene, welche die drei Kugeln berührt, liegen somit drei von den sechs Scheiteln, und weil diese Scheitel auch in der Ebene der drei Mittelpunkte enthalten sind, liegen sie in dem Durchschnitte zweier Ebenen, also in gerader Linie.

Aber die sechs Scheitel, zu je dreien verbunden, reihen sich nach folgenden vier Gruppen in je eine gerade Linie:

$$S_1\ S_2\ S_3\ ,\ S_1\ \Sigma_2\ \Sigma_3\ ,\ \Sigma_1\ S_2\ \Sigma_3\ ,\ \Sigma_1\ \Sigma_2\ S_3.$$

Denn unter den möglichen Verbindungen der Scheitel zu je drei müssen ausgeschlossen werden: Erstens diejenigen, worin S_1 und Σ_1, oder S_2 und Σ_2, oder endlich S_3 und Σ_3 vorkommen, weil eine und dieselbe Ebene nicht die beiden eine und dieselbe Kugel umhüllenden Kegelflächen berühren kann; zweitens jene, worin einer der drei inneren Scheitel $\Sigma_1\ \Sigma_2\ \Sigma_3$ verbunden vorkommt mit zwei von den äußeren Scheiteln $S_1\ S_2\ S_3$, weil diejenige Ebene, welche durch zwei von den äußeren Scheiteln $S_1\ S_2\ S_3$ geht, nothwendig auch den dritten enthält; drittens die Verbindung $\Sigma_1\ \Sigma_2\ \Sigma_3$, weil eine Ebene, welche zwei Kegelflächen mit innerem Scheitel berührt, jedenfalls noch durch einen äußeren Scheitel gehen muß. Es ergeben sich somit als fraglich nur die vier obigen Verbindungen.

Da man nun die vier geraden Linien kennt, durch deren jede die gemeinsame tangirende Ebene der drei Kugeln gehen kann, so kommt damit die Aufgabe wieder dahin zurück, daß durch eine der vier Geraden eine tangirende Ebene an eine der drei Kugeln gelegt wird, denn diese berührt nothwendig auch jede der beiden andern Kugeln. Weil aber diese letzte Aufgabe jedesmal eine doppelte Lösung zuläßt, so giebt es überhaupt acht verschiedene Ebenen, deren jede gleichzeitig die drei Kugeln berührt, und diese acht Ebenen durchschneiden sich paarweise nach vier geraden Linien, welche in der Ebene der drei Mittelpunkte liegen.

Anmerkung. Das Ergebniß der vorstehenden Konstruktion läßt sich als besonderer Fall eines allgemeinen Satzes betrachten, welcher nach Monge also lautet:

Es sind im Raume vier bestimmte Kugeln gegeben; denkt man sich nun die sechs Kegelflächen, welche die paarweise genommenen Kugeln von außen berühren, so gehören die sechs Scheitel dieser Kegelflächen einer und derselben Ebene an und reihen sich in dieser nach den Durchschnitten von vier geraden Linien. Die sechs andern tangirenden Kegelflächen haben ihre Scheitel zwischen je zwei von den Kugeln und wiederum liegen auch je drei dieser sechs Scheitel in einer Ebene mit dreien der ersten.

IV.

Das Pascal'sche Sechseck.

I. **Lehrsatz.** In einen Kegelschnitt ist ein Sechseck einbeschrieben: werden davon die gegenüberliegenden Seiten, nämlich die erste und vierte, die zweite und fünfte, die dritte und sechste verlängert, bis sie sich in der genannten Ordnung schneiden, so liegen die drei Durchschnittspunkte in gerader Linie.

Mittel zum Beweise. Lemma. In einem Kreise, Fig. *361*, ist ein Sechseck $ABCDEF$ einbeschrieben, in welchem zwei Seitenpaare, AB und DE, BC und EF parallel sind, dann müssen es auch die beiden andern Seiten AF und CD sein.

Beweis. Der Voraussetzung zufolge ist der Winkel ABC gleich dem Winkel DEF, daher auch Bogen $ABC =$ Bogen DEF. Zieht man die Konstruktionslinie CF, so ist Winkel $AFC =$ Winkel EFC und dies sind Wechselwinkel in Bezug auf CF. Daher AF parallel zu CD.

Man nehme jetzt eine neue Ebene an, welche mit der Ebene des Kreises nicht parallel ist, und außerhalb der Ebene einen festen Punkt S, betrachte diesen als Pol oder Auge und projicire von ihm aus die Fig. *361* perspektivisch in die neue Ebene, so wird dadurch der Kreis sich in einen Kegelschnitt umwandeln, und das Sechseck wiederum in ein dem Kegelschnitt eingeschriebenes Sechseck, dessen Seiten aber nicht mehr paarweise parallel sind. Man bezeichne in Fig. *361* die Seiten AB, BC, CD .... der Reihe nach mit *1, 2, 3, 4, 5, 6*; man benenne ferner in der entstandenen perspektivischen Projektion den Begegnungspunkt von *1* und *4* mit L, den Begegnungspunkt von *2* und *5* mit K, den Begegnungspunkt von *3* und *6* mit J, so behaupte ich, daß J, K, L in gerader Linie liegen. Denn man denke sich durch S eine Parallele P_1 mit *1* und *4* gezogen, so wird diese die neue Projektionsebene in einem Punkte L schneiden, welcher zugleich der Kreuzungspunkt der Projektionen von *1* und *4* ist (§. 359). Eine durch S gehende Parallele P_2 mit den Seiten *2* und *5* schneidet die neue Projektionsebene in einem Punkte K, dem Kreuzungspunkte der Projektion von *2* und *5*. Eine Parallele P_3 mit *3* und *6* schneidet die Projektionsebene in einem Punkte J, dem Kreuzungspunkte der Projektionen von *3* und *6*. Aber die Geraden P_1, P_2, P_3, welche sich in S kreuzen, sind zur Ebene der Fig. *361* parallel,

sie liegen daher in einer zu dieser parallelen Ebene und J, K, L gehören dem Durchschnitte zweier Ebenen an, also einer geraden Linie.

II. In dem Vorhergehenden ward die Stellung des Auges S sowie der neuen Projektionsebene an keinerlei Bedingung geknüpft: es kann daher die Projektion des Kreises eine Ellipse werden, wie in Fig. 362, oder irgend ein anderer Kegelschnitt; die Sechseckseiten können in jeder Weise sich äußern, aber stets werden J, K, L in gerader Linie liegen.

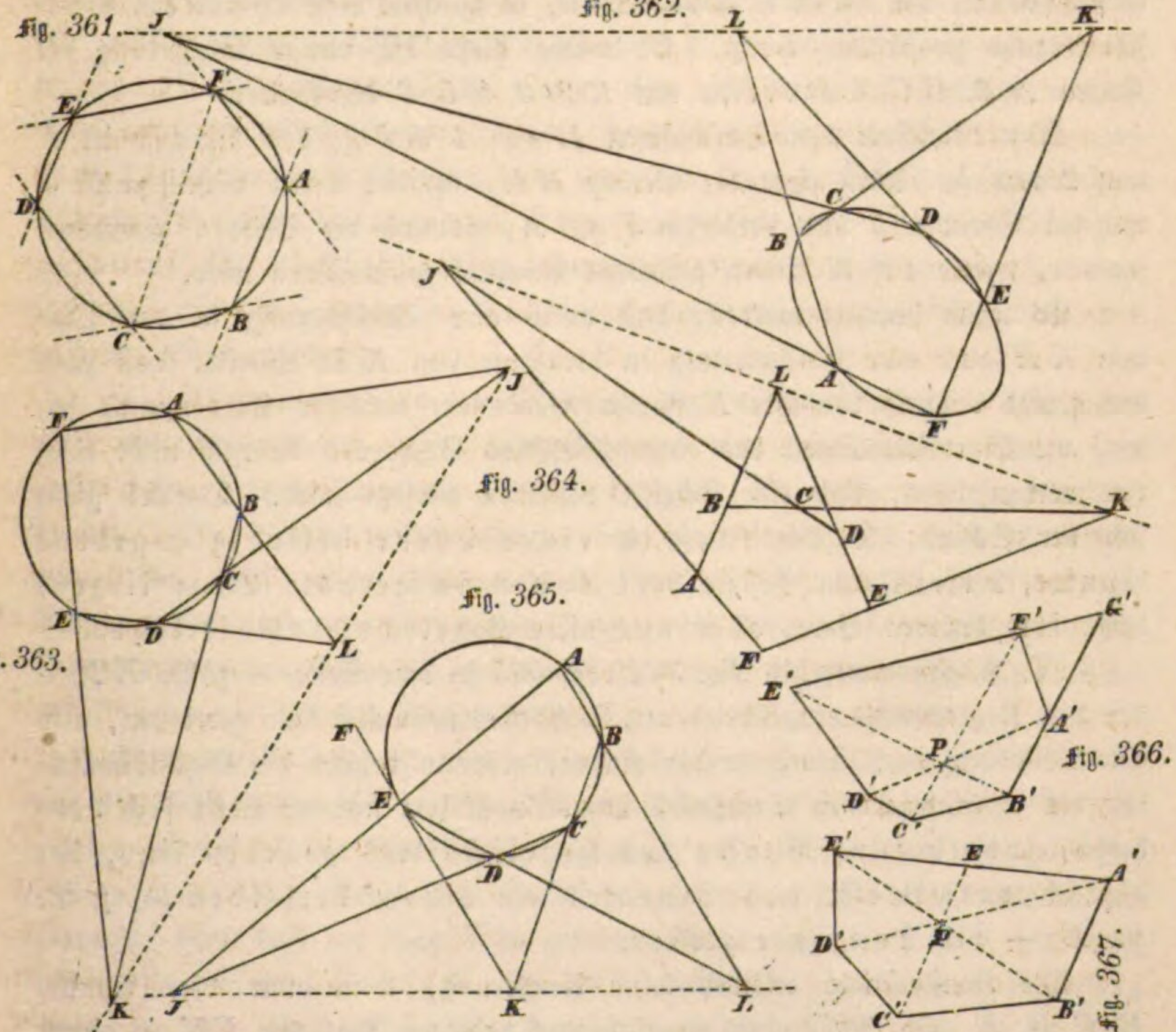


Fig. 361. Fig. 362. Fig. 363. Fig. 364. Fig. 365. Fig. 366. Fig. 367.

Die Projektionsebene könnte parallel liegen zu einem der drei Seitenpaare der Fig. 361, z. B. parallel zu AB und DE, und in diesem Falle würden die Projektionen dieser zwei Seiten unter sich und zur Geraden JK parallel erscheinen.

Endlich könnte die Projektionsebene eine solche Lage gegen die Ebene der Fig. *361* erhalten haben, daß die entstandene Projektion des Kreises als antiparalleler Schnitt der projicirenden Kegelfläche erschiene (§. 480), und diese Projektion wäre wiederum ein Kreis wie in Fig. *363*.

III. Sind fünf Punkte A, B, C, D, E eines Kegelschnittes gegeben, Fig. *362* oder *364*, so können beliebige weitere Punkte der Kurve lediglich mit Hilfe von geraden Linien oder des Lineales bestimmt werden; denn nachdem durch E in beliebiger Richtung eine Gerade KE gezogen worden, handelt es sich darum, den Punkt F zu bestimmen, in welchem diese Gerade den Kegelschnitt zum zweitenmal kreuzt. Es werde hiezu die vorige Bezifferung der Seiten $AB, BC, CD \ldots$ 2c. mit *1, 2, 3, 4, 5, 6* beibehalten.

Man bezeichnet den Durchschnitt L von *1* und *2*, den Durchschnitt K von *2* und *5*. Man zieht die Gerade KL, markirt deren Schnittpunkt J mit der Geraden *3* und verbindet J mit A, wodurch die Seite *6* gewonnen worden, welche auf KE den gesuchten Punkt F abschneiden wird.

Es wolle beachtet werden, daß durch eine Veränderung in der Lage von KE auch eine Veränderung in der Lage von KL eintritt, daß aber das jetzige dadurch bedingte F immer wieder ein richtiger Kurvenpunkt sei, weil die Eigenthümlichkeit des eingeschriebenen Sechseckes dadurch nicht alterirt werden kann, daß ein Scheitel desselben versetzt wird. Daraus giebt sich der Schluß: **Durch fünf in einer Ebene beliebig gegebene Punkte, wofern nur keine drei davon in gerader Linie liegen, läßt sich immer eine, aber nur eine Kegelschnittslinie legen.**

IV. Angenommen, in Fig. *364* oder *365* sei eine Seite — z. B. EF — des dem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechseckes unendlich klein geworden, also ihrer Richtung nach Tangente der Kurve, alsdann besteht die Eigenthümlichkeit des eingeschriebenen Sechseckes immer noch fort und es **läßt sich deshalb, sobald fünf Punkte des Kegelschnittes gegeben sind, lediglich vermittelst des Lineales an einem derselben — z. B. an E — die Tangente ziehen.**

Die Konstruktion erleidet keine Aenderung, wenn nur vier Punkte, B, C, D, E, Fig. *365*, eines Kegelschnittes nebst der Tangente EK an einem derselben gegeben sind und weitere Punkte der Kurve bestimmt werden sollen. Denn nachdem BA in beliebiger Richtung gezogen worden, markirt man ihren Begegnungspunkt L mit ED, zieht LK, markirt deren Schnitt J mit CD und verbindet L mit E, wodurch der Punkt A auf LB abgeschnitten wird u. s. f.

V. Der Leser wolle in Fig. 361 Folgendes nachtragen: er bilde ein dem Kreise umschriebenes Sechseck, indem er an den Ecken A, B, C ... die Kreistangenten zieht. Es werde der Kreuzungspunkt der Tangenten an A und B mit B' bezeichnet, der Kreuzungspunkt der Tangenten an B und C mit C' und so die übrigen Punkte des umschriebenen Sechseckes der Reihe nach mit D', E', F', A'. Wegen des Parallelismus der Gegenseiten AF, CD des eingeschriebenen Sechseckes wird die Diagonale $A'D'$ des umschriebenen Sechseckes auf AB und CD senkrecht stehen und durch das Centrum des Kreises gehen. Aus den gleichen Gründen werden sich auch die beiden andern Diagonalen $B'E'$ und $F'C'$ im Centrum des Kreises kreuzen. Wird nun der Kreis sammt dem umschriebenen Sechseck perspektivisch in eine andere Ebene projicirt, so entsteht aus dem Kreise irgend eine Kegelschnittslinie, die Seiten des umschriebenen Sechseckes werden abermals zu Tangenten des Kegelschnittes und die drei Diagonalen $A'D'$, $B'E'$, $F'C'$ des umschriebenen Sechseckes werden sich in einem einzigen Punkte durchkreuzen, der Projektion des früheren Kreiscentrums.

VI. Angenommen nun, man habe in Fig. 366 fünf beliebige Tangenten einer Kegelschnittslinie, dann läßt sich nach dem vorstehenden Satze eine sechste, eine siebente Tangente u. s. f., lediglich mit Hülfe des Lineals konstruiren. Die Arbeit besteht darin, daß man irgend ein Sechseck bildet, wovon die fünf ersten Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ in der Richtung der gegebenen Tangenten liegen und dessen Diagonalen aus den gegenüberstehenden Ecken sich an einem Punkte P kreuzen. Die letzte Seite $A'F'$ wird die gesuchte Tangente sein.

Man unterstelle ferner: von dem umschriebenen Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ der Fig. 366 hätten sich in Fig. 367 zwei Seiten $A'F'$ und $E'F'$ in eine einzige vereint, sowie ihre Berührungspunkte E, F in einen einzigen Berührungspunkt E. Bei solchen Umständen fällt der Scheitel F' mit E zusammen, ohne daß der Satz V zu gelten aufhört, und somit zeigt sich: daß in irgend einem Fünfeck, Fig. 367, welches einem Kegelschnitte umschrieben ist, zwei Diagonalen, $A'D'$, $B'E'$, die nicht von demselben Winkelpunkte auslaufen, sich in einem Punkte P mit derjenigen Geraden kreuzen, welche das fünfte Eck C' mit dem Berührungspunkt E der gegenüberstehenden Seite $A'F'$ vereint.

Hat man demnach fünf Tangenten eines Kegelschnittes, welche ein demselben umschriebenes Fünfeck bilden, so findet man, dem Satze von Nr. V folgend, nicht nur beliebig viele andere Tangenten, sondern nach Nr. VI auch den Berührungspunkt einer jeden, immer mit alleinigem Gebrauch von geraden Linien, und daraus geht schließlich hervor, daß es nur eine einzige Kegelschnittslinie gäbe, welche fünf beliebig in einer Ebene gegebene gerade Linien berührt.

Die Fig. 367 dient auch zur Erläuterung, wie man die Kegelschnittslinie zeichnen könne, wenn nur vier Tangenten, $D' E'$, $A' E'$, $A' B'$, $B' C'$, und der Berührungspunkt E einer von ihnen gegeben sind, indem man sieht, wie eine fünfte Tangente $C' D'$ u. s. f. sich bestimmen läßt.

VII. Den Mittelpunkt eines Kegelschnittes zu finden, von welchem fünf Punkte A, B, C, D, E gegeben sind, ziehe man in A eine Tangente an die Kurve (Nr. IV) und durch den Punkt P eine Parallele zu dieser Tangente. Nach Anleitung von Nr. III suche man den zweiten Pnnkt, er mag K heißen, welchen die Parallele mit der Kurve gemein hat. Eine Gerade, durch A und durch die Mitte von $B K$ gezogen, muß die Richtung eines Durchmessers der Kurve haben. Man bestimme das zweite Ende J dieses Durchmessers und in der Mitte von $A J$ liegt das Centrum des Kegelschnittes.

VIII. Es sind fünf Punkte eines Kegelschnittes gegeben, man soll die Art der Linien bestimmen, welcher diese fünf Punkte angehören.

Bildet aus den fünf Punkten, wenn es möglich ist, ein konvexes Polygon und suchet den Mittelpunkt der Linie. Fällt er ins Innere des Polygones, so hat man fünf Punkte einer Ellipse vor sich, die fünf Punkte werden einer Hyperbel angehören, wenn der Mittelpunkt außerhalb des Polygones fällt, und einer Parabel, wenn dieser Mittelpunkt als im Unendlichen liegend sich erweisen sollte.

Wäre es durchaus unthunlich, auf irgend eine Art aus den fünf Punkten ein konvexes Polygon zu bilden, dann muß die Kurve immer eine Hyperbel sein und die fünf Punkte vertheilen sich auf ihre beiden Aeste.

V.

Ueber die sphärische Epicykloide.

I. Eine Rotations-Cylinderfläche C und eine Ebene, beide etwa als horizontal gedacht, tangiren sich nach einer geraden Erzeugungslinie der ersteren; die Cylinderfläche rollt auf der Ebene fort, ohne längs ihrer Berührungslinie zu gleiten; so beschreibt irgend ein auf der Fläche C genommener Punkt F eine krumme Linie, welche Cykloide genannt wird. Sie liegt jedenfalls ganz in einer Ebene, welche senkrecht steht gegen die Achse von C. Der beschreibende Punkt F wird einmal die Horizontalebene berühren; von hier aus steigt er an, um nach einem halben Umlauf eine Höhe gleich dem Durchmesser von C zu erreichen. Nach einem weiteren halben Umlaufe von C wird P abermals zum Berührungspunkt, um hier wieder zurückzuspringen und einen neuen Ast seiner Bahn zu durchlaufen. Jeder solcher Berührungspunkt von F mit der Horizontalebene ist ein Rückkehrpunkt der Cykloide. Jeder andere Punkt von C beschreibt während eines Umlaufes eine gleiche Cykloide und sämmtliche Kurven dieser Art müssen ähnliche Linien sein, weil sie sich nur durch den Diameter der rollenden Cylinderfläche C unterscheiden. Ein Punkt außerhalb der Cylinderfläche aber, unveränderlich mit ihr verbunden, welcher ihre Bewegung theilt, beschreibt dadurch eine verlängerte Cykloide, und ein eben solcher Punkt im Innern der Fläche beschreibt während einer Umwälzung eine verkürzte Cykloide.

II. Zwei Rotations-Cylinderflächen berühren sich längs einer ihrer geraden Erzeugungslinien. Die erste B ist im Raume fest, die zweite C rollt auf ihr, ohne längs der Berührungslinie zu gleiten; alsdann beschreibt jeder auf der Fläche C genommene Punkt F eine Epicykloide, nämlich eine Kurve, welche nach jedem vollendeten Umlauf einen Rückkehrpunkt bildet und welche in einer auf der Achse beider Cylinderflächen senkrechten Ebene liegt. Ein unveränderlich mit C verbundener Punkt außerhalb der Fläche beschreibt während einer Umwälzung eine verlängerte, und ein solcher Punkt innerhalb der Fläche eine verkürzte Epicykloide. Zwei von verschiedenen Cylinderpaaren beschriebene Epicykloide werden nur in dem Falle ähnliche Kurven sein, wenn die Diameter der vier Flächen mit einander in Proportion stehen.

III. Berühren sich zwei Rotations-Kegelflächen, welche einen gemeinsamen Scheitel haben, längs einer ihrer geraden Erzeugungslinien, und die

zweite Kegelfläche rollt auf der ersten, welche fest bleibt, so beschreibt irgend ein Punkt F der zweiten Fläche während eines Umlaufes von ihr eine sphärische Epicykloide. Das Beiwort „sphärisch" bezieht sich hier auf die Eigenthümlichkeit, daß die Linie gedacht werden kann als einer Kugel angehörend, deren Centrum im gemeinsamen Scheitel der zwei Kegelflächen liegt, und deren Radius gleich ist der unveränderlichen Länge der durch F gehenden geraden Erzeugungslinie der zweiten Kegelfläche zwischen F und dem Scheitel. Die sphärische Epicykloide kann keine ebene Linie sein, da sie einer Kugel angehört, doch offenbar kein Kreis ist. Ein Punkt außerhalb der beweglichen Kegelfläche und unveränderlich mit ihr verbunden würde während eines Umlaufes der Fläche eine verlängerte sphärische Epicykloide beschreiben, während die verkürzte sphärische Epicykloide hervorgebracht wird durch einen Punkt innerhalb der Fläche, welcher dem Gesetze ihrer Umwälzung folgt.

IV. Konstruktion der sphärischen Epicykloide. Fig. 368. Eine Kugel, deren Centrum in dem gemeinsamen Scheitel (S, S') der zwei Kegelflächen und deren Radius $S'Z'$ gleich ist der Entfernung des beschreibenden Punktes vom Scheitel, schneidet die feste Kegelfläche nach einem Kreise vom Radius SB, dessen Ebene als horizontale Projektionsebene genommen worden. Dieselbe Ebene schneidet die zweite Kegelfläche nach einem Kreise von gegebenem Radius, dessen Umfang den ersten stets berührt und dessen Ebene mit der Ebene des ersten Kreises einen Winkel bildet, gleich dem Winkel der Rotationsachsen beider Kegelflächen, welche gegenseitig auf den Kreisebenen senkrecht stehen. Es sei A der Anfangspunkt der Epicykloide, nämlich jener Ort, wo der beschreibende Punkt zugleich Berührungspunkt beider Kreise gewesen, AB ein beliebiger, von dem Berührungspunkte beider Kreise durchlaufener Bogen, und es handelt sich, jenen Punkt der Epicykloide zu bestimmen, welcher dem Berührungspunkte B entspricht. Hierzu lege ich durch B und (S, S') eine vertikale Ebene, zugleich als vertikale Projektionsebene. Sie wird enthalten: erstens die Achsen SS', $S'O'$ der zwei Kegelflächen; zweitens ihre gegenseitige Berührungslinie $S'B$; drittens den Kreis, nach welchem die Kugel vom Radius $S'B$ die bewegliche Kegelfläche schneidet. Dieser Kreis projicirt sich als die Gerade BE', welche auf $S'O'$ senkrecht steht und von ihr in O' halbirt wird. BE' ist somit der Diameter des beweglichen Kreises und $E'BE'' = SS'O'$ der unveränderliche Winkel beider Kreisebenen. Der mobile Kreis ward durch Drehung seiner Ebene um deren Horizontalriß BN in die Horizontalebene nach $BF''E''$ niedergelegt, wobei

B unveränderlich blieb und das Centrum O' auf die Gerade SB nach O'' fiel. Es blieb der Bogen BF'' an Länge gleich dem Bogen BA zu nehmen und F'' war der beschreibende Punkt, nachdem er mit seinem Kreise in die Horizontalebene niedergelegt worden. Man projicirte F'' nach F', nahm auf BE' die Entfernung $Bf' = BF'$, so war f' die Vertikalprojektion des beschreibenden Punktes, woraus seine Horizontalprojektion F folgte, welche der auf BN senkrechten Geraden $F''F$ angehören muß. In der Senkrechten $f'\varphi$ ist die Höhe des beschreibenden Punktes über seine Horizontalprojektion F ausgedrückt.

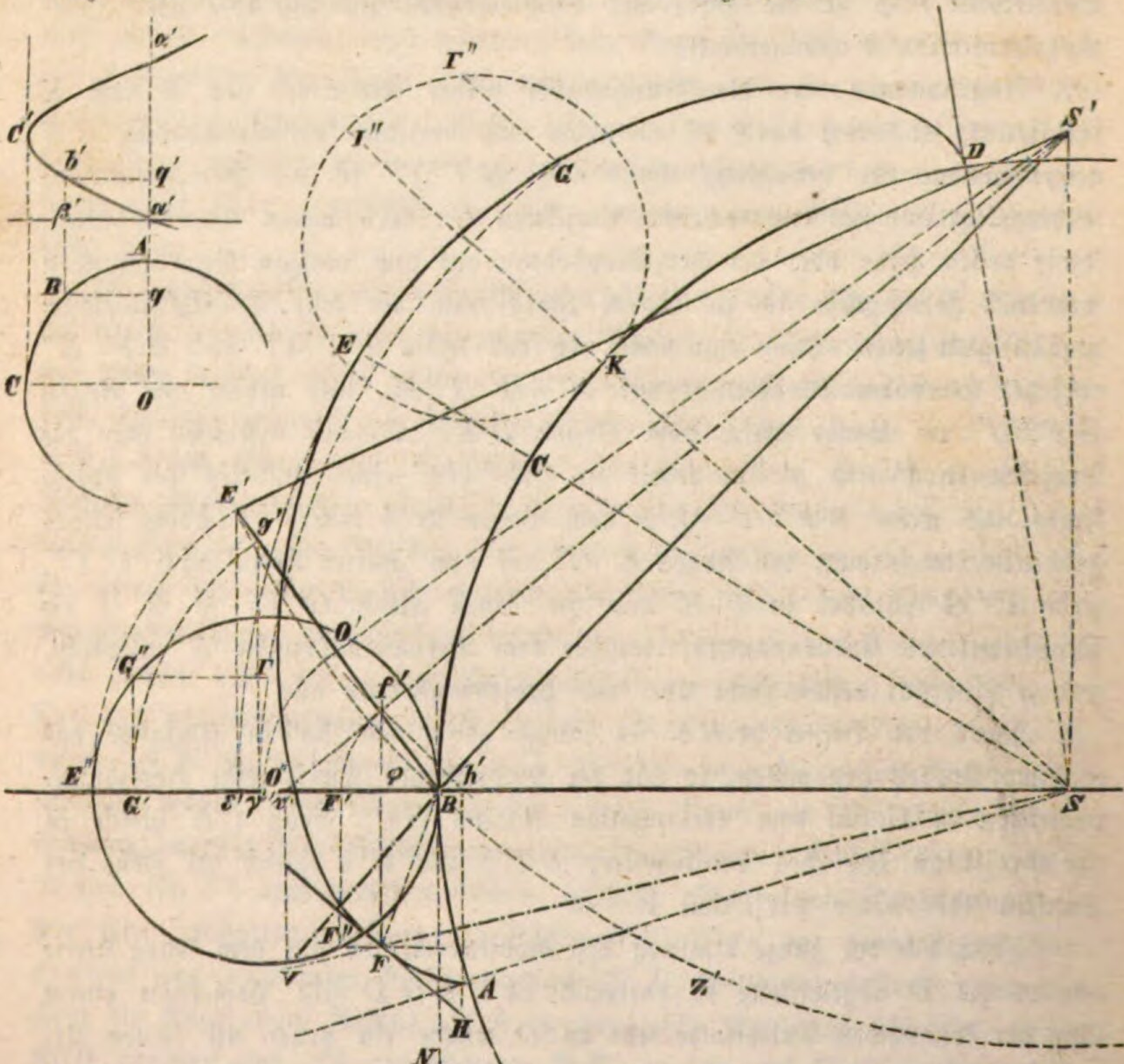
Angenommen, der Berührungspunkt beider Kreise sei von B nach K fortgerückt, so könnte durch K wiederum eine vertikale Projektionsebene SK angenommen, der bewegliche Kreis nach $KI''\Gamma''$ in die Horizontalebene niedergelegt und die entsprechende Projektion G eines neuen Kurvenpunktes, sowie dessen Höhe über der Projektionsebene auf dem vorigen Wege gefunden werden. Jedoch läßt sich zu diesem Zweck auch die erste Vertikalprojektion in Thätigkeit setzen. Denn man denke sich den Kreis $KI''\Gamma''$ nach $BF''E''$ versetzt, sodaß der Berührungspunkt K nach B fällt, und nehme den Bogen $BF''G''$ an Länge gleich dem Bogen BK; alsdann bestimme man die Projektionen Γ und g' und somit die Höhe $g'\gamma'$ eines Punktes der Epicykloide, als wenn $BF''G''$ gleich dem Bogen BA wäre. Nachdem solches geschehen, trage man den Bogen $E''G''$ auf dem zweiten Kreise nach $I''\Gamma''$, ziehe $\Gamma''G$ parallel zu $I''K$ und an Länge gleich $G''\Gamma$, so ist G die Projektion des Kurvenpunktes, welcher dem Berührungspunkte K entspricht, und $g'\gamma'$ drückt dessen Höhe über der Projektionsebene aus.

Ward der Bogen ABC an Länge gleich dem halben Umfange des mobilen Kreises genommen, so hat der beschreibende Punkt seine Horizontalprojektion in E auf dem verlängerten Radius SC, sodaß CE gleich ist der Projektion $B\varepsilon'$ des Durchmessers BE', und $E'\varepsilon'$ gleich der Höhe des Punktes über seiner Projektion E.

Hatte sich der ganze Umfang des mobilen Kreises auf dem festen Kreise von A bis D abgewickelt, so entspricht $AFEGD$ als Projektion einem Aste der sphärischen Epicykloide und in D würde ein neuer Ast seinen Ursprung nehmen, wodurch dies D als Rückkehrpunkt beider Aeste erschiene. Die Anzahl dieser Aeste könnte nur alsdann eine begränzte werden, wenn der Quotient aus dem Umfang des beweglichen, dividirt in den Umfang des festen Kreises, eine ganze Zahl wäre.

V. Tangente der sphärischen Epicykloide. Die ganze Kurve gehört erstens einer Kugel, deren Centrum in (S, S') und deren Radius gleich $S'B$ ist. Nun betrachte man den erzeugenden Punkt in irgend einer Stellung, wie (F, f'), und bringe ihn durch eine Gerade in Verbindung mit dem entsprechenden Berührungspunkte B. Indem nun (F, f') in eine unendlich nahe liegende nächste Stellung übergeht, darf man annehmen, der Punkt

Fig. 369. Fig. 368.



bewege sich auf einer Kugel, von welcher B das Centrum und $(FB, f'B)$ der Radius. In diesem untheilbaren Augenblick seiner Bewegung gehört der beschreibende Punkt somit gleichzeitig zwei Kugeln an, deren eine ihren Mittelpunkt in (S, S'), die andere in B hat. Die Richtung seiner Bahn

oder die Tangente der Kurve im Punkte (E, f') liegt demnach in dem Durchschnitte der tangirenden Ebenen beider Kugeln in genanntem Punkte. Sie ist somit senkrecht auf die Ebene der zwei Kugelradien $(S F, S' f')$, $(B F, B f')$. Aber von diesen dringt die erste in (v', V) durch die Horizontalebene und die zweite in B; daher ist $B V$ Horizontalriß der Ebene, welche durch beide Radien gelegt wird, und ihr Vertikalriß in der Ebene $B S$ ist die Gerade $S' B$. Es folgt hieraus, daß die Horizontalprojektion $F H$ der Tangente senkrecht auf $B V$ stehen müsse und ihre Vertikalprojektion $f' h'$ senkrecht auf $S' B$. Die Tangente schneidet somit in (h', H) die Horizontalebene.

VI.

Ueber die Projektion der Schraubenlinie.

Es sei Fig. *369* $(O, a' \alpha')$ die vertikale Achse einer Schraubenlinie, der Kreis $A B C$ ihre Horizontalprojektion und die Kurve $a' b' c'$ .. ihre Vertikalprojektion, (A, a') Anfangspunkt der Linie. Wie bekannt, steht bei der Schraubenlinie die Höhe $\beta' b'$ eines Punktes (B, b') der Linie zu dem entsprechenden Drehungsbogen $A B$ in einem konstanten Verhältniß. Bezeichnet man dies Verhältniß mit m, so folgt arc $A B = m \times (\beta' b')$. Man ziehe nun $b' q'$ senkrecht auf $a' \alpha'$ und $B q$ senkrecht auf $O A$. Alsdann ist $B q$ der Sinus des Drehungsbogen $A B$, und wenn $a' q' = \beta' b'$ als Abscisse genommen und mit x bezeichnet wird, $b' q' = B q = y$ als Ordinate des Kurvenpunktes b', so folgt $y = \sin \text{arc } A B = \sin m x$, d. h. die Ordinate gleicht dem Sinus eines Vielfachen der Abscisse. Infolge dieser Beziehung hat man der Projektion $a' b' c'$ den Namen Sinusoide beigelegt.

Es wird unschwer zu entnehmen sein, daß die Aufwickelung des schiefen Schnittes der Rotations-Cylinderfläche zur Gattung der Sinusoide gerechnet werden müsse.

VII.

Schlußnote.

Ueber die Anfertigung der Zeichnungen.

Zu Tage liegt es, wie bei dem Studium der darstellenden Geometrie ein Erfolg nur unter der Bedingung zu erhoffen, daß der Lernende stets Zirkel und Lineal bei der Hand habe, die vorkommenden Zeichnungen selbst

zu entwerfen. Denn der größte Nutzen dieses Studiums für den Zeichner und Konstruktor besteht in der Bildung seiner Vorstellungskraft bezüglich räumlicher Verhältnisse. Aber bei kaum einer andern geometrischen Arbeit, als beim Entwurf projektiver Zeichnungen, wird diese Vorstellungskraft des Zeichnenden in gleichem Maße so unbedingt wie ununterbrochen in Anspruch genommen. Nun ist Verfasser dieses Werkes allerdings bestrebt gewesen, den gegebenen Stoff möglichst eng zu umgrenzen; er mochte sich aber nicht erlauben, Wesentliches auszuschließen, und so ist denn die Zahl der Zeichnungen immerhin bedeutend geworden. Sie lassen sich in zwei größere Abtheilungen reihen: wenn zur ersten jene Zeichnungen gerechnet werden, welche, wie z. B. die Figuren auf Seite 432 und 433, rein zur Demonstration dienen. Bei diesen genügt eine nur skizzirte Ausführung. In zweiter Linie stellen sich alsdann die übrigen, wie etwa auf Seite 440. Diese Zeichnungen verlangen eine pünktliche und höchst sorgfältige Behandlung. Sie sollen in mindestens dreimal größerer Dimension ausgeführt werden, ja man kann sagen: je größer die Dimension, je gewinnbringender die Arbeit für den Zeichner. Nun wird wol seine verfügbare Zeit nicht einem Jeden von diesen die Ausführung all' unserer Figuren gestatten und hier wird darum eine Auswahl zu treffen sein. Keineswegs soll eine solche Auswahl sich auf die Figuren der ersten Abtheilung (über ebene Fläche und gerade Linie) ausdehnen, welche ohne Ausnahme durch den Schüler auszuführen sind und eher noch vermehrt werden dürfen, weil in ihnen die Grundlage unseres ganzen Lehrgebäudes erkannt werden muß. Uebergangen können somit theilweise nur solche Zeichnungen werden, welche sich auf krumme Flächen beziehen und welche sich gegen das Ende eines jeden Abschnittes finden. Was man aber ausführe, immer möge die Vorschrift beachtet werden, daß jede Zeichnung der darstellenden Geometrie an und für sich und ohne Kommentar verständlich sein solle. Wir verlangen dabei noch eine höchst saubere Ausführung, weil dies der Arbeit mehr als einen nur eingebildeten Werth verleiht.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

Schreiber, Guido,

Das technische Zeichnen für Architekten, Techniker, Mechaniker und Bauhandwerker, insbesondere für Bau- und Gewerbschulen

Bd.: 2,2

Leipzig 1863 [erschienen] 1865